Wpływ pola magnetycznego na plazmę w półprzewodnikach

Założenia

- pole magnetyczne ***B*** nie wpływa na polaryzację rdzeni atomowych (zatem ε_{∞} nie zalezy od ***B***)
- pole magnetyczne nie wpływa na polaryzację, ani na częstości własne modów fononowych

Jedyny wpływ pola magnetycznego na polaryzację wynika z jego wpływu na zachowanie swobodnych nośników!

Wpływ pola magnetycznego na plazmę (w półprzewodnikach)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_L(\omega) + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}$$

$\varepsilon_L(\omega)$ - funkcja dielektryczna sieci bez nośników swobodnych

Pole magnetyczne modyfikuje ruch nośników poprzez siłę Lorentza

Równanie ruchu ⇨ Tensor przewodnictwa ⇨ Tensor dielektrycznej

$$m^* \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{\upsilon} \times \vec{B} - \frac{m^*\vec{\upsilon}}{\tau}$$

Pole elektryczne zmienne w czasie

Periodyczny w czasie „dodatek” do prędkości nośników

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 \exp(-i\omega t)$$

Znając zależność prędkości od pola magnetycznego spróbujemy znaleźć tensor przewodnictwa:

(dla elektronów) $$\vec{j} = -en\vec{\upsilon} = \hat{\sigma}\vec{E}$$

Zacznijmy od prędkości:

$$\vec{E} = [E_x, E_y, E_z]$$

$$\vec{\upsilon} = [\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z]$$

Wybieramy: $\vec{B} = [0,0,B]$

$\Downarrow$

$$\vec{\upsilon} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = [\upsilon_y B, -\upsilon_x B, 0]$$

Stąd dostajemy układ równań na składowe prędkości

$$\begin{cases} \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = -\dfrac{eE_x}{m^*} - \dfrac{eB}{m^*}\upsilon_y - \dfrac{\upsilon_x}{\tau} \\ \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -\dfrac{eE_y}{m^*} + \dfrac{eB}{m^*}\upsilon_x - \dfrac{\upsilon_y}{\tau} \\ \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = -\dfrac{eE_z}{m^*} - \dfrac{\upsilon_z}{\tau} \end{cases}$$

Szukamy rozwiązań w postaci: $\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 \exp(-i\omega t)$

$$\begin{cases} -i\omega\upsilon_{0x} = -\dfrac{eE_{0x}}{m^*} - \dfrac{eB}{m^*}\upsilon_{0y} - \dfrac{\upsilon_{0x}}{\tau} \\ -i\omega\upsilon_{0y} = -\dfrac{eE_{0y}}{m^*} + \dfrac{eB}{m^*}\upsilon_{0x} - \dfrac{\upsilon_{0y}}{\tau} \\ -i\omega\upsilon_{0z} = -\dfrac{eE_{0z}}{m^*} - \dfrac{\upsilon_{0z}}{\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-i\omega + \dfrac{1}{\tau}\right)\upsilon_{0x} + \dfrac{eB}{m^*}\upsilon_{0y} = -\dfrac{eE_{0x}}{m^*} \\ -\dfrac{eB}{m^*}\upsilon_{0x} + \left(-i\omega + \dfrac{1}{\tau}\right)\upsilon_{0y} = -\dfrac{eE_{0y}}{m^*} \\ \left(-i\omega + \dfrac{1}{\tau}\right)\upsilon_{0z} = -\dfrac{eE_{0z}}{m^*} \end{cases}$$

Spróbujmy wyrazić składowe prędkości przez składowe pola elektrycznego:

$$\begin{cases} (1 - i\omega\tau)\upsilon_{0x} + (\omega_c\tau)\upsilon_{0y} = -\dfrac{e\tau}{m^*}E_{0x} \\ -(\omega_c\tau)\upsilon_{0x} + (1 - i\omega\tau)\upsilon_{0y} = -\dfrac{e\tau}{m^*}E_{0y} \\ \upsilon_{0z} = -\dfrac{e\tau}{m^*(1 - i\omega\tau)}E_{0z} \end{cases}$$

Częstość cyklotronowa:

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*}$$

$$\begin{cases} (1-i\omega\tau)\upsilon_{0x} + (\omega_c\tau)\upsilon_{0y} = -\dfrac{e\tau}{m^*}E_{0x} \\ -(\omega_c\tau)\upsilon_{0x} + (1-i\omega\tau)\upsilon_{0y} = -\dfrac{e\tau}{m^*}E_{0y} \\ \upsilon_{0z} = -\dfrac{e\tau}{m^*(1-i\omega\tau)}E_{0z} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \upsilon_{0x} = \dfrac{1}{(1-i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2}\left[-\dfrac{e\tau}{m^*}(1-i\omega\tau)E_{0x} + \dfrac{e\tau}{m^*}(\omega_c\tau)E_{0y}\right] \\ \upsilon_{0y} = \dfrac{1}{(1-i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2}\left[-\dfrac{e\tau}{m^*}(\omega_c\tau)E_{0x} - \dfrac{e\tau}{m^*}(1-i\omega\tau)E_{0y}\right] \\ \upsilon_{0z} = -\dfrac{e\tau}{m^*(1-i\omega\tau)}E_{0z} \end{cases}$$

Znając zależność prędkości od pola elektrycznego możemy znaleźć tensor przewodnictwa:

$$\vec{j} = -en\vec{\upsilon} = \hat{\sigma}\vec{E}$$

Przedstawmy tę równość w postaci macierzowej i wyznaczmy składowe tensora przewodnictwa…

Skorzystajmy ze związków:

$$\sigma_0 = -en\frac{-e\tau}{m^*} = \frac{e^2 n\tau}{m^*}$$

σ_0 - przewodnictwo w stałym polu elektrycznym w nieobecności pola magnetycznego

$$\sigma_0 = \omega_p^2 \tau \varepsilon_\infty \varepsilon_0$$

ω_p - częstość plazmowa

Tensor przewodnictwa w polu magnetycznym

$$\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \vec{E}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0 (1 - i\omega\tau)}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c \tau)^2} = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_\infty \varepsilon_0 \tau (1 - i\omega\tau)}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c \tau)^2}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} = \frac{\omega_p^2 \tau \varepsilon_\infty \varepsilon_0}{1 - i\omega\tau}$$

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c \tau)^2} = \frac{\varepsilon_\infty \varepsilon_0 \omega_p^2 \omega_c \tau^2}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c \tau)^2}$$

Granica długiego czasu relaksacji (zerowe tłumienie)

$$\tau \to \infty \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\tau} \to 0$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{i\omega\omega_p^2\varepsilon_\infty\varepsilon_0}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{i\omega_p^2\varepsilon_\infty\varepsilon_0}{\omega}$$

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = -\frac{\varepsilon_\infty\varepsilon_0\omega_p^2\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Tensor dielektrycznej w obecności nośników

$$\varepsilon_L(\omega) = \varepsilon_\infty \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_{TO}{}^2 - \omega^2}$$

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_L(\omega)\hat{I} + \frac{i\hat{\sigma}}{\omega\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

Znając składowe tensora przewodnictwa znajdziemy składowe tensora dielektrycznego

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

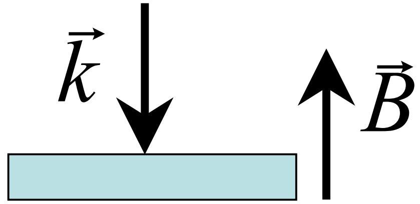
$$\boxed{\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{i\omega\omega_p^2\varepsilon_\infty\varepsilon_0}{\omega^2 - \omega_c^2}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{xx}(\omega) = \varepsilon_{yy}(\omega) = \varepsilon_L(\omega) - \varepsilon_\infty \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

$$\boxed{\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = -\frac{\varepsilon_\infty\varepsilon_0\omega_p^2\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy} = -\frac{i\varepsilon_\infty\omega_p^2\omega_c}{(\omega^2 - \omega_c^2)\omega}}$$

$$\boxed{\sigma_{zz} = \frac{i\omega_p^2\varepsilon_\infty\varepsilon_0}{\omega}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{zz}(\omega) = \varepsilon_L(\omega) - \varepsilon_\infty \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Konfiguracje w polu magnetycznym $\vec{B} \parallel \vec{z}$

Konfiguracja Faradaya $\vec{k} \parallel \vec{B}$

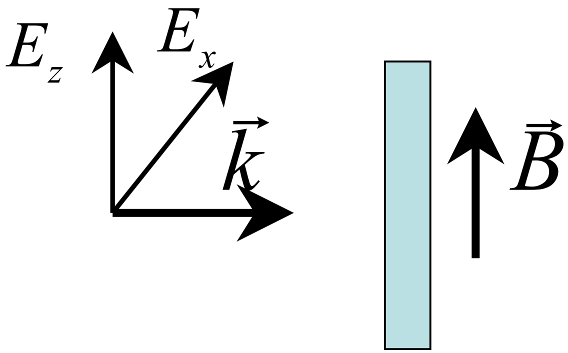


Podstawowe polaryzacje fal

prawoskrętna σ_+ ⇨ $\vec{E} = [E_x, iE_x, 0]$

lewoskrętna σ_- ⇨ $\vec{E} = [E_x, -iE_x, 0]$

Konfiguracja Voigta $\vec{k} \perp \vec{B}$



Konfiguracja równoległa

$\vec{E} \parallel \vec{B}$

Konfiguracja prostopadła

$\vec{E} \perp \vec{B}$

$$\vec{E} = [E_x, E_y, E_y] \qquad \vec{\mathsf{E}} = \vec{\mathsf{E}}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Z równań Maxwella (poprzedni wykład) $$-\vec{k}(\vec{\mathsf{E}}_0 \cdot \vec{k}) + k^2 \vec{\mathsf{E}}_0 = \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathsf{E}}_0$$

Wprowadźmy wektor propagacji fali: $$\boxed{\vec{N} = \vec{k}\frac{c}{\omega}}$$

Długość wektora propagacji jest równa zespolonemu współczynnikowi załamania $$\boxed{N = \tilde{n} = n + i\kappa}$$

$$-\vec{N}(\vec{\mathsf{E}}_0 \cdot \vec{N}) + \vec{N}^2 \vec{\mathsf{E}}_0 - \hat{\varepsilon}\vec{\mathsf{E}}_0 = 0$$

Można rozłożyć wektor propagacji $$\vec{N} = \vec{N}_{\mathrm{II}} + \vec{N}_{\perp} \qquad \vec{N}_{\mathrm{II}} \parallel \vec{B} \qquad \vec{N}_{\perp} \perp \vec{B}$$

Fale poprzeczne $\Rightarrow$ $$\vec{N} \perp \vec{E}_x, \vec{E}_y$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{N}^2 \vec{\mathsf{E}}_0 - \hat{\varepsilon}\vec{\mathsf{E}}_0 = 0}$$

Konfiguracja Faradaya:

$$\vec{N} \perp \vec{E}_x, \vec{E}_y$$

$$\vec{N} \parallel \vec{B} \parallel z$$

$$\begin{pmatrix} N^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ +\varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \left(N^2 - \varepsilon_{xx}\right)E_x - \varepsilon_{xy}E_y = 0 \\ \varepsilon_{xy}E_x + \left(N^2 - \varepsilon_{xx}\right)E_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(N^2 - \varepsilon_{xx}\right)E_x - \varepsilon_{xy}E_y = 0 \\ E_x = -\dfrac{\left(N^2 - \varepsilon_{xx}\right)}{\varepsilon_{xy}} E_y \end{cases}$$

$$\left(N^2 - \varepsilon_{xx}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

$$\left(N^2 - \varepsilon_{xx}\right) = \pm i\varepsilon_{xy}$$

$$\boxed{N_\pm^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}}$$

$$N_{\pm}^{2} = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$$

Jaki jest związek pomiędzy składowymi
pola elektrycznego E_x oraz E_y?

$$N_{+}^{2} = \varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy}$$

$$E_x = -\frac{\varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} E_y$$

$$E_y = +iE_x$$

Polaryzacja prawoskrętna:

$$N_{-}^{2} = \varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}$$

$$E_y = -iE_x$$

Polaryzacja prawoskrętna:

Znajdźmy związek zespolonego współczynnik załamania ze składowymi tensora dielektrycznego:

$$\boxed{N_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}}$$

Dygresja

Postać funkcji dielektrycznej w przypadku kryształu o wiązaniu jonowym zawierającym gaz swobodnych nośników:

$\omega_p << \omega_{TO} \Rightarrow \varepsilon_{opt} = \varepsilon_{st}$

$\omega_p >> \omega_{TO} \Rightarrow \varepsilon_{opt} = \varepsilon_{\infty}$

$\omega_p \approx \omega_{TO} \Rightarrow$ Trzeba uwzględniać pełną funkcję dielektryczną zależną od częstości

Rozważmy sytuację: $\boxed{\omega_p >> \omega_{TO}}$

$$\varepsilon_{xx}(\omega) = \varepsilon_{\infty} - \varepsilon_{\infty} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{i\varepsilon_{\infty}\omega_p^2\omega_c}{(\omega^2 - \omega_c^2)\omega}$$

$$\varepsilon_{\pm} = N_{\pm}^2 = \varepsilon_{\infty} - \varepsilon_{\infty} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \pm i \frac{i\varepsilon_{\infty}\omega_p^2\omega_c}{(\omega^2 - \omega_c^2)\omega}$$

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\infty}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \mp \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)} \frac{\omega_c}{\omega}\right)$$

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\infty}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{\omega \mp \omega_c}{\omega}\right)$$

Bez tłumienia $$\boxed{\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\infty}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)}\right)}$$

Z tłumieniem $$\boxed{\tilde{n}^2 = \varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\infty}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c + i\gamma)}\right)}$$

Znając $\tilde{n}^2 = \varepsilon_{\pm}$ ⇨ **Widmo odbicia, widmo absorpcji**

Rozszczepienie krawędzi plazmowej

Krawędź plazmowa współczynnik odbicia R=1 $\Rightarrow$ $N^2 = 0$

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} = 0$$

$$\omega^2 \pm \omega_c\omega - \omega_p^2 = 0 \qquad \Delta = \omega_c^2 + 4\omega_p^2$$

$$\boxed{\omega_{\pm} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \pm \frac{1}{2}\omega_c}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_+ - \omega_- = \omega_c}$$

Rozszczepienie krawędzi plazmowej

Zera i osobliwości funkcji dielektrycznej w konfiguracji Faradaya

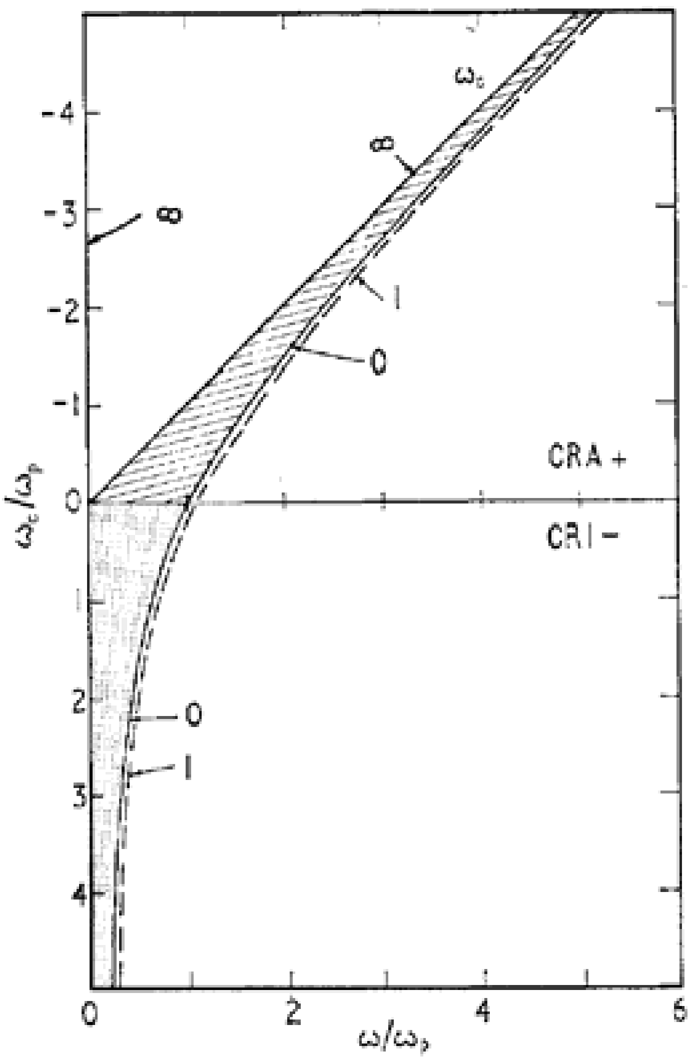


Figure 9. 'Contour map' of dielectric constants $\kappa'_{\pm}$ for the Faraday geometry with 0, 1 and ∞ lines indicated. Shaded areas represent regions of negative $\kappa'_{\pm}$ where reflectivity is unity (after Palik and Henvis 1970).