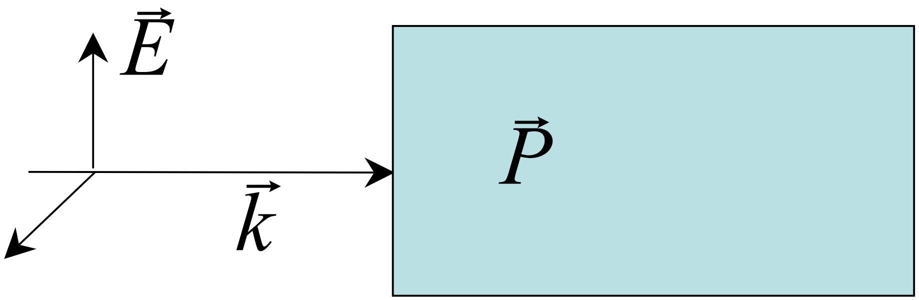
Oddziaływanie fali elektromagnetycznej z ośrodkiem

Liniowa odpowiedź ośrodka dielektrycznego na zewnętrzne pole elektryczne…



- natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$

- polaryzacja ośrodka $\vec{P}$

Załóżmy (dla ułatwienia), że

- zajmujemy się ośrodkiem izotropowym ⇨ $\vec{P} \parallel \vec{E}$

- zakładamy, że polaryzacja jest proporcjonalna do zewnętrznego pola elektrycznego (pomijamy efekty nieliniowe!) ⇨ $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

χ – podatność dielektryczna

Liniowa odpowiedź ośrodka dielektrycznego

Wektor indukcji elektrycznej można wyrazić jako:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Względna stała dielektryczna ośrodka:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

Wektor indukcji magnetycznej:

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Względna podatność magnetyczna:

$$\mu_r = 1 + \chi_M$$

Równania Maxwella

$$\begin{cases} \nabla \vec{D} = \rho \\ \nabla \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Prawo Gaussa dla elektrostatyki

Prawo Gaussa dla magnetostatyki
(nie ma monopoli magnetycznych)

Prawo Faradaya

Prawo Ampera z prądem przesunięcia
(drugi składnik po prawej stronie)

Równania materiałowe – definiujące ośrodek

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

μ_r – wzgledna przenikalnosc magnetyczna
j - gęstość prądu,
σ - przewodnictwo (w ogólnosci tensor)

Fale elektromagnetyczne w ośrodku bez swobodnych ładunków i prądów

(izolator, niemagnetyczny)

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\vec{D} = 0, \nabla\vec{E} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H} \end{cases}$$

Równania Maxwella

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{B} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Bierzemy rotację z pierwszego równania i korzystamy z drugiego równania:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) = -\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \textbf{(R1)}$$

Wiadomo, że zachodzi tożsamość wektorowa

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) = \nabla\cdot\nabla\vec{E} - \nabla^2\vec{E}$$

Jednak z faktu, że ρ = 0 wynika, ze $\nabla\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) = -\nabla^2\vec{E}$

Zatem równanie (R1) przyjmuje postać:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \qquad \textbf{(R2)}$$

Postać tego równania jest identyczna z klasycznym równaniem falowym

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Zatem równanie (R2) opisuje fale elektromagnetyczne o prędkości spełniającej związek

$$\frac{1}{\upsilon^2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r$$

W próżni $\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \frac{m}{s}$

W ośrodku $\boxed{\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} c} \Rightarrow \boxed{n = \frac{c}{\upsilon} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$

n **- współczynnik załamania**

Dla częstości optycznych można przyjąć $\mu_r = 1$

$\Downarrow$

Współczynnik załamania $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r}}$

Związek między stałą dielektryczną a współczynnikiem załamania

Rozwiązania dla pola elektrycznego fali elektromagnetycznej propagującej się w kierunku *z* ma postać:

$$E(z,t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

gdzie *k* - liczba falowa

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

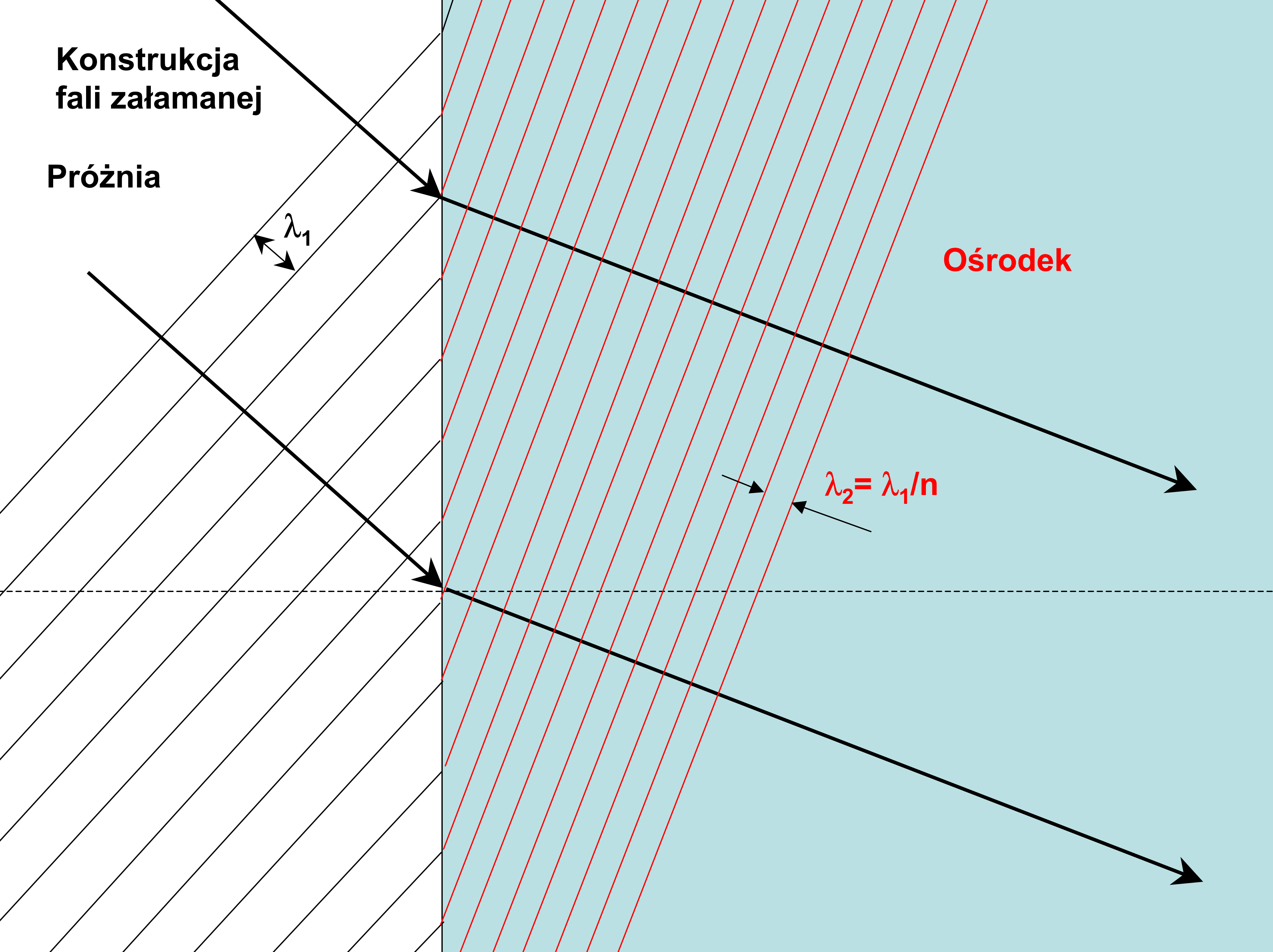
Po podstawieniu do równania (R2) dostajemy związek:

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{n\omega}{c}} \Rightarrow E(z,t) = E_0 e^{i\left(\frac{n\omega}{c} z - \omega t\right)}$$

$$\lambda = \frac{c}{n\omega} = \frac{\upsilon}{\omega}$$

długość fali w ośrodku jest mniejsza niż w próżni, stąd zjawisko załamania światła

Bez absorpcji
- amplituda nie ulega zmianie,
- *n* – nie zależy od częstości!



Konstrukcja fali załamanej
Próżnia
λ_1
Ośrodek
$\lambda_2 = \lambda_1/n$

Jak opisać absorpcję i załamanie jednocześnie?

Zespolony współczynnik załamania

$$\tilde{n} = n + i\kappa$$

n - „zwykły” współczynnik załamania
κ - współczynnik ekstynkcji

$$k = \frac{\tilde{n}\omega}{c} = \frac{n + i\kappa}{c}\omega$$

$$\Downarrow$$

$$E(z,t) = E_0 e^{i\left(\frac{n+i\kappa}{c}\omega z - \omega t\right)} = \underbrace{e^{-\frac{\kappa\omega}{c}z}}_{\text{zanik wykładniczy amplitudy (pochłanianie energii)}} \underbrace{E_0\, e^{i\left(\frac{n\omega}{c}z - \omega t\right)}}_{\text{propagacja fali z prędkością fazową } c/n}$$

zanik wykładniczy amplitudy (pochłanianie energii)

propagacja fali z prędkością fazową c/n

Zmiana natężenia fali elektromagnetycznej:

$$I(z) \propto \left|E(z)\right|^2 = I_0 e^{-\frac{2\kappa\omega}{c}z}$$

ale z prawa Beer'a:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2\kappa\omega}{c} = \frac{4\pi\kappa}{\lambda_0}}$$

λ_0 - długość fali w próżni

Związek pomiędzy zespolonym współczynnikiem załamania i stała dielektryczną:

$$\tilde{n} = n + i\kappa = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r}$$

$$\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = n^2 - \kappa^2$$

$$\varepsilon_2 = 2n\kappa$$

Związek pomiędzy częścią rzeczywistą i częścią urojoną funkcji dielektrycznej

Można też wyrazić współczynnik załamania i współczynnik ekstynkcji przez rzeczywistą i urojoną część funkcji dielektrycznej:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon_1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\varepsilon_1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}\right)^{1/2}$$

Dla słabo absorbującego medium κ jest małe i wtedy:

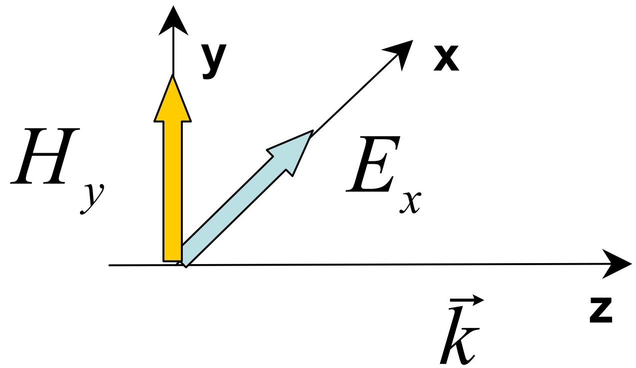
$$n = \sqrt{\varepsilon_1}$$

$$\kappa = \frac{\varepsilon_2}{2n}$$

Czyli współczynnik załamania związany jest z częścią rzeczywistą zespolonej funkcji dielektrycznej

Współczynnik ekstynkcji określony jest (głównie) przez część urojoną zespolonej funkcji dielektrycznej

Rozważmy falę elektromagnetyczną propagująca się wzdłuż osi z



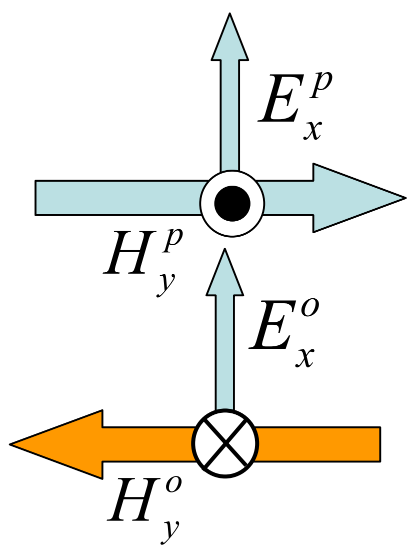
$$
\begin{cases}
E_x(z,t) = E_{x0}e^{i(kz-\omega t)} = E_{x0}e^{i\left(\frac{\tilde{n}\omega}{c}z-\omega t\right)} \\
E_y(z,t) = 0 \\
H_x(z,t) = 0 \\
H_y(z,t) = H_{x0}e^{i\left(\frac{\tilde{n}\omega}{c}z-\omega t\right)}
\end{cases}
$$

Odbicie od granicy ośrodków (padanie prostopadłe)

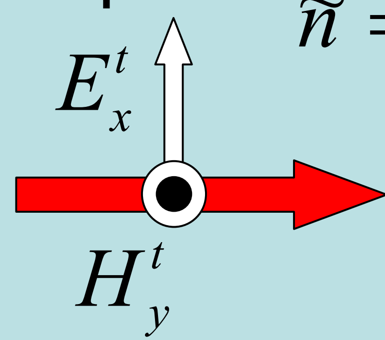
próżnia n=1

fala padająca

fala odbita



medium optyczne scharakteryzowane przez $\tilde{n} = n + i\kappa$



fala propagująca się w ośrodku

Warunki ciągłości na granicy ośrodków

$$\begin{cases} E_x^t = E_x^p + E_x^o \\ H_y^t = H_y^p - H_y^o \end{cases}$$

Związek pomiędzy polem elektrycznym i magnetycznym fali elektromagnetycznej

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Założyliśmy, że

$$\begin{cases} E_x(z,t) = E_{x0} e^{i(kz-\omega t)} \\ H_y(z,t) = H_{y0} e^{i(kz-\omega t)} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ E_{x0} e^{i(kz-\omega t)} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y (ik) E_{x0} e^{i(kz-\omega t)}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{e}_y \mu_0 \mu_r (i\omega) H_{y0} e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad kE_{x0} = \mu_0 \mu_r \omega H_{y0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{H_{y0} = \frac{kE_{x0}}{\mu_0 \mu_r \omega} = \frac{\tilde{n} E_{x0}}{c \mu_0 \mu_r}}$$

$$H_{y0} = \frac{kE_{x0}}{\mu_0 \mu_r \omega} = \frac{\tilde{n} E_{x0}}{c \mu_0 \mu_r}$$

Dla próżni: $\tilde{n} = 1, \mu_r = 1$

Dla ośrodka (niemagnetycznego) $\tilde{n}, \mu_r = 1$

$$\begin{cases} E^t_{x0} = E^p_{x0} + E^o_{x0} \\ H^t_{y0} = H^p_{y0} - H^o_{y0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E^t_{x0} = E^p_{x0} + E^o_{x0} \\ \tilde{n} E^t_{x0} = E^p_{x0} - E^o_{x0} \end{cases}$$

$$\frac{E^o_x}{E^p_x} = \frac{1 - \tilde{n}}{1 + \tilde{n}} \Rightarrow \boxed{R = \left| \frac{E^o_x}{E^p_x} \right|^2 = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}}$$

Gdy absorpcja jest mała (ośrodek przezroczysty)

$$\boxed{R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2}$$

Przykład

(Mark Fox, Optical properties of solids)

Zespolony współczynnik załamania germanu dla światła o długości fali 400 nm (czyli dla energii większych od przerwy energetycznej germanu) dany jest wzorem

$$\tilde{n} = 4.141 + i2.215$$

Wyznaczyć:

- **prędkość fazową światła o długości fali 400nm w germanie.**
- **współczynnik absorpcji germanu dla tej długości fali**
- **współczynnik odbicia**

Ad. a) Prędkość fazowa związana jest z częścią rzeczywistą $\tilde{n} = n + i\kappa$

$$\upsilon = \frac{c}{n} = \frac{2.998\times10^{8}}{4.141}\frac{m}{s} = 0.724\times10^{8}\frac{m}{s}$$

Ad. b) Współczynnik absorpcji

$$\alpha = \frac{2\kappa\omega}{c} = \frac{4\pi\kappa}{\lambda_0} = \frac{4\pi\cdot2.215}{400\times10^{-9}m} = 6.96\times10^{7}\frac{1}{m} = 6.96\times10^{5}\frac{1}{cm}$$

Ad. c) Współczynnik odbicia

$$R = \frac{(n-1)^2+\kappa^2}{(n+1)^2+\kappa^2} = \frac{(4.141-1)^2+2.215^2}{(4.141+1)^2+2.215^2} = 0.47$$

Nie uwzględniając κ mielibysmy:

$$R = \left(\frac{4.141-1}{4.141+1}\right)^2 = 0.37$$

Czyli za mało!

Jak uwzględnić obecność swobodnych nośników?

Klasyczne równanie ruchu (tłumionego) elektronu w polu elektrycznym:

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} + m_0\gamma \frac{dx}{dt} = -eE(t) \quad \textbf{(R3)}$$

Rozważmy pole elektryczne oscylujące z częstością ω

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

charakterystyczny (niezależny od częstości) czas rozpraszania τ **jest związany ze współczynnikiem tłumienia** γ

Postulujemy rozwiązanie stacjonarne:

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

Po podstawieniu do (R3) dostajemy:

$$x(t) = \frac{eE(t)}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Stąd polaryzacja gazu elektronowego:

$$\boxed{P(t) = -Nex(t) = -\frac{Ne^2E(t)}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)}}$$

Zatem indukcja elektryczna wyniesie:

$$D(t) = \varepsilon_0 E(t) + P = \varepsilon_0 E(t) - \frac{Ne^2}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)} E(t)$$

Z definicji $D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$

Zatem

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \frac{1}{(\omega^2 + i\gamma\omega)}}$$

Zwykle związek ten zapisujemy w postaci:

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + i\gamma\omega)}}$$

gdzie:

$$\boxed{\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0}\right)^{1/2}}$$

ω_p **- częstotliwość plazmowa**

Zanim przejdziemy do bardziej złożonych systemów rozważmy najpierw sytuację gdy, system jest słabo tłumiony $\gamma \cong 0$, wtedy

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Pamiętamy, że $\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon_r}$

Jeśli

$$\omega < \omega_p \Rightarrow \tilde{n} = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{-1\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2}} = i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2}} = i\sqrt{C(\omega)}$$

$$R = \left|\frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1}\right|^2 = \left|\frac{i\sqrt{C(\omega)} - 1}{i\sqrt{C(\omega)} + 1}\right|^2 = \frac{C(\omega) + 1}{C(\omega) + 1} = 1$$

Odbicie metaliczne!

$$\omega > \omega_p \Rightarrow \tilde{n} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

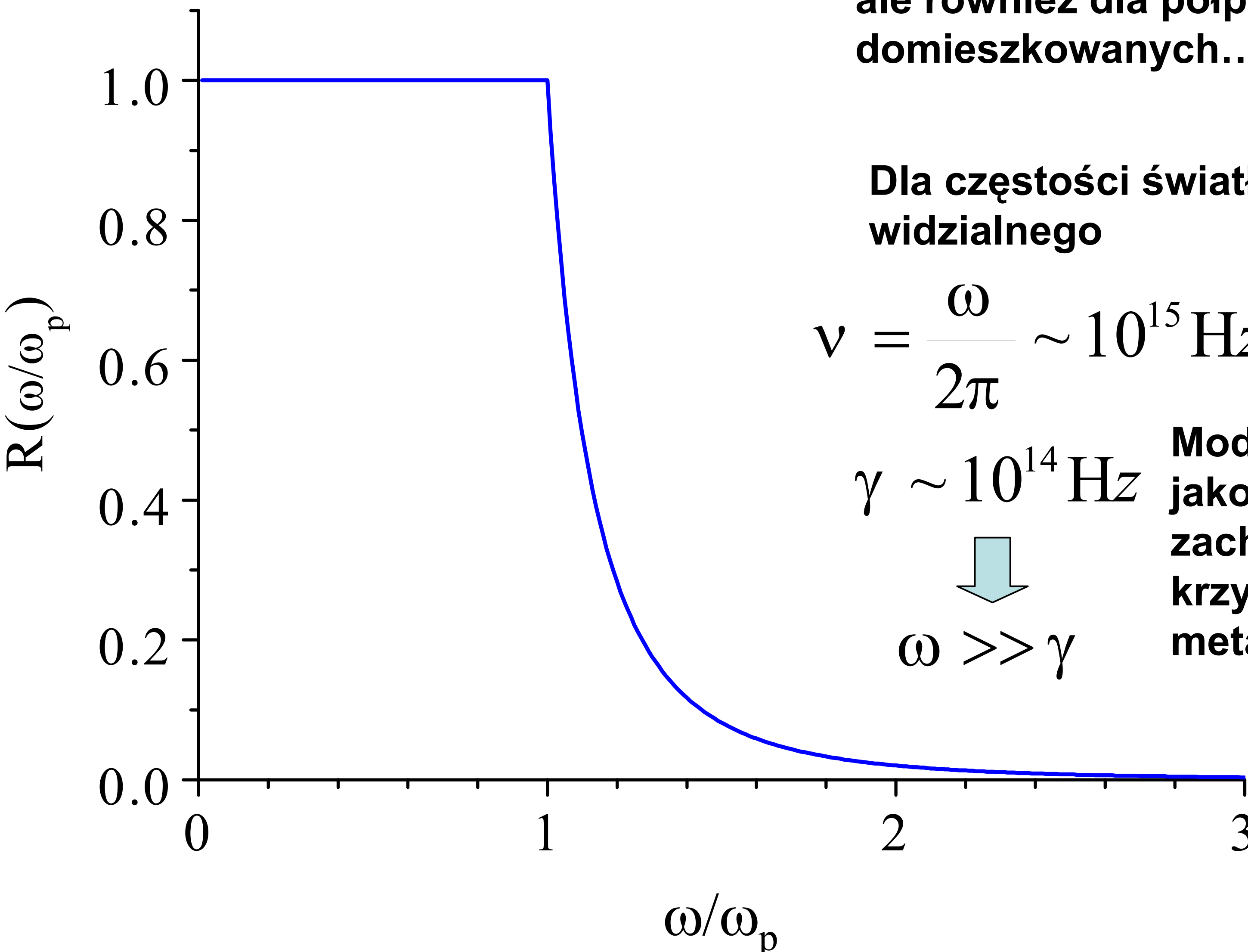
Odbicie częściowe

$$R = \left|\frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1}\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1}\right|^2$$

$$\omega \to \infty, R \to 0$$

$$\omega = \omega_p, R = 1$$

Typowe odbicie plazmowe występuje nie tylko dla metali, ale również dla półprzewodników domieszkowanych…



Dla częstości światła z obszaru widzialnego

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \sim 10^{15}\,\mathrm{Hz}$$

$$\gamma \sim 10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

$$\omega >> \gamma$$

Model Drudego jakościowo opisuje zachowanie krzywej odbicia metali.

Nie zawsze jednak taka prosta teoria działa…

Jak uwzględnić tłumienie?

Równanie ruchu elektronu w polu można zapisać jeszcze inaczej:

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} + m_0\gamma \frac{dx}{dt} = -eE(t) \qquad \gamma = \frac{1}{\tau}$$

τ **- czas rozproszenia pędowego**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \gamma\vec{p} = -e\vec{E}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} - e\vec{E}(t)$$

Skoro zewnętrzne pole elektryczne oscyluje periodycznie,

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

To spodziewamy się również periodycznego zachowania prędkości:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}(t) = \frac{-e\tau}{m_0}\frac{1}{(1-i\omega\tau)}\vec{E}(t)$$

Gęstość prądu jest związana z prędkością nośników

$$\vec{j}(t) = -Ne\vec{\upsilon} = \sigma\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}}$$

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_0}$$

- przewodnictwo stałoprądowe

$$\frac{\sigma_0}{\tau} = \frac{Ne^2}{m_0} \qquad \varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0}\frac{1}{(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \tau}\frac{1}{(\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})} = 1 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\omega}\frac{1}{(\tau\omega + i)}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau\omega = i\frac{\sigma_0 - \sigma(\omega)}{\sigma(\omega)}$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\omega}\frac{1}{(i\frac{\sigma_0 - \sigma(\omega)}{\sigma(\omega)} + i)} = 1 + i\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + i\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}$$

Pomiary optyczne $\varepsilon_r(\omega)$

są równoważne pomiarowi przewodnictwa zmiennoprądowego!

Rozważmy sytuację niskich częstości $\omega\tau \ll 1$

Składowe zespolonej funkcji dielektrycznej

$$\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

będą miały postać:

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

$$\omega\tau \ll 1 \Rightarrow \varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$$

$$\Downarrow$$

$$n \approx \kappa = \sqrt{\varepsilon_2 / 2}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2\kappa\omega}{c} = \sqrt{\frac{2\omega_p^2 \tau\omega}{c^2}} = \sqrt{2\sigma_0 \omega \mu_0}}$$

$$\omega_p^2 \tau = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

Współczynnik absorpcji jest proporcjonalny do pierwiastka z stałoprądowego przewodnictwa i częstości…

Efekt naskórkowy

$$E(z) = E_0 \exp(-z/\delta)$$

$$\Downarrow$$

$$I(z) = I_0 \exp(-2z/\delta)$$

$$\alpha = \sqrt{2\sigma_0 \omega \mu_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta = \frac{2}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sigma_0 \omega \mu_0}}$$

Dla miedzi

przy f=50Hz $\delta \cong$ 9mm
przy f=100MHz $\delta \cong$ 6.2μm

Związek pomiędzy funkcją dielektryczną i przewodnictwem gazu elektronowego

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + i\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}$$

Czy powinno to nas dziwić?

W poprzednim semestrze własności gazu elektronowego dyskutowane były w oparciu o równanie Boltzmanna.
Pozwala ono śledzenie w jaki sposób rozkład nośników, w równowadze termodynamicznej zmienia się pod wpływem sił zewnętrznych oraz w wyniku rozpraszania elektronów...

$$f_0(E(\vec{k})) = \frac{1}{1+\exp\left(\frac{E(\vec{k})-E_F}{kT}\right)}$$

-rozkład równowagowy nie zależy położenia

$$f(\vec{r},\vec{k},t)$$

- rozkład nośników opisujący lokalną równowagę dla obszarów dużych w porównaniu z wymiarami atomów (odległościami atomowymi)

Rozważmy zmianę funkcji w czasie od *t-dt* do *t* . Po przyłożeniu zewnętrznego pola elektrycznego E, elektron który znajduje się w punkcie $\vec{r}$ i ma wektor falowy $\vec{k}$, miał w chwili *t-dt* współrzędne

$$\vec{r} - \upsilon(\vec{k})dt \qquad \vec{k} - (-e)\vec{E}\frac{dt}{\hbar}$$

Bez rozpraszania:

$$f(\vec{r},\vec{k},t) = f(\vec{r} - \upsilon(\vec{k})dt, \vec{k} + e\vec{E}\frac{dt}{\hbar}, t - dt)$$

Jeśli przez $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s$ **wyrazimy zmianę funkcji** ***f*** **wywołaną rozpraszaniem, to**

$$f(\vec{r},\vec{k},t) = f(\vec{r} - \upsilon(\vec{k})dt, \vec{k} + e\vec{E}\frac{dt}{\hbar}, t - dt) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s dt$$

Po rozwinięciu równania do członów liniowych względem *dt*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \upsilon\nabla_{\vec{r}} f - \frac{e}{\hbar}\vec{E}\nabla_{\vec{k}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s$$

W przybliżeniu czasu relaksacji zakładamy, że

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s = -\frac{f_1}{\tau} \qquad f_1 = f - f_0$$

Odstępstwo od stanu równowagowego

Jezeli zaburzenie ma charakter okresowy,
np. jest to fala elektromagnetyczna o czestosci ω to

$$f_1 = f_1^{(0)} e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f_1$$

$$\Downarrow$$

$$-i\omega_1 f_1 + \vec{\upsilon}\nabla_{\vec{r}} f - \frac{e}{\hbar}\vec{E}\nabla_{\vec{k}} f = -\frac{f}{\tau_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\upsilon}\nabla_{\vec{r}} f - \frac{e}{\hbar}\vec{E}\nabla_{\vec{k}} f = -\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) f_1$$

Żeby wykorzystać wyniki dla równania Boltzmanna opisującego sytuację stacjonarną w czasie musimy dokonać zamiany:

$$\frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}$$

W półprzewodnikach $\tau \sim 10^{-9} \div 10^{-11} s$

zatem czlon urojony (przesuniety w fazie) nalezy uwzgledniac dla $\omega \sim 10^{9} \div 10^{11} s$, czyli dla mikrofal.

Przewodnictwo, zalezne od ω bedzie zespolone:

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_0} \Rightarrow \sigma^* = \frac{N_e e^2 \dfrac{\tau}{1 - i\omega\tau}}{m_0}$$

$$\sigma^* = \sigma_1 + i\sigma_2 = \frac{N_e e^2}{m_0} \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2} + i\omega \frac{N_e e^2}{m_0} \frac{\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$\vec{j} = \sigma^* \vec{E} = (\sigma_1 + i\sigma_2)\vec{E} e^{-i\omega t} = \underbrace{\sigma_1 \vec{E} e^{-i\omega t}}_{\text{prąd przewodnictwa}} + \underbrace{\sigma_2 \vec{E} e^{-i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}}_{\text{prąd przesunięcia}}$$

Pojawia sie przesuniecie fazowe miedzy polem elektrycznym a pradem.
Pradowi przesuniecia nie towarzysza procesy dyssypacji energii.