Zadania domowe do wykładu: Matematyka I

seria 5 — styczeń 2010

1. Stosując wybrane przez siebie kryterium zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2n+5} - 2\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}\right)$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\sqrt[3]{n^4-n+1}}{n^2+4\sqrt[3]{n^7+2n}}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1}\right)$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} f(n)$, gdzie $f(n)$ jest funkcją ograniczoną w $\mathbb{R}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, gdzie $a > 0$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+e)^n n!}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)!)^n}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}$, j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{\pi}{2} n$,

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}$, gdzie $a > 0$.

2. Posługując się warunkiem koniecznym zbieżności szeregu pokazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{(-1)^n n}$, c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \cos\left(\sin \frac{1}{n}\right)$, d) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$.

3. Stosując kryterium porównawcze, zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log(1 + \frac{1}{n})$, c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-1/n}$, d) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$,

e) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin \frac{1}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, f) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{tg} \frac{\pi}{4^n}$, g) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{tgh}^2 \frac{1}{n}$, h) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\log \frac{n^3+1}{n^3}}$,

i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sin x^n}{n^2}$, j) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right)$.

4. Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$, b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, d) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}$,

e) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x \,\mathrm{arctg}(n^2+1))^n$, $x \in \mathbb{R}_+$, f) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$, g) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\log^n(n+1)}$,

h) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

5. Stosując kryterium zagęszczeniowe zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+s} n}$, $s \in \mathbb{R}$, b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^s}$, $s \in \mathbb{R}$, c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log^2(n+1)}$.

6. Zbadać zbieżność następujących szeregów naprzemiennych:

a) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)$, b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\log^{100} n}{n} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$, c) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$,
d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}$, e) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos \pi n^2$, f) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

7. Zbadać zbieżność szeregów w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ ($q \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$):

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1})^p$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{n^p}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n}$,
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^p}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin \frac{1}{n}$.

8. Znaleźć obszary zbieżności szeregów:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^{2n+1}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} (3x-4)^{2n+1}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^{3n}}{n^2+1}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$.