Zadanie 1. Niech $z = (z_1, z_2, z_3),\ z' = (z_1', z_2', z_3') \in \mathbb{C}^3$. Sprawdź czy następujące odwzorowania: $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ postaci:

$$\text{a).}\ (z|z') = \sum_{n=1}^{3} \bar{z}_i z_i' \qquad \text{b).}\ (z|z') = \sum_{n=1}^{3} \Re(\bar{z}_i z_i') \qquad \text{c).}\ (z|z') = \sum_{n=1}^{3} \Im(\bar{z}_i z_i')$$

są iloczynami skalarnymi. Oblicz moduł wektorów $x = (1, i, -1)$ oraz $y = (1, 0, -1)$ względem poprzednio znalezionych iloczynów skalarnych.

Zadanie 2. Stosując procedurę ortonormalizacji Grama-Schmidta znaleźć bazę ortonormalną w następującej podprzestrzeni $\mathbb{R}^4$ z kanonicznym iloczynem skalarnym:

$$\text{a).}\, \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{b).}\, \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Zadanie 3. Wyznacz rzut prostopadły wektora $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

na podprzestrzeń $W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Zadanie 4. Wyznacz wartości i wektory własne macierzy:

$$\text{a).}\ \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b).}\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c).}\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5. Oblicz wartości funkcji od macierzy $f(M)$ dla:

$$\begin{aligned} &\text{a). } f(x) = \sqrt{x}, M = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}; \\ &\text{b). } f(x) = x^n, M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{dla dowolnego } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$