Zadania domowe - seria II

Zadanie 1. Dany jest następujący układ równań (*Kostrykin cz. 1, Zadanie 4.1.1.*):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = 5. \end{cases}$$

Jakie ma rozwiązania nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$?

Zadanie 2. Przemnóż macierze:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$, wynik wyraź w $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$
- $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 11 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. Które z elementów (*Zadanie z https://www.impan.pl/ pmh/teach/algebra/exercises/ex10.pdf*):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^5$$

należą do przestrzeni wektorowej $V \subset \mathbb{Q}^5$ opisanej równaniami:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 & = 0 \end{cases}$$

Czy można z nich utworzyć bazę V?

Zadanie 4. Rozważmy $V := (\mathbb{Z}_7)^3$, gdzie $\mathbb{Z}_7$ jest ciałem z mnożeniem i dodawaniem modulo 7: $x \oplus y = (x+y)_{\mathrm{mod}_7}$, $x \otimes y = (x \cdot y)_{\mathrm{mod}_7}$. V jest w oczywisty sposób przestrzenią wektorową nad $\mathbb{Z}_7$. Niech

$$U := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\right\} \subset V$$

Sprawdź, że $u = (1, 1, 6) \in U$. Wyznacz bazę U, której elementem jest u.

Zadanie 5. W zależności od $q \in \mathbb{R}$ zbadaj liniową niezależność zbioru:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2+q \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ -2-3q \\ 2 \\ 4-q \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^5$$