Rozdział 1. Przestrzenie wektorowe

Materiał tego rozdziału jest, z jednej strony, trudny, bo operuje pojęciami abstrakcyjnymi, a zdrugiej strony łatwy, nie zawiera w sobie istotnych problemów technicznych, rachunkowych. Wystarczy „tylko" oswoić się z masą noowych pojęć.

Potrzeba pojęć abstrakcyjnych powstaje, gdy chcemy jednym językiem mówić o rzeczach formalnie podobnych, a pojęciowo (na przykład w sensie fizyki) od siebie odległych.

Pojęcie przestrzeni wektorowej ma łączyć w sobie istotne cechy takich zbiorów jak:

(A) Niech A będzie punktem naszej przestrzeni fizycznej M. Rozpatrzmy zbiór V_A wszystkich prędkości w punkcie A wszystkich możliwych ruchów puktów materialnych. Wiedza szkolna podpowiada, że prędkości można dodawać i mnożyć przez liczbę. Na przykład, jeżeli ruch

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto p(t) \in M, \quad p(0) = A$$

ma prędkość v w chwili 0, to prędkość $2v$ ma ruch

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto p(2t) \in M.$$

(B) Niech teraz q będzie punktem jakiegoś ciła (na przykład sztywnego). Siły, które przykładamy do ciała w punkcie q możemy (przynajmniej teoretycznie) dodawać i mnożyć przez liczbę.

(C) Weźmy teraz punkt a na płaszczyźnie (znanej ze szkoły). Strzałki wychodzące z punktu a możemy dodawać metodą trójkąta, możemy też je wydłużać, skracać, odwracać (czytaj: mnożyć przez liczbę).

(D) Teraz przykład formalny: weźmy zbiór $\mathbb{R}^3$ wszystkich trójek liczb rzeczywistych (x, y, z). Dodawanie i mnożenie przez liczbę możemy określić wzorami:

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'), \qquad a(x, y, z) = (ax, ay, az).$$

(E) Tak jak w poprzednim przykładzie, ale w $\mathbb{R}^n$, czyli w zbiorze n-elementowych ciągów liczbowych:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

i mnożenie

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

Wszystkie pczytoczone wyżej przykłady mają wspólną cechę: mówią o zbiorach, w których mamy określone działania dodawania i mnożenia przez liczbę. Działania te są przemienne, łączne, a mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Inaczej mówią, są to przykłady sytuacji, o których mówi poniższa definicja.

1.1. Definicja przestrzeni wektorowej.

Boiskiem dla przestrzeni wektorowej jest zbiór, w którym możemy dodawać i mnożyć przez liczbę.

DEFINICJA 1.1. *Przestrzenią wektorową* (nad liczbami rzeczywistymi) nazywamy zbiór V z działaniem (dodawania)

$$+ \colon V \times V \longrightarrow V \colon (v, w) \mapsto v + w$$

i z mnożeniem przez liczbę (rzeczywistą)

$$\mathbb{R} \times V \to V \colon (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v,$$

mającymi następujące własności dla wszystkich $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v, w, u \in V$:

(1) $v + w = w + v$ (przemienność dodawania),
(2) $v + (w + u) = (v + w) + u$ (łączność dodawania),
(3) istnieje (jedno) „zero" $\mathbf{0} \in V$ dla dodawania: $\mathbf{0} + v = v$,
(4) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
(5) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$,
(6) $1 \cdot v = v$,
(7) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$.

Elementy przestrzeni wektorowej nazywać będziemy *wektorami*(!). Będziemy też pisać po prostu λv zamiast $\lambda \cdot v$. A oto proste fakty wynikające bezpośrednio z powyższej definicji:

STWIERDZENIE 1.2. *Dla każdego wektora $v \in V$ i każdej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$*

(1) $0v = \mathbf{0}$,
(2) $(-1)v = -v$, *to znaczy* $v + (-1)v = \mathbf{0}$,
(3) $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
(4) *jeżeli* $\lambda v = \mathbf{0}$ *to* $\lambda = 0$ *lub* $v = \mathbf{0}$.

Dowód: Niech $v \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) Mamy $v = (1 + 0)v = 1v + 0v = v + 0v$ i stąd $\mathbf{0} = 0v$.
(2) Z powyższego i z punktu czwartego pierwszego definicji $v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = \mathbf{0}$, czyli $-v = (-1) \cdot v$
(3) Z punktu szóstego definicji $\lambda v = \lambda(v + \mathbf{0}) = \lambda v + \lambda\mathbf{0}$ i stąd $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
(4) Jeżeli $\lambda v = \mathbf{0}$ i $\lambda \neq 0$, to $v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \mathbf{0}$.

■

1.1.1. Dalsze przykłady.

(F) Niech X będzie dowolnym zbiorem. Symbolem $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ oznaczamy zbiór wszystkich odwzorowań ze zbioru X w zbiór liczb $\mathbb{R}$. W zbiorze tym określamy działania:
$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$
oraz
$$(\lambda f)(a) = \lambda f(a).$$
W przypadku $X = \mathbb{R}$ rozpoznajemy tu znane mnożenie i dodawanie funkcji. Zbiór $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią wektorową. W szczególnosci, biorąc $A = I_3 = \{1, 2, 3\}$, dostaniemy przykład D ($x = f(1), y = f(2), z = f(3)$), a biorąc $A = I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ dostajemy przykład E.

DEFINICJA 1.3. Niepusty podzbiór S przestrzeni wektorowej V nazywamy *podprzestrzenią wektorową* przestrzeni V, jeżeli S z działaniami indukowanymi z V jest przestrzenią wektorową.

STWIERDZENIE 1.4. *S jest podprzestrzenią wektorową wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $v_1, v_2, \in S$ mamy*
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in S$$

Dowód: Jedyną rzeczą do sprawdzenia jest (oczywista) wykonalność działań dodawania wektorów i mnożenia ich przez liczbę. Pozostałe własności działań spełnione są automatycznie. ■

Ciąg dalszy przykładów:

(G) Funkcje wielomianowe na $\mathbb{R}$ tworzą podprzestrzeń wektorową przestrzeni wszystkich funkcji na $\mathbb{R}$. Również przestrzeń $\mathbb{W}_n$ wielomianów stopnia $\leqslant n$ jest przestrzenią wektorową, podprzestrzenią przestrzeni wszystkich wielomianów (funkcji wielomianowych).
(H) Inne podprzestrzenie przestrzeni $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: wielomianów parzystych, funkcji ciągłych, funkcji różniczkowalnych, etc.

DEFINICJA 1.5. Niech V będzie przestrzenią wektorową i niech będzie dany ciąg wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Wektor przestrzeni V postaci
$$\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2 + \cdots + \lambda^n v_n,$$
gdzie $\lambda^i \in \mathbb{K}$, nazywamy kombinacją liniową wektorów $v_1, \ldots, v_2$.

Niech teraz S będzie dowolnym, ale niepustym podzbiorem przestrzeni V. Zbiór kombinacji liniowych wektorów z S oznaczać będziemy $\langle S \rangle$.

STWIERDZENIE 1.6. *$\langle S\rangle$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V.*

DOWÓD: Niech $v, w \in \langle S\rangle$, tzn. $v = \lambda^1 v_1 + ... + \lambda^n v_n$ i $w = \mu^1 w_1 + .. + \mu^n w_n$ gdzie v_i, $w_i \in S$ i $\lambda^i, \mu^i \in \mathbb{K}$. Dla dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mamy

$$\lambda v + \mu w = (\lambda\lambda^1)v_1 + \cdots + (\lambda\lambda^n)v_n + (\mu\mu_1)w_1 + \cdots + (\mu\mu^m)w_m \in S$$

■

Uwagi:
a) Jeżeli $V \supset W \supset S$ i W jest podprzestrzenią wektorową to $\langle S\rangle \subset W$.
b) $\langle S\rangle$ jest najmniejszą podprzestrzenią wektorową zawierającą S.

Przykład: $S = \{1, x, x + x^2, x\}$. $\langle S\rangle = \mathbb{W}_2$.
Inne przykłady będą podane później.

1.2. Liniowa niezależność. Baza.

DEFINICJA 1.7. *Przestrzeń wektorową V nazywamy* skończenie wymiarową, *jeżeli istnieje skończony zbiór wektorów $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$ taki, że $\langle S\rangle = V$.*

Przykłady:

(1) $V = \mathbb{K}^n$ i $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ gdzie $e_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni})$.
(2) Przestrzeń wielomianów stopnia $\leqslant 2$ i $S = \{1, x, x^2\}$
(3) Przestrzeń funkcji $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nie jest skończenie wymiarowa (jest nieskończenie wymiarowa). Również przestrzeń wektorowa wszystkich wielomianów nie jest wymiaru skończonego.

DEFINICJA 1.8. *Układ wektorów (ciąg wektorów - jeśli uporządkowany)*

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}, v_i \in V,$$

nazywamy linowo niezależnym*, jeżeli zachodzi z równości*

$$\lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^k v_k = \mathbf{0}$$

wynika, że liczby λ_i są równe zero:

$$\lambda^1 = \lambda^2 = \cdots = \lambda^k = 0.$$

Jeżeli układ wektorów nie jest liniowo niezależny, to mówimy, że jest liniowo zależny.

Przykłady:

(1) Wielomiany $\{1, t, t^3\}$ sa liniowo niezależne.
(2) Wektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ w $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne.
(3) Wielomiany $\{1 + t, t - t^2, 1 + t^2\}$ sa liniowo zależne:

$$(-1) \cdot (1 + t) + (t - t^2) + (1 + t^2) = 0.$$

(4) Dowolny układ zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny. Kombinacja z zerowymi współczynnikami przy wektorach niezerowych i jedynką przy zerze daje wektor zerowy.
(5) Jeżeli $v \neq \mathbf{0}$ to układ $\{v\}$ składający się z jednego wektora jest liniowo niezależny.

DEFINICJA 1.9. *Mówimy, że wektor v jest* liniowo zależny *od układu wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k$, jeżeli istnieją liczby $\lambda^1, \ldots, \lambda^k$ takie, że*

$$v = \lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^k v_k$$

lub, równoważnie,

$$v \in \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\rangle,$$

lub, równoważnie,

$$\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\rangle = \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v\}\rangle.$$

Poniższe stwierdzenie nie wymaga dowodu.

STWIERDZENIE 1.10. *Niech $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ będzie skończonym układem wektorów z przestrzeni wektorowej V. Wówczas*

(1) *Jeśli $S_0 \subset S$ i S_0 jest liniowo zależny, to S też jest liniowo zależny.*
(2) *Jeśli $S_0 \subset S$ i S jest liniowo niezależny, to S_0 też jest liniowo niezależny.*
(3) *Jeśli $\mathbf{0} \in S$, to S jest liniowo zależny*
(4) *S jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego i wektor v_i jest kombinacją liniową pozostałych wektorów z S.*

DEFINICJA 1.11. *Ciąg $(v_1, \ldots, v_k)$ wektorów z V nazywamy bazą, jezeli każdy wektor $v \in V$ da się przedstawić jednoznacznie jako ich kombinacja liniowa:*

$$v = \lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^n v_n$$

Przykład:

Niech

$$\begin{aligned} e_1 =& (1,0,0,\dots,0)\\ e_2 =& (0,1,0,\dots,0)\\ &\vdots\\ e_i =& (\delta_{1i},\dots,\delta_{ni})\\ &\vdots\\ e_n =& (0,0,0,\dots,n) \end{aligned}$$

Ciąg $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ jest bazą w $\mathbb{R}^n$.

STWIERDZENIE 1.12. *Zbiór $\{v_1, \dots, v_k\}$ jest bazą jeżeli jest liniowo niezależny i $\langle\{v_1, \dots, v_k\}\rangle = V$*

Dowód: Niech $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ bedzie bazą przestrzeni V. Wektory bazy rozpinają całą przestrzeń, więc sprawdzamy, czy jest liniowo niezależny. Niech teraz

$$0 = \lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^n v_n = \mu^1 v_1 + \cdots + \mu^n v_n,$$

ale

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n = \mathbf{0}.$$

Z jednoznaczności rozkładu wektora zerowego mamy

$$\lambda^1 = 0, \dots, \lambda^n = 0.$$

■

Warto tu zwrócić uwagę na to, że baza jest maksymalnym układem liniowo niezależnym, tzn. dołożnie choć jednego wektora robi z niego układ liniowo zależny.

TWIERDZENIE 1.13. *Jeśli przestrzeń wektorowa V posiada bazę n-elementową i $S = \{w_1, \dots, w_k\}$, przy czym $k > n$, to układ wektorów S jest liniowo zależny.*

Wnioski:

(1) Jeżeli $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą i układ wektorów $\{w_1, \dots, w_k\}$ jest liniowo niezależny, to $k \leqslant n$.
(2) Jeżeli $(v_1, \dots, v_n)$ i $(w_1, \dots, w_m)$ są bazami w V, to $m = n$.

TWIERDZENIE 1.14. *Każda, różna od zera (tzn zawierająca co najmniej jeden wektor niezerowy) przestrzeń skończenie wymiarową posiada bazę. Dla ustalonej przestrzeni wektorowej V liczba elementów bazy jest taka sama dla każdej bazy.*

DEFINICJA 1.15. Liczbę wektorów bazy przestrzeni wektorowej V oznaczamy $\dim V$ i nazywamy *wymiarem* przestrzeni V.

Przykłady:

(1) $\dim \mathbb{R}^n = n$. Jako bazę możemy wybrać układ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ (przykład po Definicji 1.11).
(2) Przestrzeń $\mathbb{W}_3$ wielomianów stopnia $\leqslant 3$ jest wymiaru 4. Przykładowa baza:

$$(1, t, t^2, t^3).$$

(3) Przestrzeń V jest przestrzenią wielomianów stopnia $\leqslant 3$ i takich, że 1 jest ich pierwiastkiem. Jako bazę możemy wybrać wielomiany $t-1, t(t-1), t^2(t-1)$.

Warto tu mieć na uwadze następujący, pożyteczny fakt:

TWIERDZENIE 1.16. *Dowolny ciąg wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni V da się uzupełnić do bazy tej przestrzeni.*

1.2.1. Dalsze przykłady przestrzeni wektorowych.

(I) Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi. Iloczyn kartezjański $V \times W$ z działaniami:
   a) $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$
   b) $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$
   jest też przestrzenią wektorową. Nazywamy ją *iloczynem kartezjańskim przestrzeni wektorowych* V i W.

Jeśli układ $(v_1, \cdots, v_n)$ jest bazą V i układ $(w_1, \cdots, w_m)$ jest bazą W, to układ $n + m$ wektorów

$$((v_1, \mathbf{0}), \cdots, (v_n, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, w_1), \cdots, (\mathbf{0}, w_m))$$

tworzy bazę $V \times W$.

Stąd mamy

STWIERDZENIE 1.17. $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$

Niech V będzie przestrzenią wektorową i niech $W_1, W_2 \subset V$ będą jej podprzestrzeniami. Wówczas

(J) $W_1 \cap W_2$ jest podprzestrzenią wektorową
(K) Zbiór $W_1 \cup W_2$ nie jest w ogólności przestrzenią wektorową. (Jeżeli jest, to $W_1 \subset W_2$ lub $W_2 \subset W_1$.) *Sumą algebraiczną* podprzestrzeni W_1 i W_2 nazywamy podprzestrzeń $\langle W_1 \cup W_2 \rangle$ i oznaczamy ją $W_1 + W_2$. Jest to najmniejsza podprzestrzeń zawierająca W_1 i W_2.

Uwaga. Reprezentacja wektora $v \in W_1 + W_2$ jako sumy $v = w_1 + w_2$, gdzie $w_1 \in W_1$ a $w_2 \in W_2$, nie jest na ogół jednoznaczna np. dla $W_1 = W_2 = W$ mamy $W_1 + W_2 = W$ i $w = \mathbf{0} + w = w + \mathbf{0}$.

TWIERDZENIE 1.18.
Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$, a W_1 i W_2 jej podprzestrzeniami. Poniższe warunki są równoważne:

a) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$,
b) *dla każdego* $v \in W = W_1 + W_2$ *istnieją jednoznacznie określone wektory* $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ *takie, że* $v = w_1 + w_2$,
c) *zachodzi wynikanie:*
jeśli $w_1 + w_2 = \mathbf{0}$ *gdzie* $w_1 \in W_1$ *i* $w_2 \in W_2$, *to* $w_1 = w_2 = \mathbf{0}$.

DOWÓD:
$a \Rightarrow b$ Niech $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$. Stąd $(w_1 - w_1') = (w_2' - w_2) = \mathbf{0}$, czyli $w_1 = w_1'$ i $w_2 = w_2'$, gdzie $(w_1 - w_1') \in W_1$ a $(w_2') \in W_2$.
$b \Rightarrow c$ Niech $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} = w_1 + w_2$. Stąd $w_1 = \mathbf{0}$ i $w_2 = \mathbf{0}$.
$c \Rightarrow a$ Niech $w \in W_1 \cap W_2$. Kładć $w_1 = w \in W_1$ i $w_2 = -w \in W_2$ dostajemy $w_1 + w_2 = \mathbf{0}$. Z jednoznaczności rozkładu $w_1 = w_2 = \mathbf{0}$, czyli $w = \mathbf{0}$. ■

Jeżeli spełnione są warunki o których mówi twierdzenie, wprowadzamy oznaczenie $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ i mówimy, że mamy *sumę prostą* podprzestrzeni W_1 i W_2.
Na zakończenie tej części ważne twierdzenie.

TWIERDZENIE 1.19. $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

Rozdział 2. Odwzorowania liniowe

BOISKO: dwie przestrzenie wektorowe

2.1. Definicja i postawowe własności.

DEFINICJA 2.1. *Niech* V, W *będą przestrzeniami wektorowymi. Odwzorowanie* $F\colon V \to W$ *nazywamy* liniowym, *jeżeli* $\forall v_1, v_2 \in V$ *i* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$,

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2).$$

Równoważnie, odwzorowanie jest liniowe, jeżeli spełnione są dwa warunki:

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) \ \text{ i } \ F(\lambda v) = \lambda F(v).$$

Inaczej mówiąc: najpierw wykonać działania, a wynik „przetransportować" przy pomocy F to to samo, co najpierw przetransportować składniki działania, a potem je „złożyć".

Z definicji odwzorowania liniowego wynika natychmiast, że

$$F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Istotnie, $F(\mathbf{0}) = F(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Przykłady.

(1) $V = \mathcal{C}([-1,1])$ - przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku $[-1,1]$ i $W = \mathbb{R}^1$. Definiujemy odwzorowanie $F\colon V \to W$ wzorem $F(f) = f(0)$. Liniowość F jest oczywista.

(2) $V = \mathcal{C}^1(]a,b[)$ (przestrzeń funkcji różniczkowalnych na odcinku $]a,b[$), $W = \mathcal{C}(\mathbb{R}^1)$ i $F(f) = f'$ (pochodna funkcji f).

(3) Znów $V = \mathcal{C}([-1,1])$ i $W = \mathbb{R}^1$. Tym razem

$$F(f) = \int_{[-1,1]} f.$$

(4) $V = W = \mathbb{R}^1$. Które z odwzorowań:

$$F_1(x) = x^2, \ F_2(x) = x + 1, \ F_3(x) = 4x$$

jest liniowe?

Odwzorowania liniowe z V do W można dodawać i mnożyć przez liczby w/g poniższego przepisu

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v), \quad (\lambda F)(v) = \lambda(F(v)).$$

Pokażemy, że tak otrzymane odzorowania też są liniowe. Inaczej mówiąc, tworzą one przestrzeń wektorową.

STWIERDZENIE 2.2. *Niech* F, $G: V \to W$ *będą odwzorowaniami liniowymi i niech* $\lambda \in K$. *Wówczas*

(1) $F + G$ *jest odwzorowaniem liniowym,*
(2) λF *jest odwzorowaniem liniowym.*

DOWÓD: Zgodnie z definicją działań w Map(V, W)

$$\begin{aligned}(F+G)(v_1+v_2) &= F(v_1+v_2)+G(v_1+v_2)\\ &= F(v_1)+F(v_2)+G(v_1)+G(v_2)\\ &= (F+G)(v_1)+(F+G)(v_2).\end{aligned}$$

Podobnie

$$(F+G)(\mu v) = F(\mu v)+G(\mu v) = \mu F(v)+\mu G(v) = \mu(F+G)(v).$$

Zatem $F + G$ jest odwzorowaniem liniowym. Tak samo pokazujemy, że λF jest liniowe. ■

Wniosek: Wszystkie odwzorowania liniowe z V do W tworzą przestrzeń wektorową; oznaczana bywa $\mathsf{L}(V, W)$.

STWIERDZENIE 2.3.
Niech V, W, U *będą przestrzeniami wektorowymi. Jeżeli* $F: V \to W$ *oraz* $G: W \to U$ *są odwzorowaniami liniowymi, to złożenie* $G \circ F: V \to U$ *jest też odwzorowaniem liniowym.*

DOWÓD: Mamy

$$\begin{aligned}G\circ F(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2) &= G(F(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2))\\ &= G(\lambda_1 F(v_1)+\lambda_2 F(v_2))\\ &= \lambda_1 G(F(v_1))+\lambda_2 G(F(v_2))\\ &= \lambda_1 G\circ F(v_1)+\lambda_2 G\circ F(v_2)\end{aligned}$$

■

Uwaga: Niech $F: V \to \mathbb{K}^n$ będzie jakimś odwzorowaniem. Ponieważ odwzorowania

$$\pi^i: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^1: (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

są liniowe to, jak łatwo zauważyć, F jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego i złożenie $\pi^i \circ F$ jest odwzorowaniem liniowym.

STWIERDZENIE 2.4. *Odwzorowanie liniowe* F *jest wyznaczone jednoznacznie przez jego wartości na wektorach bazy.*

DOWÓD: Niech $(e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą V i niech $v \in V$. Wówczas $v = \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n$ i, z liniowości F, mamy $F(v) = \lambda^1 F(e_1) + \dots + \lambda^n F(e_n)$. ■

Mówiąc w skrócie, odwzorowania liniowe są to odwzorowania „respektujące" strukturę przestrzeni wektorowej. No i wszelkie jej przejawy. W szczególności, obraz podprzestrzeni wektorowej jest podprzestrzeni wektorowej jest podprzestrzenią wektorową:

STWIERDZENIE 2.5. *Jeżeli $F: V \to W$ i $V_1 \subset V$ jest podprzestrzenią wektorową, to $F(V_1)$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni W i* $\dim F(V_1) \leqslant \dim V_1$.

DOWÓD: To że $F(V_1)$ jest podprzestrzenią wektorową wynika natychmiast z liniowości F. Jeżeli $(e_1, \dots, e_{n_1})$ jest bazą V_1, podprzestrzeń $F(V_1)$ jest rozpięta na wektorach $F(e_1), \dots, F(e_{n_1})$. ■

STWIERDZENIE 2.6. *Jeżeli $F \in \mathsf{L}(V, W)$ i jest bijekcją (tzn. F^{-1} istnieje), to odwzorowanie odwrotne też jest liniowe: $F^{-1} \in \mathsf{L}(W, V)$.*

DOWÓD: Niech $w_1,\ w_2 \in W$. Istnieją $v_1,\ v_2$ takie, że $F(v_1) = w_1$ i $F(v_2) = w_2$. Wówczas

$$\begin{aligned} F^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) &= F^{-1}(\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2)) \\ &= F^{-1}(F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ &= \lambda_1 F^{-1}(w_1) + \lambda_2 F^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

■

Jeżeli $F \in \mathsf{L}(V, W)$ jest takie, że F^{-1} istnieje, to mówimy, że F jest *izomorfizmem przestrzeni wektorowych.*

Przykład

Jako V weźmy przestrzeń $\mathbb{W}_3$ wielomianów stopnia $\leqslant 3$. Odwzorowanie liniowe

$$F: \mathbb{W}_3 \to \mathbb{R}^4: a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4 \tag{2.1}$$

jest izomorfizmem.

2.2. Obraz i jądro odwzorowania liniowego.

Z odwzorowaniem liniowym wiążemy dwie podprzestrzenie: jedną w przestrzeni argumentów, a drugą w przestrzeni wartości. Tą drugą już poznaliśmy: jest to obraz odwzorowania $F(V)$. O drugiej mówi poniższe stwierdzenie.

STWIERDZENIE 2.7. *Jeżeli odwzorowanie $F: V \to W$ jest liniowe, to zbiory $F(V) \subset W$ i $F^{-1}(\mathbf{0}) \subset V$ są podprzestrzeniami wektorowymi.*

DOWÓD:

(1) Jeżeli $w_1, w_2 \in F(V)$ to istnieją wektory $v_1, v_2 \in V$ takie,że $w_1 = F(v_1)$ i $w_2 = F(v_2)$. Stąd $\lambda^1 w_1 + \lambda^2 w_2 = \lambda^1 F(v_1) + \lambda^2 F(v_2) = F(\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2)$, więc $\lambda^1 w_1 + \lambda^2 w_2 \in F(V)$.
(2) Jeżeli $F(v_1) = \mathbf{0}$ i $F(v_2) = \mathbf{0}$ to $F(\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2) = \lambda^1 F(v_1) + \lambda^2 F(v_2) = \mathbf{0}$.

■

Wniosek: Jeżeli $U \subset V$ jest podprzestrzenią wektorową i $F\colon V \to W$ jest liniowe, to $F(U) \subset W$ też jest podprzestrzenią wektorową.

Terminologia i oznaczenia:

Podprzestrzeń wektorową $F(V)$ przestrzeni W nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego F i oznaczamy $\operatorname{im} F$. Podprzestrzeń wektorową $F^{-1}(\mathbf{0})$ przestrzeni V nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego F i oznaczamy $\ker F$.

STWIERDZENIE 2.8. *Niech $F\colon V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas*

$$F(v_1) = F(v_2) \Longleftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker F.$$

Wnioski:

(1) F jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker F = \{\mathbf{0}\}$,
(2) F jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{im} F = W$ i $\ker F = \{\mathbf{0}\}$

A teraz ważne twierdzenie, przypominające nieco Twierdzenie 1.19

TWIERDZENIE 2.9. *Jeżeli $F \in \mathsf{L}(V, W)$ to*

$$\dim V = \dim(\ker F) + \dim(\operatorname{im} F). \tag{2.2}$$

Wnioski:

(1) $F \in \mathsf{L}(V, W)$ i F jest surjekcją, to $\dim V \geqslant \dim W$,
(2) $F \in \mathsf{L}(V, W)$ i F jest injekcją, to $\dim V \leqslant \dim W$,
(3) $\dim V > \dim W$, to $\ker F \neq \{\mathbf{0}\}$

2.3. Równania liniowe (teoria ogólna).

Równaniem liniowym nazywamy równanie postaci $F(x) = b$ gdzie $F \in \mathsf{L}(V, W)$, $b \in W$. Inaczej mówiąc, szukamy $x \in V$ takich, że $Fx = b$. Jeśli $b = \mathbf{0}$ to równanie nazywamy *jednorodnym* a jeśli $b \neq \mathbf{0}$ to równanie nazywamy *niejednorodnym.*

Fakty oczywiste:

(1) Aby zbiór rozwiązań równania $Fx = b$ był niepusty (inaczej mówiąc – aby istniało rozwiązanie równania $Fx = b$) potrzeba i wystarcza, by $b \in \operatorname{im} F$.
(2) Jeśli $b = \mathbf{0}$, to zbiór rozwiązań jest niepusty ($F\mathbf{0} = \mathbf{0}$).

(3) Jeśli $b = \mathbf{0}$, to zbiorem rozwiązań jest $\ker F$. W tym przypadku zbiór rozwiązań jest podprzestrzenią wektorową (dla $b \neq 0$, jak łatwo sprawdzić, nie jest).
(4) Jeśli x_1, x_2 są rozwiązaniami równania $Fx = b$, to $x_1 - x_2 \in \ker F$ czyli $x_1 - x_2$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego $Fx = \mathbf{0}$.
(5) Jeśli x_1 jest rozwiązaniem równania $Fx = b$ i $x_0 \in \ker F$, to $x_1 + x_0$ jest też rozwiązaniem równania $Fx = b$.
(6) Jeżeli F jest izomorfizmem, to dla każdego b istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania $Fx = b$. Równanie takie nazywa się układem Cramera.

Jeżeli w V mamy bazę $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, to punkt 1 równoważny jest

(1') $b \in \langle F(e_1), \dots, F(e_n) \rangle$, co z kolei jest równoważne
(1")
$$\langle F(e_1), \dots, F(e_n) \rangle = \langle F(e_1), \dots, F(e_n), b \rangle. \tag{2.3}$$

Jak opisać zbiór rozwiązań równania $Fx = b$?

Jeżeli $b = 0$ to wystarczy podać bazę podprzestrzeni $\ker F$. Nazywamy ją *fundamentalnym układem rozwiązań*. Jeżeli $b \neq 0$ to, jak wynika z punktu 5, należy podać jedno rozwiązanie (szczególne) równania $Fx = b$ i fundamentalny układ rozwiazań równania jednorodnego $Fx = \mathbf{0}$.

Innym sposobem opisu jest podanie jakiejś parametryzacji zbioru rozwiązań. Najlepiej korzystającej z odwzorowań liniowych i stałych.

Przykład. Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2\colon (x, y) \longmapsto (x + y, 2x + 2y)$ i niech $b = (2, 4)$
Rozwiązania można sparametryzować następująco: $\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto (\lambda + 1, 1 - \lambda)$.

Rozdział 3. Przestrzeń macierzy. Macierze odwzorowań liniowych

3.1. Definicja i podstawowe operacje.

DEFINICJA 3.1. Macierzą *o m wierszach, n kolumnach i o elementach ze zbioru X nazywamy odwzorowanie* $\{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\} \to X$.

Na macierz możemy patrzeć jak na „tabliczkę” o m wierszach i n kolumnach, złożoną z elementów ze zbioru X. Będziemy pisać

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & a^m{}_2 & \cdots & a^m{}_n \end{bmatrix} = [a^i{}_j]$$

Zbiór macierzy o m wierszach, n kolumnach i o elementach z X oznaczamy $\mathbf{M}^m{}_n(X)$.

W dalszym ciągu będziemy się zajmować macierzami, dla których $a^i{}_j \in \mathbb{R}$. Nazywać je będziemy macierzami liczbowymi.

W zbiorze $\mathbf{M}^m{}_n(\mathbb{R})$ określamy dodawanie i mnożenie przez liczbę:

$$[a^i{}_j] + [b^i{}_j] = [a^i{}_j + b^i{}_j]$$
$$\lambda[a^i{}_j] = [\lambda a^i{}_j]$$

Z tymi działaniami $\mathbf{M}^m{}_n(\mathbb{R})$ tworzy, co łatwo sprawdzić, przestrzeń wektorową (wymiaru nm).

Wprowadzimy operację na macierzach zwaną *transpozycją*, polegającą na zamianie rolami wierszy i kolumn:

$$^{\mathsf{T}}\colon \mathbf{M}^m{}_n(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}^n{}_m(\mathbb{K})\colon A \mapsto A^{\mathsf{T}}$$

zdefiniowaną następująco: jeśli $A = [a^i{}_j]$, to $A^{\mathsf{T}} = [b^i{}_j]$ gdzie $b^i{}_j = a^j{}_i$.

Transpozycja respektuje dodawanie macierzy:

$$(A + B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}},$$

a ponadto

$$(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A.$$

Każdy wiersz możemy uważać za macierz o jednym wierszu i n kolumnach, a każdą kolumn/e za macierz o jednej kolumnie i m wierszach. Przez $\bar{a}^i \in \mathbf{M}^1{}_n(\mathbb{K})$ oznaczać będziemy i-ty wiersz, a przez $\bar{a}_j \in \mathbf{M}^m{}_1(\mathbb{K})$ j-tą kolumnę macierzy $[a^i{}_j]$.

W dalszym ciągu będziemy (czasami) oznaczać macierz A jako wiersz kolumn

$$A = [\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]$$

lub jako kolumnę wierszy

$$A = \begin{bmatrix} \bar{a}^1 \\ \vdots \\ \bar{a}^m \end{bmatrix}.$$

DEFINICJA 3.2.
Rzędem wierszowym macierzy $A = [a^i{}_j]$ nazywamy liczbę $\dim\langle\{\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^m\}\rangle$, czyli wymiar podprzestrzeni przestrzeni $\mathbf{M}^1{}_n(\mathbb{R})$, rozpiętej na wierszach macierzy. Podobnie, *Rzędem kolumnowym* macierzy $A = [a^i{}_j]$ nazywamy $\dim\langle\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}\rangle$, czyli wymiar podprzestrzeni przestrzeni $\mathbf{M}^m{}_1(\mathbb{R})$, rozpiętej na kolumnach macierzy.

TWIERDZENIE 3.3. *Rząd wierszowy jest równy rzędowi kolumnowemu.*

DEFINICJA 3.4. Rząd wierszowy (lub kolumnowy) macierzy A nazywamy *rzędem* macierzy A i oznaczamy $\operatorname{rz} A$.

STWIERDZENIE 3.5.

(1) $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} A^{\mathsf{T}}$.
(2) *Jeżeli macierz B otrzymaliśmy z macierzy A przez dodanie do wiersza $\bar{a}^i$ kombinacji liniowej wierszy*

$$\bar{a}^1, \cdots, \bar{a}^{i-1}, \bar{a}^{i+1}, \cdots \bar{a}^m,$$

to $\operatorname{rz} B = \operatorname{rz} A$.
(3) *Jeżeli B otrzymaliśmy przez dodanie do ustalonej kolumny kombinacji liniowej pozostałych, to* $\operatorname{rz} B = \operatorname{rz} A$.
(4) *Jeżeli B otrzymaliśmy z A przez permutację kolumn (wierszy), to* $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} B$.

Zdefiniujemy teraz mnożenie macierzy. Dla każdych m, n, p jest to odwzorowanie $\mathbf{M}^n{}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{M}^m{}_p(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}^n{}_p(\mathbb{R})$ zdefiniowane przez

$$(A, B) = ([a^i{}_j], [b^i{}_j]) \longmapsto AB = [c^i{}_j], \quad c^i{}_j = \sum_{k=1}^{m} a^i{}_k b^k{}_j.$$

Mnożenie dwóch macierzy jest więc możliwe, jeżeli liczba kolumn pierwszego czynnika jest równa liczbie wierszy drugiego czynnika.

Uwagi:

(1) Mnożenie macierzy jest nieprzemienne, tzn., na ogół $AB \neq BA$. Znalezienie przykładu dla $m = n = 2$ zostawiamy jako ćwiczenie.
(2) Mnożenie macierzy jest łączne i rozdzielne względem dodawania.
(3) Mnożenie macierzy kwadratowych o wymiarach $n \times n$ posiada „jedynkę”. Jest to macierz $I = [\delta^i{}_j]$, gdzie $\delta^i{}_j = 0$ dla $i \neq j$ i $\delta^i{}_i = 1$ (jedynki na przekątnej, a poza tym zera).

(4) Jeżeli $A \in \mathbf{M}^n{}_n(\mathbb{K})$, to macierz $B \in \mathbf{M}^n{}_n(\mathbb{K})$ taką, że $BA = I$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy A i oznaczamy A^{-1}. Łatwo zauważyć (ćwiczenie!), że nie każda macierz (nawet różna od zera) ma macierz odwrotną.

Te i inne własności mnożenia macierzy wynikają natychmiast z interpretacji macierzy jako macierzy odwzorowań, o czym będzie mowa w następnej części.

3.2. Macierze odwzorowań.

BOISKO: Dwie przestrzenie wektorowe z bazami: $(V, \mathcal{B}_V)$, $(W, \mathcal{B}_W)$ **i odwzorowanie liniowe** $F\colon V \to W$.

Niech $e = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą przestrzeni wektorowej V. Każdy wektor $v \in V$ ma jednoznaczną reprezentację $v = \lambda^1 e_1 + \cdots + \lambda^n e_n$. Odwzorowanie

$$V \ni v \mapsto \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix} \in \mathbf{M}^n{}_1(\mathbb{R})$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych. Kolumnę

$$\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$$

oznaczać będziemy $[v]^{\mathcal{B}_V}$.

Niech $f = (f_1, \dots, f_m)$ będzie bazą przestrzeni W i niech $F : V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Mamy

$$F(v) = \lambda^1 F(e_1) + \cdots + \lambda^n F(e_n)$$

i

$$[F(v)]^{\mathcal{B}_W} = \lambda^1 [F(e_1)]^{\mathcal{B}_W} + \cdots + \lambda^n [F(e_n)]^{\mathcal{B}_W} = B \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix},$$

gdzie $B = [b^i{}_j]$ i $\bar{b}_j = [F(e_j)]^{\mathcal{B}_W}$. Wprowadzoną tak macierz B oznaczać będziemy $[F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V}$. Nazywamy ją *macierzą odwzorowania* liniowego F w bazach $\mathcal{B}_V$ i $\mathcal{B}_W$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix} = [v]^{\mathcal{B}_V},$$

mamy

$$[F(v)]^{\mathcal{B}_W} = [F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V} [v]^{\mathcal{B}_V}. \tag{3.1}$$

STWIERDZENIE 3.6.

(1) $[F+G]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V} = [F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V} + [G]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V}$.
(2) $[\lambda F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V} = \lambda [F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V}$.
(3) *Odwzorowanie* $\mathsf{L}(V,W) \to \mathbf{M}^m{}_n : F \mapsto [F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V}$ *jest wzajemnie jednoznaczne, to znaczy, że przy zadanych bazach odwzorowanie liniowe jest jednoznacznie określone przez swoją macierz.*

Zastępowanie odwzorowania liniowego przez macierz liczbową jest bardzo wygodne dla celów rachukowych. Zobaczymy to przy omawianiu równań liniowych. Łatwo zapamiętać regułę składania odwzorowań reprezentowanych macierzami: macierz złożenia jest iloczynem macierzy. Dokładniej,

STWIERDZENIE 3.7. *Jeżeli* $\mathcal{B}_V$ *jest bazą w* V, $\mathcal{B}_W$ *bazą w* W, $\mathcal{B}_U$ *bazą w* U *i jeśli* $F \in \mathsf{L}(V,W)$, $G \in \mathsf{L}(W,U)$, *to* $[G\circ F]^{\mathcal{B}_U}{}_{\mathcal{B}_V} = [G]^{\mathcal{B}_U}{}_{\mathcal{B}_W}[F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V}$.

DOWÓD: Mamy dla każdego wektora $v \in V$

$$\begin{aligned}[G\circ F(v)]^{\mathcal{B}_U} &= [G(F(v))]^{\mathcal{B}_U} = [G]^{\mathcal{B}_U}{}_{\mathcal{B}_W}[F(v)]^{\mathcal{B}_W}\\ &= [G]^{\mathcal{B}_U}{}_{\mathcal{B}_W}([F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V}[v]^{\mathcal{B}_V}) = ([G]^{\mathcal{B}_U}{}_{\mathcal{B}_W}[F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V})[v]^{\mathcal{B}_V}.\end{aligned}$$

■

Wnioski:

(1) Ponieważ składanie odwzorowań jest łączne, więc również mnożenie macierzy jest łączne.
(2) Jeżeli $F \in \mathsf{L}(V,W)$ jest izomorfizmem, to $[F^{-1}]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_W} = [F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V}{}^{-1}$.
Istotnie,
$$I = [Id]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_V} = [F^{-1}F]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_V} = [F^{-1}]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_W}[F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V}.$$
(3) Ponieważ $(F^{-1})^{-1} = F$, więc również dla macierzy zachodzi $(A^{-1})^{-1} = A$.
(4) Ponieważ dla odwzorowań $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$, więc i dla macierzy mamy podobnie: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Spostrzeżenie: $\operatorname{rz}[F]^f{}_e = \dim \operatorname{im} F$

3.3. Równania liniowe.

Niech $F\colon V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym i niech $b \in W$. Jeżeli e, f są bazami odpowiednio przestrzeni V, W, to równanie liniowe $Fx = b$ możemy zapisać równoważnie:
$$[F]^{\mathcal{B}_W}{}_{\mathcal{B}_V}[x]^{\mathcal{B}_V} = [b]^{\mathcal{B}_W}.$$

Abstrahując od odwzorowania, mamy równanie macierzowe $Ax = b$, gdzie szukamy kolumny $x \in \mathbf{M}^n{}_1(\mathbb{R})$, przy zadanych $A \in \mathbf{M}^m{}_n(\mathbb{R}), b \in \mathbf{M}^m{}_1(\mathbb{R})$.

Przetłumaczmy na język macierzy uwagi na temat równań wypowiadane wcześniej.

(1) Aby istniało rozwiązanie potrzeba i wystarcza, by przestrzenie rozpięte na kolumnach macierzy $A = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$ i $[A, b] = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, b]$ były równe. Do tego potrzeba i wystarcza, by ich wymiary były równe czyli, by $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz}[A, b]$ (tw.Kroneckera-Capelliego).

(2) Jeśli $m = n$, to równanie $Ax = b$ ma dla każdego b dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje A^{-1}. Wówczas $x = A^{-1}b$.

(3) Dodając do równania kombinację liniową pozostałych dostajemy układ równoważny, tzn., mający te same rozwiązania. Operacja ta odpowiada przejściu do innej bazy w przestrzeni W. Można zmieniać bazę również w przestrzeni V, ale ze względów praktycznych tego się nie robi.

Przykład: Rozwiążmy układ równań

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

Szukamy możliwie prostego układu równoważnego. Macierz układu A jest równa

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Przez $\sim$ oznaczę, że macierze dają układy równoważne. Mamy więc

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & -12 & -15 & -3 & 0 \\ 0 & -32 & -40 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 9 & 8 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(8 + x_3 - 9x_4) \\ x_2 &= \frac{1}{4}(-5x_3 - x_4). \end{aligned}$$

Stąd

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rozdział 4. Wyznaczniki

4.1. Definicja i istnienie.

Spójrzmy teraz na macierz $n \times n$ jak na układ n kolumn, czyli na element z $\mathbf{M}^m{}_n(\mathbb{R})$ i $\mathbf{M}^m{}_1(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbf{M}^m{}_1(\mathbb{R})$ (n razy).

DEFINICJA 4.1. Odwzorowanie $D\colon \mathbf{M}^n{}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ nazywamy wyznacznikiem, jeżeli posiada następujące wąsnoći:

(1) własność wieloliniowości: $D([\bar{a}_1, \dots, \alpha\bar{a}_i + \beta\bar{b}, \dots, \bar{a}_n]) =$
$= \quad \alpha D([\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n]) + \beta D([\bar{a}_1, \dots, \bar{b}, \dots, \bar{a}_n])$
dla $i = 1, \dots, n$,
(2) własność antysymetrii:
$D([\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n]) = -D([\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n])$
dla każdej pary $i \neq j$,
(3) spełnia warunek unormowania:
$D(I_n) = 1$, gdzie

$$I_n = [\delta^i{}_j], \quad \delta^i{}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = 1 \end{cases} .$$

STWIERDZENIE 4.2. *Jeżeli funkcja D jest wyznacznikiem, to*

(1) *Jeżeli jedna z kolumn macierzy A jest zerowa, to $D(A) = 0$,*
(2) *jeżeli dla pewnych $i \neq j$ $\bar{a}_i = \bar{a}_j$, to $D(A) = 0$,*
(3) *$D([\bar{a}_1, \dots, \bar{b}_i, \dots, \bar{a}_n]) = D(A)$, jeżeli $\bar{b}_i = \bar{a}_i + \lambda^1\bar{a}_1 + \cdots + \lambda^{i-1}\bar{a}_{i-1} + \lambda^{i+1}\bar{a}_{i+1} + \cdots + \lambda^n\bar{a}_n$. Inaczej mówiąc: wyznacznik macierzy nie zmienia się, jeżeli do kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych.*

DOWÓD: Oczywiste (punkty (1) i (3) definicji). ■

Uwaga! W dalszym ciągu będziemy, dla przejrzystości zapisu, używać symbolu a^i_j (zamiast $a^i{}_j$) dla oznaczenia elementu macierzowego.

TWIERDZENIE 4.3. *Dla każdego n istnieje dokładnie jeden wyznacznik $D\colon \mathbf{M}^n{}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.*

DOWÓD: Oznaczmy przez $\bar{e}_i$ kolumnę, w której na i-tym miejscu jest jedynka, a poza tym są zera. Każda kolumna jest oczywiście kombinacją liniową kolumn $\bar{e}_i$. Z wieloliniowości wyznacznika wynika, że jego obliczenie sprowadza się do obliczenia wyznacznika masierzy postaci

$$[\bar{e}_{i_1}, \bar{e}_{i_2}, \dots \bar{e}_{i_n}].$$

Z własności antysymetrii wyznacznik takiej macierzy wyraża się poprzez wyznacznik macierzy I_n, a ten jest równy jeden. ∎

Ponieważ wyznacznik jest tylko jeden, to zasługuje na specjane oznaczenie: wyznacznik macierzy A oznaczać będziemy

$$\det A.$$

Pozostałe, ważne dla nas własności wyznacznika ujmijmy w następującym twierdzeniu:

TWIERDZENIE 4.4. *Niech* $A, B \in \mathbf{M}^n{}_n(\mathbb{K})$.

$$\det AB = \det A \det B$$

(jest to Twierdzenie Cauchy'ego),

(1) *Wyznacznik macierzy jest równy wyznacznikowi macierzy transponowanej:*

$$\det A = \det A^{\mathsf{T}}.$$

(2) $\det[\bar{a}_1, \dots, \bar{b}_i, \dots, \bar{a}_n] \neq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy kolumny macierzy są liniowo niezależne, czyli tworzą bazę w przestrzeni kolumn. Daje to sposób na sprawdzanie liniowej niezależności.*

(3) A^{-1} *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det A \neq 0$. *Ponadto*

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

(4) *Mamy rozwinięcie Laplace'a*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a^k_i A^i_k = \sum_{i=1}^{n} a^i_k A^k_i. \tag{4.1}$$

A^j_i jest tu wyznacznikiem macierzy otrzymanej przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny, pomnożonym przez $(-1)^{j+i}$.

4.2. Przykłady i zastosowania.

Przykłady:

(1) Schemat Sarrusa obliczania wyznaczników 3×3.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|ccc} & & & - & - & - \\ a & b & c & a & b & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & \\ & & & + & + & + \end{array} = \tag{4.2}$$

$$= ab_1c_2 + bc_1a_2 + ca_1b_2 - a_2b_1c - b_2c_1a - c_2a_1b$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-3\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-3(5 - 75 - 16) + 2(20 + 25)) = (3 \cdot 43 + 45) = 174.$$

Pewne zastosowania wyznaczników:

(A) Wzory Cramera. Rozpatrzmy równanie $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbf{M}^n{}_n(\mathbb{K})$ i $\det A \neq 0$. Pisząc

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix},$$

dostajemy to równanie w postaci $\bar{a}_1x^1 + \cdots + \bar{a}_nx^n = b$ lub, równoważnie, $(\bar{a}_1x^1 - b) + \bar{a}_2x^2 + \cdots + \bar{a}_nx^n = 0$, czyli

$$\det[\bar{a}_1x^1 - b, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n] = 0.$$

Stąd

$$x^1 \det[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n] = \det[b, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n],$$

czyli

$$x^1 = \frac{\det[b, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n]}{\det[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]}$$

i, ogólnie,

$$x^i = \frac{\det[\bar{a}_1, \ldots, b, \ldots, \bar{a}_n]}{\det[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]} \tag{4.3}$$

Są to *wzory Cramera.*

(B) Jeżeli $A \in \mathbf{M}^n{}_n(\mathbb{K})$ i $\det A \neq 0$ to, jak wiemy, istnieje A^{-1}. Pokażemy, że elementy macierzy odwrotnej zadane są wzorem

$$b^i_j = A^i_j(\det A)^{-1},$$

gdzie A^i_j jest dopełnieniem algebraicznym elementu a^j_i macierzy A. Istotnie, niech B będzie macierzą o elementach macierzowych $b^i_j = A^i_j(\det A)^{-1}$. Mamy z rozwinięcia Laplace'a (4.1)

$$\sum_k b^i_k a^k_j = \frac{1}{\det A}\sum A^i_k a^k_j = \frac{1}{\det A}\det[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_j, \bar{a}_{i+1} \dots, \bar{a}_n] = \delta^i_j.$$

Zatem $BA = I$, czyli $B = A^{-1}$.

(C) Jeżeli A^{D} jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A, to z poprzedniego punktu mamy

$$AA^{\mathsf{D}} = A^{\mathsf{D}}A = (\det A)I. \tag{4.4}$$

4.3. Wektory i wartości własne.

Niech V będzie przestrzenią wektorową, $F \in \mathsf{L}(V,V)$ i niech $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V{}'$ będą bazami w V. Mamy

$$[F]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_V} = [Id]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_V{}'}[F]^{\mathcal{B}_V{}'}{}_{\mathcal{B}_V{}'}[Id]^{\mathcal{B}_V{}'}{}_{\mathcal{B}_V} \ ,$$

ale $[Id]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_V{}'} = ([Id]^{\mathcal{B}_V{}'}{}_{\mathcal{B}_V})^{-1}$, czyli $\det [Id]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_V{}'} = (\det([Id]^{\mathcal{B}_V{}'}{}_{\mathcal{B}_V}))^{-1}$ i, w konsekwencji,

$$\det([F]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_V}) = \det([F]^{\mathcal{B}_V{}'}{}_{\mathcal{B}_V{}'}) \ .$$

Znaczy to, że wyznacznik zależy tylko od odwzorowania F, nie zależy od wyboru bazy.

DEFINICJA 4.5. Wyznacznik

$$\det([F]^{\mathcal{B}_V}{}_{\mathcal{B}_V}) \ .$$

macierzy przekształcenia F nazywamy *wyznacznikiem przekształcenia F*.

Wyznacznik przekształcenia F oznaczamy $\det F$. Jak wiadomo, F jest izomorfizmem (tzn. istnieje F^{-1}) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $[F]^e{}_e$ jest odwracalna (posiada macierz odwrotną). Z kolei, macierz jest odracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyznacznik jest różny od zera. Zatem F jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\det F \neq 0$.

DEFINICJA 4.6. *Wielomian w zmiennej λ określony wzorem*

$$w(\lambda) = \det(F - \lambda Id_V) \tag{4.5}$$

nazywamy wielomianem charakterystycznym *przekształcenia $F \in \mathsf{End}(V)$ i oznaczamy ω_F.*

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego to są takie liczby, dla których wyznacznik $\det(A - \lambda I)$ jest równy zeru, czyli odwzorowanie $A - \lambda I$ nie jest izomorfzmem. Nie jest więc injekcją, czyli istnieje wektor $v \neq \mathbf{0}$ taki, że

$$(A - \lambda I)v = \mathbf{0}.$$

DEFINICJA 4.7. *Wartością własną* endomorfizmu (operatora) F nazywamy pierwiastek jego wielomianu charakterystycznego.

DEFINICJA 4.8. Niech λ będzie wartością własną F. Wektor $v \neq \mathbf{0}$ taki, że $Fv = \lambda v$ nazywamy *wektorem własnym* operatora (endomorfizmu) F odpowiadającym wartości własnej λ.

Przykłady.

(a) Niech $V = \mathbb{R}^2$ i niech F będzie odbiciem względem osi x: $F((x, y)) = (x, -y)$. Warunek $F((x, y)) = \lambda(x, y)$ może być spełniony dla $\lambda = 1$ lub $\lambda = -1$. Są to wartości własne. Wektorami własnymi wartości własnej $\lambda = 1$ są wektory postaci $(x, 0)$. Wektorami własnymi wartości własnej $\lambda = -1$ są wektory postaci $(0, y)$.
(b) Niech $V = \mathbb{R}^2$ i niech F będzie obrotem wokół punktu $(0, 0)$ o kąt $\pi/2$. F nie ma wartości i wektorów własnych.

DEFINICJA 4.9. Podprzestrzeń wektorową W przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią *niezmienniczą* operatora $F \in \mathsf{End}(V)$, jeżeli $FW \subset W$.

Przykład: Podprzestrzeń wektorów własnych ustalonej wartości własnej, uzupełnionych zerem, jest podprzestrzenią niezmienniczą.

Rozdział 5. Przestrzenie euklidesowe

5.1. Iloczyn skalarny.

DEFINICJA 5.1. *Iloczynem skalarnym* w przestrzeni wektorowej V nazywamy funkcję $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ o własnościach:

(1) $g(v,v) > 0$ dla $v \neq 0$ (dodatniość),
(2) $g(v,w) = g(w,v)$ (symetria),
(3) g jest funkcją dwuliniową:

$$g(\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2, w) = \lambda^1 g(v_1, w) + \lambda^2 g(v_2, w).$$

Liniowość ze względu na drugi argument wynika już z symetrii.

Przestrzeń wektorową z ustalonym iloczynem skalarnym nazywamy *przestrzenią euklidesową*.

<u>**Oznaczenia**</u>:

(1) $g(v,w)$ oznaczać będziemy $(v|w)$.
(2) $\sqrt{g(v,v)}$, oznaczać będziemy $\|v\|$ i nazywać będziemy normą (długością) wektora.

Mając iloczyn skalarny możemy mówić o *kącie* między wektorami. $\measuredangle(v,w)$ jest to taka liczba $\alpha \in [0,\pi]$, że

$$\cos\alpha = \frac{(v|w)}{\|v\|\|w\|}.$$

Przykłady

(1) Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym

$$((x,y,z)|(x',y',z')) = xx' + yy' + zz'.$$

(2) Ogólniej: $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym

$$((x_1,x_2,\cdots,x_n)|(y_1,y_2,\cdots,y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

(3) Przestrzeń wielomianów stopnia $\leqslant 3$ z iloczynem

$$(w_1|w_2) = \int_0^1 w_1(t)w_2(t)\mathsf{d}t$$

5.1.1. Podstawowe własności iloczynu skalarnego:.

STWIERDZENIE 5.2 (TOŻSAMOŚĆ RÓWNOLEGŁOBOKU). $\|v+w\|^2+\|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$

DOWÓD: $(v+w|v+w)+(v-w|v-w) = 2(v|v)+2(w|w)$ z dwuliniowości iloczynu skalarnego. ■

TWIERDZENIE 5.3 (NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA). *Jeśli V jest przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym, to*

$$|(v|w)| \leqslant \|v\| \, \|w\|.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy v i w są liniowo zależne.

DOWÓD: Jeśli $v = \mathbf{0}$, to twierdzenie jest trywialne.
Jeśli $v \neq \mathbf{0}$, to rozpatrzmy funkcję $\alpha\colon \mathbb{R} \ni t \mapsto \|tv + w\|^2 \in \mathbb{R}$. Mamy $\alpha(t) = t^2(v|v) + 2t(v|w) + (v|w)$. Oczywiście $\alpha(t) \geqslant 0$, zatem wyróżnik tego trójmianu jest niedodatni, tzn:

$$(v|w)^2 - (\|v\| \, \|w\|)^2 \leqslant 0 \, .$$

Jeżeli $w = \lambda v$, to

$$|(v|w)| = |\lambda| \|v\|^2 = \|\lambda v\| \cdot \|v\| = \|v\| \cdot \|w\|.$$

Niech teraz $|(v|w)| = \|v\| \cdot \|w\|$ i $|(v|w)| = \epsilon(v|w)$. Rozważmy funkcję

$$\begin{aligned}\beta\colon t \mapsto \beta(t) = \|\epsilon t v + w\|^2 &= t^2\|v\|^2 + 2t|(v|w)| + \|w\|^2 = \\ &= t^2\|v\|^2 + 2t\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (t\|v\| + \|w\|)^2.\end{aligned}$$

β jest więc równe zero dla $t_0 = -\frac{\|w\|}{\|v\|}$, czyli $0 = -\epsilon\frac{\| w \|}{\| v \|} v + w$ i $w = \epsilon\frac{\|w\|}{\|v\|} v$. ■

STWIERDZENIE 5.4 (NIERÓWNOŚĆ TRÓJKĄTA).

$$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $(v|w) = \|v\|\|w\|$ lub, równoważnie, gdy v i w są liniowo zależne.

DOWÓD:

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 = (v + w|v + w) &= \|v\|^2 + 2(v|w) + \|w\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.\end{aligned}$$

Pozostała część stwierdzenia wynika bezpośrednio z tego rachunku i z poprzedniego stwierdzenia. ■

Ustalmy sobie wektor $w \in V$ i zbudujmy przy jego pomocy funkcję na V:

$$V \ni v \mapsto (w|v) \in \mathbb{R}.$$

Z dwuliniowości iloczynu skalarnego wynika, że tak wprowadzona funkcja jest liniowa. Okazuje się, że każda funkcja liniowa na V jest tej postaci. Oznacza to, że funkcję liniowa na przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym można utożsamiać z wektorem tej przestrzeni. W fizyce bardzo często korzysta się z tej możliwość, a nawet jej się nadużywa.

TWIERDZENIE 5.5 (O POSTACI FUNKCJI LINIOWEJ). *Dla każdej funkcji liniowa $f\colon V \to \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden wektor $w_f \in V$ taki, że*

$$f(v) = (v|w_f)$$

dla każdego wektora $v \in V$.

5.2. Prostopadłość. Rzut prostopadły.

DEFINICJA 5.6. Niech $v, w \in V$. Mówimy, że wektor v jest *prostopadły* do w (piszemy $v \perp w$) jeżeli $(v|w) = 0$.

STWIERDZENIE 5.7 „PITAGORASA". *Jeżeli $(v|w) = 0$ to*

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Niech $A \subset V$ będzie dowolnym podzbiorem. Zdefiniujemy podzbiór $A^\perp$ przestrzeni A wzorem

$$A^\perp = \{v \in V : (v|w) = 0 \ \ \forall w \in A\} = F_g^{-1}(A^\circ).$$

Sprawdzamy, że $A^\perp$ jest podprzestrzenią wektorową:
Dla $a \in A, v, w \in A^\perp$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ mamy

$$(a|v + w) = (a|v) + (a|w) = 0, \quad (a|\lambda v) = \lambda(a|) = 0,$$

czyli $v + v, \lambda v \in A^\perp$.

TWIERDZENIE 5.8. *Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym g. Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią wektorową. Wówczas*

$$V = W + W^\perp, \quad W \cap W^\perp = \mathbf{0}.$$

DOWÓD: Niech $v \in W \cap W^\perp$. Wtedy $(v|v) = \|\, v \,\|^2 = 0$, czyli $v = \mathbf{0}$; zatem $W \cap W^\perp = 0$.
Czy $V = W + W^\perp$?
Wystarczy policzyć wymiary. Jeżeli $\dim V = n$ i $\dim W = k$, to $\dim W^\perp = n - k$. Zatem

$$\dim(W + W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp - \dim W \cap W^\perp = n = \dim V.$$

■

Każdy wektor z V da się więc jednoznacznie przedstawić jako suma wektorów z W i $W^{\perp}$:

$$v = w + w', \quad w \in W,\ w' \in W^{\perp}.$$

Składową w nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora v na podprzestrzeń W. Często oznacza się go $P_W(v)$. Szczególnie prosto wyraża się rzut wektora v na podprzestrzeń (jednowymiarową) W rozpiętą przez wektor $w \neq \mathbf{0}$:

$$P_W(v) = \frac{(v|w)}{(w|w)} w.$$

Możemy teraz zdefiniować objętość (powierzchnię) S równoległoboku rozpiętego na wektorach v, w:

$$S = \|v - P_W v\| \cdot \|w\|.$$

Podobnie wprowadzamy objętość równoległościanu i jego odpowiedników wyższego wymiaru.

5.3. Baza ortonormalna.

Iloczyn skalarny pozwala wyróżnić wśród baz te, których wektory są wzajemnie prostopadłe i unormowane (tzn. odługości 1). Bazę taką nazywamy *bazą ortonormalną*. Innymi słowy – $\mathcal{B}_V = (e_1, \ldots, e_n)$ jest bazą ortonormalną jeżeli $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$. Wynika stąd, że jeżeli

$$v = v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n$$

jest rozkładem wektora w w bazie ortonormalnej, to $v^i = (v|e_i)$. Ponadto, iloczyn skalarny wektorów wyraża się bardzo prosto poprzez współrzędne w bazie ortonormalnej:

$$(w|v) = \sum_{i=1}^{n} w^i v^i = ([w]^{\mathcal{B}_V})^{\mathsf{T}} [v]^{\mathcal{B}_V}.$$

Pokazuje się, że w każdej przestrzeni z iloczynem skalarnym istnieje baza ortonormalna.

5.4. Przekształcenia ortogonalne.

Wśród przekształceń przestrzeni euklidesowej wyróżniamy te, które respektują iloczyn skalarny.

DEFINICJA 5.9. Odwzorowanie $F\colon V \to V$ nazywamy przekształceniem (odwzorowaniem, operatorem) *ortogonalnym*, jeżeli $(Fx|Fy) = (x|y)$ dla wszystkich $x, y \in V$.

Uwagi:

(1) Operator ortogonalny jest nieosobliwy (ma trywialne jądro). Istotnie, mamy $\|Fx\| = \|x\|$, jeśli więc $Fx = \mathbf{0}$, to $x = 0$.
(2) Jeżeli operatory F i G są ortogonalne, to F^{-1}, $F \circ G$ są też ortogonalne. Nie są natomiast, na ogół ortogonalne odwzorowania $F + G$, λG.
(3) Przekształcenia ortogonalne zachowują długości wektorów i kąty. Odbicia, obroty są przekształceniami ortogonalnymi.

Niech $\mathcal{B}_V = (e_1, ..., e_n)$ będzie bazą ortonormalną w V i $F: V \to V$ odwzorowaniem ortogonalnym.

Mamy

$$([w]^{\mathcal{B}_V})^{\mathsf{T}}[v]^{\mathcal{B}_V} = (v|w) = (Fw|Fv) = ([Fw]^{\mathcal{B}_V})^{\mathsf{T}}[Fv]^{\mathcal{B}_V} = ([w]^{\mathcal{B}_V})^{\mathsf{T}}([F]^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V})^{\mathsf{T}}[F]^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V}[v]^{\mathcal{B}_V}.$$

Odwzorowanie F jest więc ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy w (dowolnej) bazie ortonormalnej $\mathcal{B}_V$

$$([F]^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V})^{\mathsf{T}}[F]^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V} = I.$$

DEFINICJA 5.10. *Kwadratową macierz A taką, że $A^{\mathsf{T}}A = I$ nazywamy* macierzą ortogonalną.

W bazie ortonormalnej macierz przekształcenia ortogonalnego jest więc macierzą ortogonalną. Oczywiście, macierz A jest macierzą ortogonalną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bar{a}_i^{\mathsf{T}}\bar{a}_j = \delta_{ij}, \tag{5.1}$$

gdyż (i, j)-tym wyrazem $A^{\mathsf{T}}A$ jest $\bar{a}_i^{\mathsf{T}}\bar{a}_j$.

STWIERDZENIE 5.11. *Niech F będzie operatorem ortogonalnym a e - bazą ortonormalną. Wtedy Fe jest też bazą ortonormalną.*

DOWÓD:

$$(Fe_i \mid Fe_j) = (e_i \mid e_j)\delta_{ij}.$$

■

Twierdzenie odwrotne jest też prawdziwe: jeżeli dla pewnej bazy ortonormalnej $(e_1, \ldots, e_n)$ ciąg $(Fe_1, \ldots, Fe_n)$ jest też bazą ortonormalną, to F jest ortogonalny. Wynika to z prostego rachunku:

$$\begin{aligned}(Fv, Fw) &= (F(\lambda^1 e_1 + \cdots + \lambda^n e_n) \mid F(\mu^1 e_1 + \cdots + \mu^n e_n)) \\ &= \sum_{i,j} \lambda^i \mu^j (F(e_i) \mid F(e_j)) = \sum_i \lambda^i \mu^i = (v \mid w).\end{aligned}$$

5.5. Przekształcenia (operatory, odwzorowania) symetryczne.

DEFINICJA 5.12. *Operator* $F\colon V \to V$ *nazywamy* symetrycznym, *jeżeli dla* $v, w \in V$ *zachodzi równość*

$$(v \mid Fw) = (Fv \mid w).$$

W przeciwieństwie do operatorów ortogonalnych, kombinacja liniowa operatorów symetrycznych jest operatorem symetrycznym. Tworzą one przestrzeń wektorową. Z kolei złożenie operatorów symetrycznych nie jest, na ogół, symetryczne.

Jężeli $\mathcal{B}_V$ jest bazą ortonormalną, to dla odwzorowania symetrycznego zachodzi

$$[F]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V} = ([F]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V})^{\mathsf{T}}.$$

Dla odwzorowań (operatorów) symetrycznych zachodzi ważne twierdzenie:

TWIERDZENIE 5.13. *Niech* F *będzie operatorem symettrycznym. Wówczas*

(1) *Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są rzeczywiste.*
(2) *Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są do siebie prostopadłe.*
(3) *Istnieje ortonormalna baza złożona z wektorów własnych operatora* F.