1 Rozwiązanie zadania 1B

Funkcja falowa (*unormowana*) ma postać:

$$\Psi(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{7\pi a^5}} r e^{-\frac{r}{a}} cos\theta(1 + cos\phi sin\theta + \imath sin\phi sin\theta).$$

Wiemy, że $e^{\imath\phi} = cos\phi + \imath sin\phi$, co pozwala zapisać f.f. jako:

$$\Psi(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{7\pi a^5}} r e^{-\frac{r}{a}}(cos\theta + cos\theta sin\theta e^{\imath\phi}),$$

następnie patrzymy na listę harmonik i *widzimy*, że:

$$\Psi(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{7\pi a^5}} r e^{-\frac{r}{a}}(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} + \sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_{21}),$$

można to chwilowo tak zostawić, ale polecam rzucenie okiem na współczynniki przy harmonikach i błyskawiczne stwierdzenie, że się nie normują do jedności, tzn.:

$$|\sqrt{\frac{4\pi}{3}}|^2 + |\sqrt{\frac{8\pi}{15}}|^2 = \frac{28\pi}{15} \neq 1,$$

tak więc dokonujemy odpowiednich machinacji i zapisujemy f.f.:

$$\Psi(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{4}{3a^5}} r e^{-\frac{r}{a}}(\sqrt{\frac{5}{7}} Y_{10} + \sqrt{\frac{2}{7}} Y_{21}).$$

Teraz współczynniki przy harmonikach podniesione do kwadratu dają odpowiednie prawdopodobieństwa (i nie trzeba liczyć całeczek).

(i) możliwe wyniki pomiarów:

$$\hat{L}^2 \longrightarrow \hbar^2 l(l+1) : 2\hbar^2, 6\hbar^2$$

$$\hat{L}_z \longrightarrow \hbar m : 0, \hbar.$$

(ii) obliczenie $\langle \hat{L}^2 \rangle, \langle \hat{L}_z \rangle$

ponieważ funkcja jest unormowana, a współczynniki przy harmonikach podniesione do kwadratu i dodane do siebie dają 1, więc nie musimy zajmować się częścią radialną f.f. oraz współczynnikiem mnożącym całość (a tylko częścią w nawiasie). I tak:

$$\langle \hat{L}^2 \rangle = \frac{5}{7}\hbar^2 \cdot 1(1+1) + \frac{2}{7}\hbar^2 \cdot 2(2+1) = \frac{22}{7}\hbar^2,$$

$$\langle \hat{L}_z \rangle = \frac{5}{7}\hbar \cdot 0 + \frac{2}{7}\hbar \cdot 1 = \frac{2}{7}\hbar.$$

(iii) obliczenie $\langle r \rangle$ oraz odległości najbardziej prawdopodobnej (r_p)

$$\langle r \rangle = \frac{4}{3a^5} \int_0^\infty drr^4 \cdot re^{-\frac{2r}{a}} = \frac{5}{2}a,$$

przy tych obliczeniach można było skorzystać np. ze znanej wszystkim księgi przepisów matematycznych lub też przypomnieć sobie niejaką (dla niektórych legendarną) funkcję $\Gamma(z)$. Wszystkie chwyty dozwolone (oprócz ściągania), byleby tylko wyszło dobrze:)
Aby wyznaczyć r_p trzeba wiedzieć, czym jest gęstość radialna:

$$\int_0^\infty drr^2 \int_{4\pi} d\Omega \Psi^\dagger \Psi = \int_0^\infty dr\rho_r(r) = 1,$$

czyli w naszym przypadku:

$$\rho_r(r) = \frac{4}{3a^5} r^4 e^{-\frac{2r}{a}}.$$

Następnie szukamy maksimum ρ_r, tzn. liczymy $\frac{d\rho_r(r)}{dr} = 0$, r_p odpowiada temu r dla którego ρ_r ma maksimum.

$$r_p = 2a.$$

2 Rozwiązanie zadania 1A

Funkcja falowa (unormowana) ma postać:

$$\Psi(\bar{r}, 0) = f(\bar{r})\chi_{\bar{n}}^+,$$

gdzie $\bar{n} = (0, sin\alpha, cos\alpha)$. Operator spinu zgodny z kierunkiem wyznaczonym przez $\bar{n}$:

$$\bar{n} \cdot \bar{S} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} cos\alpha & -\imath sin\alpha \\ \imath sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix},$$

wartości własne to oczywiście $+\frac{1}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar$.

(i)Poszukujemy spinowych funkcji własnych $\chi_{\bar{n}}^+, \chi_{\bar{n}}^-$.

Z postaci operatora widać, że wektory $(1, 0), (0, 1)$ nie są f. własnymi (dla $\alpha \neq 0, \pi$ (*)).
Dla wartości własnej $+\frac{1}{2}\hbar$:

$$\begin{pmatrix} cos\alpha & -\imath sin\alpha \\ \imath sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

co daje warunek na a:

$$a = \frac{\imath sin\alpha}{cos\alpha - 1} b,$$

odwołując się do argumentu (*), zapisujemy:

$$\chi_{\bar{n}}^+ = N^+ \begin{pmatrix} \frac{\imath sin\alpha}{cos\alpha - 1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

z normalizacji wyznaczamy stałą N^+:

$$N^+ = \sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}.$$

Analogicznie postępujemy dla drugiej wartości własnej $(-\frac{1}{2}\hbar)$ i dostajemy:

$$\chi_{\bar{n}}^{-} = N^{-}\begin{pmatrix} \frac{\imath sin\alpha}{cos\alpha+1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$N^{-} = \sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}.$$

Nie trzeba było przedstawiać tych funkcji jako funkcji kąta $\frac{\alpha}{2}$ (choć oczywiście można), ponieważ już od następnego punktu przyjmujemy $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(ii) dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$ znaleźć prawdopodobieństwo tego, że w stanie opisanym f.f. Ψ rzut spinu na oś Ox wynosi $\frac{1}{2}\hbar$.

(w dalszej części zadania należało przyjąć, że $\alpha = \frac{\pi}{4}$.) Funkcje własne σ_x:

$$\chi_x^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \chi_x^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Natomiast dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$\chi_{\bar{n}}^{+} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{\imath}{1-\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Funkcja falowa jest unormowana, i unormowana jest część spinowa, co nas cieszy ogromnie, bo ułatwia liczenie. Szukane prawdopodobieństwo:

$$|\langle\chi_x^{+}|\chi_{\bar{n}}^{+}\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

(iii) obliczyć $\langle\bar{S}\rangle$.

Przypominam, że:

$$\langle\bar{S}\rangle = \begin{pmatrix} \langle S_x\rangle \\ \langle S_y\rangle \\ \langle S_z\rangle \end{pmatrix},$$

czyli musimy policzyć 3 średnie (dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$). Ta część nie powinna już budzić w Was wątpliwości (zbyt wielkiego entuzjazmu być może też nie, ale to już kwestia gustu). Po kilku intrygujących rachunkach dochodzimy do chwalebnego wyniku:

$$\langle\bar{S}\rangle = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(fajnie, co?)

(iv) wyznaczenie $\langle\bar{S}\rangle_t$.

Ponieważ $\hat{H}$ zawiera tylko część spinową, więc wystarczy się ograniczyć do zmiennych spinowych - czyli spinowych funkcji własnych. Oczywiści w chwili $t = 0$ mamy:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \chi_{\bar{n}}^{+}.$$

Równanie Shrodingera ($\bar{B} = (0,0,B)$):

$$\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\begin{array}{c} a(t) \\ b(t) \end{array}\right) = \mu\bar{B}\cdot\bar{\sigma}\left(\begin{array}{c} a(t) \\ b(t) \end{array}\right) = \mu B\left(\begin{array}{c} a(t) \\ -b(t) \end{array}\right).$$

Co daje:

$$\left(\begin{array}{c} a(t) \\ b(t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} a_0 e^{-\frac{\imath\mu B}{\hbar}t} \\ b_0 e^{\frac{\imath\mu B}{\hbar}t} \end{array}\right),$$

gdzie:

$$\left(\begin{array}{c} a_0 \\ b_0 \end{array}\right) = \chi^{+}_{\bar{n}}.$$

Na tym stanie liczymy następnie $\langle\bar{S}\rangle_t$, co daje nam średnią postaci:

$$\langle\bar{S}\rangle_t = \frac{1}{2}\hbar\left(\begin{array}{c} \sim sin(\frac{2\imath\mu B}{\hbar}t) \\ \sim cos(\frac{2\imath\mu B}{\hbar}t) \\ const \end{array}\right).$$