I Kolokwium z PFW2. Rozwiązanie zad.3.

Cząstka o masie m w potencjale:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

a) w chwili $t = 0$ mamy superpozycję stanów własnych:

$$\Psi(x,0) = \frac{\imath}{\sqrt{2}}u_2(x) + \beta u_3(x) + \imath\beta u_4(x),$$

gdzie $u_n(x)$ są ortonormalnymi stanami własnymi 1-wym. oscylatora harmonicznege o energiach $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

wyznaczenie β

Z warunku normalizacji mamy:

$$1 = \langle\Psi|\Psi\rangle = \frac{-\imath}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\imath}{\sqrt{2}}\langle u_2|u_2\rangle + \beta^*\beta\langle u_3|u_3\rangle + (-\imath\beta^*)\imath\beta\langle u_4|u_4\rangle = \frac{1}{2} + 2|\beta|^2,$$

wiemy, że β jest *rzeczywiste* więc:

$$\beta^2 = \frac{1}{4}$$

i można jak zwykle przyjąć, że β jest dodatnia, co daje:

$$\beta = \frac{1}{2}.$$

wyznaczenie $\Psi(x,t)$

Korzystamy z faktu, że:

$$\Psi(x,t) = \sum_i c_i exp\{-\frac{\imath E_i t}{\hbar}\}u_i(x),$$

oraz wyrażenia na energię:

$$\begin{aligned} E_2 &= \tfrac{5}{2}\hbar\omega, \\ E_3 &= \tfrac{7}{2}\hbar\omega, \\ E_4 &= \tfrac{9}{2}\hbar\omega, \end{aligned}$$

tak więc:

$$\Psi(x,t) = \frac{\imath}{\sqrt{2}}e^{-\imath\frac{5}{2}\omega t}u_2(x) + \frac{1}{2}e^{-\imath\frac{7}{2}\omega t}u_3(x) + \frac{\imath}{2}e^{-\imath\frac{9}{2}\omega t}u_4(x).$$

wyznaczenie $\langle p\rangle_t$

Szukana średnia jest średnią na stanie $\Psi(x,t)$, czyli:

$$\langle p\rangle_t = \langle\Psi(t)|\hat{p}\Psi(t)\rangle.$$

Mając dany wzór na $\hat{a}$ (więc także na $\hat{a}^\dagger$, jeśli obliczyć hermitowskie sprzężenie) możemy wyrazić operator $\hat{p}$ przez operatory anihilacji i kreacji:

$$\hat{p} = \imath\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

Dla wygody możemy chwilowo wprowadzić oznaczenie $A \equiv \imath\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}$. Natępnie liczymy (pamiętając o odpowiednich sprzężeniach):

$$\langle p\rangle_t = A(\langle\Psi(t)|\hat{a}^\dagger\Psi(t)\rangle - \langle\Psi(t)|\hat{a}^\dagger\Psi(t)\rangle) = \sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(1-\sqrt{\frac{3}{2}})cos(\omega t).$$

Przy czym w rachunku tym korzysta się z następujących własności:

$$\begin{array}{rcl} \hat{a}^\dagger|u_n\rangle & = & \sqrt{n+1}|u_{n+1}\rangle, \\ \hat{a}|u_n\rangle & = & \sqrt{n}|u_{n-1}\rangle, \\ \langle u_n|u_k\rangle & = & \delta_{nk}, \\ cos(x) & = & \frac{1}{2}(e^{\imath x}+e^{-\imath x}). \end{array}$$

b) rozpatrujemy teraz zaburzenie potencjału oscylatora harmonicznego $V(x)$ postaci:

$$\delta V(x) = \lambda\hat{x}^4,$$

gdzie zakładamy, że λ jest małym parametrem. Chcemy obliczyć poprawkę δE do energii stanu podstawowego $(u_0(x))$ $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$:

$$\delta E = \langle u_0|\delta V(x)u_0\rangle = \lambda\langle u_0|\hat{x}^4 u_0\rangle.$$

Wyrażamy najpierw $\hat{x}$ przez operatory anihilacji i kreacji:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}).$$

Wprowadźmy oznaczenie $B \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$; dalej:

$$\hat{x}^4 = B^4(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4.$$

Należy podnieść wyrażenie w nawiasie do 4 potęgi (co da 16 członów), *pamiętając*, że mamy do czynienia z *operatorami*, które nie komutują, więc *nie możemy* dowolnie zmieniać kolejności (!). Ponieważ liczymy iloczyn skalarny między stanami u_0 więc *niezerowy* wkład na tych stanach dadzą jedynie dwa wyrażenia:

$$\hat{x}^4 \sim \hat{a}^2\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger,$$

zatem:

$$\delta E = \lambda B^4\left(\langle u_0|\hat{a}^2\hat{a}^{\dagger 2}u_0\rangle + \langle u_0|\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger u_0\rangle\right) = \lambda B^4(2+1) = \frac{3\lambda\hbar^2}{4m^2\omega^2}.$$