## Podstawy Fizyki Współczesnej II, 05.12.2005

**I Kolokwium/Zadanie 2**
Cząstka o masie m porusza się w polu siły o potencjale

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & : x \in [0,a] \wedge y \in [0,a] \\ \infty & : x \text{ poza } [0,a] \wedge y \text{ poza } [0,a] \end{cases}$$

a) W chwili t=0 funkcja falowa cząstki była dana wzorem

$$\psi(x,y,t=0) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)$$

Znaleźć prawdopodobieństwo znalezienia tej cząstki w chwili $t=0$ w obszarze

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{a}{8} \le x \le \frac{a}{2} \wedge \frac{a}{4} \le x \le \frac{a}{2}\right\}$$

Znaleźć $\psi(x,y;t)$.

b) Znaleźć poprawkę do energii pierwszego stanu wzbudzonego po włączeniu dodatkowego potencjału $\delta V(x,y) = \lambda xy$, gdzie $\lambda$ jest małe. Czy włączenie dodatkowego potencjału usuwa degenerację pierwszego poziomu wzbudzonego?

**Rozwiązanie**
a)
Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki opisanej powyższą funkcją w podanym obszarze dane jest wyrażeniem

$$P(\Omega) = \int_{a/8}^{a/2} dx \int_{a/4}^{a/2} dy\, \psi^*(x,y)\,\psi(x,y) = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \int_{a/8}^{a/2} dx \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \int_{a/4}^{a/2} dy \sin^2\left(\frac{2\pi y}{a}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^2 I_x I_y$$

$$I_x = \int_{a/8}^{a/2} dx \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{1}{2}\int_{a/8}^{a/2} dx \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right] = \frac{1}{2}\left\{x|_{a/8}^{a/2} - \frac{a}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_{a/8}^{a/2}\right\} = ... = \frac{a}{2}\left[\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\right]$$

$$I_y = \int_{a/4}^{a/2} dy \sin^2\left(\frac{2\pi y}{a}\right) = \frac{1}{2}\int_{a/4}^{a/2} dy \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right] = \frac{1}{2}\left\{x|_{a/4}^{a/2} - \frac{a}{4\pi}\left[\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right]_{a/4}^{a/2}\right\} = ... = \frac{a}{8}$$

$$P(\Omega) = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \frac{a}{2}\left[\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\right]\frac{a}{8} = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\right]$$

Z postaci funckcji

$$\psi(x,y,t=0) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)$$

odczytujemy, e $n_x = 1$, $n_y = 2$. Korzystając z wyrażenia na energię $n$-tego stanu znajdujemy

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \qquad E_2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2$$

Dostajemy

$$\psi(x,y,t) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) e^{-i(E_1+E_2)t/\hbar}$$

b)
Pierwszy stan wzbudzony potencjału niezaburzonego opisywany jest przez funkcje $\{\psi_{21}, \psi_{12}\}$. Rozpisujemy zaburzenie $\delta H = \lambda xy$ w bazie tych funkcji

$$\delta H = \lambda \begin{bmatrix} \langle\psi_{21}|xy\,\psi_{21}\rangle & \langle\psi_{21}|xy\,\psi_{12}\rangle \\ \langle\psi_{12}|xy\,\psi_{21}\rangle & \langle\psi_{12}|xy\,\psi_{12}\rangle \end{bmatrix}$$

Do znalezienia elementów tej macierzy będzie trzeba policzyć całki postaci

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{d}x\, x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{a}{2} \\ I_2 &= \frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{d}x\, x \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{d}x\, x\left[\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\right] \end{aligned}$$

Ogólnie

$$\begin{aligned} \int_0^a \mathrm{d}x\, x\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) &= \left[x\frac{a}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]_0^a - \frac{a}{n\pi}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{\pi^2}\frac{1}{n^2}\left[\cos\left(n\pi\right) - 1\right] = \frac{a^2}{\pi^2}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \end{aligned}$$

Czyli

$$I_2 = \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{d}x\, x\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{d}x\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) = \frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{\pi^2}\left[-1-1\right]\right] - \frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{\pi^2}\frac{1}{9}\left[-1-1\right]\right] = -\frac{16}{9}\frac{a}{\pi}$$

Korzystając z tych obliczeń możemy macierz zaburzenia przepisać w postaci

$$\delta H = \lambda\begin{bmatrix} (a/2)^2 & (-16a/9\pi)^2 \\ (-16a/9\pi)^2 & (a/2)^2 \end{bmatrix}$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$\alpha = \left[-\frac{16}{9}\frac{a}{\pi}\right]^2$$

Poprawki do energii znajdujemy z warunku zerowania się następującego wyznacznika

$$\det\left[\delta H - \mathbb{1}\delta E\right] = 0$$

Czyli

$$\det\begin{bmatrix} \lambda\left(a/2\right)^2 - \delta E & \lambda\alpha \\ \lambda\alpha & \lambda\left(a/2\right)^2 - \delta E \end{bmatrix} = 0$$

Z tego warunku dostajemy równanie kwadratowe postaci

$$\left(\lambda\frac{a^2}{4} - \delta E\right)^2 - (\lambda\alpha)^2 = \left[\left(\lambda\frac{a^2}{4} - \delta E\right) - \lambda\alpha\right]\left[\left(\lambda\frac{a^2}{4} - \delta E\right) + \lambda\alpha\right] = 0$$

Czyli

$$\lambda\frac{a^2}{4} - \delta E = \pm\lambda\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \delta E = \lambda\left[\frac{a^2}{4} \mp \alpha\right]$$

Czyli włączenie zaburzenia znosi degenerację pierwszego poziomu wzbudzonego.

**Punktacja**

3pt - znalezienie prawdopodobieństwa z pktu a)
2pt - znalezienie $\psi\left(x, y, t\right)$
2pt - zapisanie zaburzenia z pktu b) w bazie funkcji własnych dla potencjału niezaburzonego
2pt - znalezienie elementów macierzowych (czyli policzenie całek)
2pt - rozwiązanie równania własnego