Szczególna teoria względności

Tomasz Tarkowski

Centrum Dydaktyczne Wydziału Fizyki
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
Pasteura 5, 02-093 Warszawa

27 stycznia 2025

1 Transformacja Lorentza

Rozważamy dwa układy inercjalne: $\mathcal{O}$ oraz poruszający się względem niego z prędkością v wzdłuż osi $\mathcal{O}x$ układ $\mathcal{O}'$.

Przypomnijmy transformację Galileusza. Niech wektory $\vec{r}_{P\mathcal{O}}$ oraz $\vec{r}_{P\mathcal{O}'}$ opisują położenie punktu P odpowiednio względem układu $\mathcal{O}$ oraz $\mathcal{O}'$ zaś wektor $\vec{r}_{\mathcal{O}'\mathcal{O}}$ – położenie początku układu $\mathcal{O}'$ względem układu $\mathcal{O}$. Transformacja Galiluesza określa zależność położeń pomiędzy obydwoma układami odniesienia a także (w domyśle) zależność upływu czasu pomiędzy nimi:

$$\vec{r}_{P\mathcal{O}} = \vec{r}_{P\mathcal{O}'} + \vec{r}_{\mathcal{O}'\mathcal{O}} \tag{1}$$
$$\Delta t_{P\mathcal{O}} = \Delta t_{P\mathcal{O}'} \tag{2}$$

Przyjmijmy dodatkowo (choć bez straty ogólności dla otrzymanych rezultatów), że początki układów odniesienia przekrywały się w pewnej chwili czasu, którą uznamy za chwilę zerową:

$$x(t=0) = x'(t'=0) = 0 \tag{3}$$

Zakładamy podobnie, że układ $\mathcal{O}'$ porusza się z prędkością v:

$$\vec{r}_{\mathcal{O}'\mathcal{O}} = \vec{v}t \tag{4}$$

Otrzymujemy więc:

$$x = x' + vt \tag{5}$$
$$t = t' \tag{6}$$

czy też równoważnie:

$$x' = x - vt \tag{7}$$
$$t' = t \tag{8}$$

Transformacja Galileusza jest poprawna, jeśli wszystkie elementy systemu fizycznego poruszają się prędkościami znacznie mniejszymi od prędkości światła.

Jeśli w przestrzeni propaguje się cząstka światła, tzn. foton, to stwierdzilibyśmy, jeśli w układzie $\mathcal{O}$ ma on prędkość c, że zgodnie z transformacją Galileusza ma on w układzie $\mathcal{O}'$ prędkość $c - v$. Zgodnie ze szczególną teorią względności (STW) nie jest to jednak prawda. To spostrzeżenie jest dobrym momentem, aby wprowadzić *postulaty szczególnej teorii względności*:

1. Zasada względności orzeka, że *we wszystkich układach inercjalnych prawa fizyki są jednakowe*.
2. Niezmienniczość prędkości światła w próżni można opisać sformułowaniem, że *dla wszystkich obserwatorów inercjalnych prędkość światła w próżni jest taka sama, tzn. nie zależy od kierunku, prędkości źródła ani prędkości obserwatora*.

Postulaty szczególnej teorii względności nie pełnią formy aksjomatów – można je weryfikować eksperymentalnie, tak jak miało to miejsce np. w doświadczeniu Michelsona-Morleya.

Jeśli więc foton porusza się w układzie $\mathcal{O}$ z prędkością c to podobnie w układzie $\mathcal{O}'$ porusza się on z prędkością c. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że emisja fotonu nastąpiła w początku układów współrzędnych, gdy $t = t' = 0$ oraz $x = x' = 0$. Równania trajektorii fotonu w tych układach to:

$$x = ct \tag{9}$$
$$x' = ct' \tag{10}$$

i są one oczywiście niezgodne z transformacją Galileusza. Wyprowadźmy zatem transformację prawidłową, czyli transformację Lorentza.

Załóżmy, że transformacja prawidłowa będzie bardziej ogólna. Dobrym wyborem będzie transformacja liniowa:

$$x = Ax' + Bt \tag{11}$$
$$x' = Cx + Dt' \tag{12}$$

dla $A, B, C, D > 0$. Wciąż obowiązuje równość 3, którą dalej zakładamy bez straty ogólności wniosków z rozumowania.

Rozważmy teraz sytuację, w której w układzie $\mathcal{O}$ porusza się punkt materialny z prędkością v wzdłuż osi $\mathcal{O}x$ i który dla $t = 0$ znajduje się w położeniu $x = 0$. Oznacza to, że cały czas znajduje się on w początku układu współrzędnych $\mathcal{O}'$. Pierwszy wzór transformacji upraszcza się wtedy do równania:

$$vt = Bt \tag{13}$$

z którego wynika, że $B = v$. Zgodnie z zasadą względności, jeśli układ $\mathcal{O}'$ oddala się od $\mathcal{O}$ z prędkością v, to układ $\mathcal{O}$ oddala się od $\mathcal{O}'$ z prędkością $-v$. Można więc powyższe rozumowanie zastosować również do punktu materialnego poruszającego się w układzie odniesienia $\mathcal{O}'$ z prędkością $-v$ a który spoczywa w początku układu $\mathcal{O}$ (tym razem interesuje nas drugi wzór transformacji):

$$-vt' = Dt' \tag{14}$$

Oznacza to, że $D = -v$. Podsumujmy dotychczasowe osiągnięcie. Transformacja dana jest teraz układem:

$$x = Ax' + vt \tag{15}$$
$$x' = Cx - vt' \tag{16}$$

Pierwszy wzór może posłużyć do wyznaczenia położenia w układzie $\mathcal{O}'$ przy znajomości położenia i czasu w $\mathcal{O}$ a drugi – do wyznaczenia położenia w układzie $\mathcal{O}$ przy znajomości położenia i czasu w $\mathcal{O}'$.

Jak usunąć kolejną niewiadomą? Zauważmy, że żaden z układów, tzn. $\mathcal{O}$ oraz $\mathcal{O}'$ nie jest wyróżniony – prawa fizyki są w nich identyczne. Umieśćmy więc w układzie $\mathcal{O}$ spoczywający w nim punkt materialny P w $x_P = -1$ oraz w układzie $\mathcal{O}'$ spoczywający w nim punkt materialny Q w $x'_Q = 1$. Zgodnie z zasadą względności, odległość między tymi punktami liczona według $\mathcal{O}$ w chwili czasu $t = 0$ jest równa odległości liczonej według $\mathcal{O}'$ w chwili czasu $t' = 0$. Korzystając z wzorów na transformację, dla $t = t' = 0$ otrzymujemy:

$$x_P = Ax'_P \tag{17}$$
$$x'_Q = Cx_Q \tag{18}$$

Z drugiej strony, dzięki zasadzie względności otrzymujemy:

$$|PQ| = |P'Q'| \tag{19}$$
$$\Rightarrow \tag{20}$$
$$1 + \frac{1}{C} = \frac{1}{A} + 1 \tag{21}$$

Otrzymaliśmy, że $A = C$. Transformacja prawidłowa ma więc postać:

$$x = Ax' + vt \tag{22}$$
$$x' = Ax - vt' \tag{23}$$

Zauważmy, że dla $A = 1$ otrzymujemy szczególny przypadek – transformację Galileusza.

Z drugiego równania transformacji wyznaczmy x:

$$x = \frac{1}{A}(x' + vt') \tag{24}$$

i wstawmy do pierwszego równania wyznaczając z niego t:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A}(x' + vt') &= Ax' + vt \\ vt &= \frac{1}{A}(x' + vt' - A^2x') \\ t &= \frac{t' + x'\frac{1-A^2}{v}}{A} \end{aligned}$$

Otrzymujemy:

$$t = \frac{t' + x'\frac{1-A^2}{v}}{A} \tag{25}$$
$$x = \frac{x' + vt'}{A} \tag{26}$$

Dalej dla $A = 1$ otrzymujemy transformację Galileusza.

Wielkość A nie jest stałą – jest ona funkcją prędkości:

$$A = A(v) \equiv A_v \tag{27}$$

Wyznaczmy różniczki czasu i położenia.

$$dt = \frac{dt' + \frac{1-A^2}{v}dx'}{A} \tag{28}$$
$$dx = \frac{dx' + vdt'}{A} \tag{29}$$

Załóżmy, że w układzie odniesienia $\mathcal{O}$ porusza się punkt materialny z prędkością $u = dx/dt$. W układzie odniesienia $\mathcal{O}'$ porusza się on z prędkością $u' = dx'/dt'$. Podzielmy więc stronami powyższe różniczki wyznaczone z transformacji:

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{dx' + vdt'}{\cancel{A}} \cdot \frac{\cancel{A}}{dt' + \frac{1-A^2}{v}dx'} \\ &= \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{1-A^2}{v}\frac{dx'}{dt'}} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór na składanie prędkości:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{1-A_v^2}{v}u'} \tag{30}$$

który dla $A = 1$ redukuje się do znanej postaci nierelatywistycznej. Powiążmy teraz z ww. punktem materialnym układ odniesienia $\mathcal{O}''$. Układ $\mathcal{O}''$ porusza się więc względem $\mathcal{O}$ z prędkością u oraz względem $\mathcal{O}'$ z prędkością u'. Dalej, z zasady względności wynika, że układ $\mathcal{O}$ porusza się względem $\mathcal{O}'$ z prędkością $-v$ oraz względem $\mathcal{O}''$ z prędkością $-u$. Ze wzoru na składanie prędkości wynika, że układ $\mathcal{O}$ porusza się względem $\mathcal{O}''$ z prędkością:

$$-u = \frac{-v - u'}{1 + \frac{1-A^2_{-u'}}{-u'} \cdot (-v)} \tag{31}$$

Oznacza to, że dla dowolnych v oraz $-u'$, które co do wartości są mniejsze od c, zachodzi:

$$\begin{aligned} \frac{1 - A_v^2}{v}u' &= \frac{1 - A^2_{-u'}}{u'}v \\ \frac{1 - A_v^2}{v^2} &= \frac{1 - A^2_{-u'}}{(-u')^2} \end{aligned} \tag{32}$$

Oznacza to, że wyrażenie:

$$\frac{1 - A^2}{v^2} \equiv \mathcal{C} = \text{const} \tag{33}$$

jest stałą. Otrzymujemy:

$$A = \sqrt{1 - \mathcal{C}v^2} \tag{34}$$

oraz:

$$t = \frac{t' + \mathcal{C}vx'}{\sqrt{1 - \mathcal{C}v^2}} \tag{35}$$
$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \mathcal{C}v^2}} \tag{36}$$

Przyjrzyjmy się jeszcze wzorowi 34. Chcielibyśmy, aby wyrażenie pod pierwiastkiem było nieujemne:

$$1 - \mathcal{C}v^2 \geqslant 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\mathcal{C}} \geqslant v^2 \tag{37}$$

Na podstawie postulatów szczególnej teorii względności oraz wniosków z równań Maxwella należy przyjąć:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{c^2} \tag{38}$$

Otrzymujemy transformację Lorentza:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{39}$$
$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{40}$$
$$y = y' \tag{41}$$
$$z = z' \tag{42}$$

Transformację odwrotną można otrzymać zamieniając v na $-v$:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{43}$$
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{44}$$
$$y' = y \tag{45}$$
$$z' = z \tag{46}$$

Powyższe wzory mogą być łatwiejsze do zapamiętania gdy wprowadzi się współczynnik prędkości β i czynnik Lorentza γ:

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{47}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{48}$$

Wtedy postać **transformacji Lorentza położenia i czasu** miedzy dwoma układami o równoległych osiach, gdy jeden z układów porusza się względem drugiego wzdłuż osi $\mathcal{O}x$ jest następująca:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \tag{49}$$
$$x = \gamma(x' + \beta ct') \tag{50}$$
$$y = y' \tag{51}$$
$$z = z' \tag{52}$$

a **odwrotna transformacja Lorentza** ma postać:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{53}$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct) \tag{54}$$
$$y' = y \tag{55}$$
$$z' = z \tag{56}$$

2 Dylatacja czasu

Słowo *dylatacja* oznacza zwiększenie się długości czegoś. W przypadku szczególnej teorii względności mówimy o dylatacji czasu, tylko co to oznacza?

Rozważmy zegar świetlny – urządzenie składające się z dwóch idealnych luster uieszczonych równolegle do siebie, w którym przemieszcza się foton odbijając się od luster nieskończonie wiele razy. Niech zegar świetlny porusza się względem obserwatora z prędkością v równoległą do luster zegara. Załóżmy, że odległość pomiędzy lustrami wynosi L. Załóżmy ponadto, że jedno „tyknięcie" zegara oznacza czas, w którym foton wykona dwie odległości pomiędzy lustrami (tzn. jest to czas jaki zajmie fotonowi pokonanie drogi od dolnego lustra do górnego i z powrotem). We własnym układzie odniesienia zegara świetlnego $\mathcal{O}'$ jedno „tyknięcie" jest równe:

$$\Delta t' = \frac{2L}{c} \tag{57}$$

Dla układu $\mathcal{O}$ tyknięcia są jednak dłuższe, ponieważ foton nie pokonuje dystansu L, tylko dystans D, który jest dłuższy:

$$\Delta t = \frac{2D}{c} \tag{58}$$

Można wyznaczyć długość D:

$$D = \sqrt{\left(v \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + L^2} \tag{59}$$

Eliminując zmienne D oraz L:

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\left(v \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + L^2}$$
$$\Delta t' = \frac{2L}{c} \Rightarrow L = \frac{c}{2}\Delta t'$$
$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\left(v \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\Delta t'\right)^2}$$
$$(\Delta t)^2 = \left(\frac{\cancel{2}}{c} \cdot v \cdot \frac{\Delta t}{\cancel{2}}\right)^2 + \left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{2}}\Delta t'\right)^2$$
$$(\Delta t)^2 - \left(\frac{v\Delta t}{c}\right)^2 = (\Delta t')^2$$

otrzymujemy wzór na dylatację czasu:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t' \tag{60}$$

Czy można otrzymać ten wynik wprost z transformacji Lorentza? Tak. Przekształćmy odpowiedni wzór transformacji Lorentza do postaci:

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta \Delta x') \tag{61}$$

Zauważmy, że w układzie zegara $\Delta x' = 0$ (foton w układzie własnym zegara porusza się pionowo tylko od lustra do lustra i nie przesuwa się w poziomie), co od razu dawało odpowiedni wynik na dylatację czasu.

Jest tylko jeden problem. Nawet rozumiejąc dylatację czasu dalej nie rozumiemy czym jest czas...

3 Skrócenie długości

Omówmy teraz skrócenie Lorentza-Fitzgeralda. W układzie $\mathcal{O}'$ spoczywa pręt o długości L_0, który jest równoległy do osi $\mathcal{O}x'$ tego układu. Pręt oraz układ $\mathcal{O}'$ porusza się względem układu $\mathcal{O}$ wzdłuż osi $\mathcal{O}x$ z prędkością v.

Chcemy wykonać pomiar długości (odległości). Pomiar polega na wyznaczeniu położenia początka (x_1 lub x_1') i końca (x_2 lub x_2') pręta. Zauważmy, że w układzie $\mathcal{O}'$ pręt spoczywa, więc jego długość w tym układzie jest równa $L' = x_2'(ct_2') - x_1'(ct_1')$ dla dowolnych chwil czasu ct_1' oraz ct_2' ($ct_1' = ct_2'$ lub $ct_1' \neq ct_2'$). W układzie $\mathcal{O}$

pręt porusza się z prędkością v, dlatego jego długość to $L = x_2(ct) - x_1(ct)$ (tzn. pomiar położenia początku i końca pręta należy wykonać *jednocześnie* w $\mathcal{O}$). Przypomnijmy, że według transformacji Lorentza:

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \tag{62}$$

Wstawmy to do wzoru na długość L:

$$\begin{aligned} L &= x_2(ct) - x_1(ct) \\ &= \gamma(x_2'(ct_2') + \beta ct_2') - \gamma(x_1'(ct_1') + \beta ct_1') \\ &= \gamma(L' + \beta(ct_2' - ct_1')) \end{aligned} \tag{63}$$

Należy więc wyznaczyć różnicę $ct_2' - ct_1'$. Przypomnijmy, że według transformacji Lorentza:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{64}$$

Oznacza to, że:

$$\begin{aligned} ct_2' - ct_1' &= \gamma(ct - \beta x_2(ct)) - \gamma(ct - \beta x_1(ct)) \\ &= -\gamma\beta L \end{aligned} \tag{65}$$

Wstawmy to do wzoru na długość L:

$$\begin{aligned} L &= \gamma(L' - \gamma\beta^2 L) \\ L \cdot \left(1 + \gamma^2\beta^2\right) &= \gamma L' \end{aligned}$$

Wystarczy przekształcić wyrażenie w nawiasach okrągłych:

$$\begin{aligned} 1 + \gamma^2\beta^2 &= 1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \\ &= \frac{1 - \beta^2 + \beta^2}{1-\beta^2} \\ &= \gamma^2 \end{aligned} \tag{66}$$

Otrzymujemy więc:

$$L \cdot \gamma^2 = \gamma L'$$

co w ostateczności wiedzie do wzoru na skrócenie Lorentza-Fitzgeralda:

$$L = \frac{L'}{\gamma} \tag{67}$$

Obserwator odnotowuje skrócenie poruszającego się pręta.

4 Transformacja prędkości

A co jeśli w układzie $\mathcal{O}'$ porusza się jakiś obiekt z prędkością u'? Jak przetransformować jego prędkość do układu $\mathcal{O}$, tzn. wyznaczyć u na podstawie u'? Ten problem poruszyliśmy już przy okazji transformacji Lorentza, ale zróbmy to jeszcze raz, tym razem dla wszystkich jej równań.

Wyznaczmy odpowiednie różniczki na podstawie wzorów określających transformację Lorentza:

$$cdt = \gamma(cdt' + \beta dx') \tag{68}$$
$$dx = \gamma(dx' + \beta cdt') \tag{69}$$
$$dy = dy' \tag{70}$$
$$dz = dz' \tag{71}$$

Podzielmy ostatnie trzy równania przez pierwsze równanie:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + \beta cdt')}{\gamma(cdt' + \beta dx')} \tag{72}$$
$$\frac{1}{c} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(cdt' + \beta dx')} \tag{73}$$
$$\frac{1}{c} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma(cdt' + \beta dx')} \tag{74}$$

Skorzystajmy z oznaczeń:

$$\vec{u} = [u_x, u_y, u_z] = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right] \tag{75}$$
$$\vec{u}' = [u_x', u_y', u_z'] = \left[\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right] \tag{76}$$

Dzieląc odpowiednio liczniki i mianowniki oraz wykorzystując nowe oznaczenia otrzymujemy wzory na **relatywistyczne składanie prędkości**:

$$u_x = \frac{u_x' + \beta c}{1 + \beta u_x'/c} \tag{77}$$
$$u_y = \frac{u_y'}{\gamma(1 + \beta u_x'/c)} \tag{78}$$
$$u_z = \frac{u_z'}{\gamma(1 + \beta u_x'/c)} \tag{79}$$

Przeprowadzając to samo rozumowanie dla odwrotnej transformacji Lorentza (lub podstawiając $\beta \to -\beta$) otrzymujemy:

$$u_x' = \frac{u_x - \beta c}{1 - \beta u_x/c} \tag{80}$$
$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - \beta u_x/c)} \tag{81}$$
$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - \beta u_x/c)} \tag{82}$$

Zauważmy, że postać wzorów jest taka, a nie inna, ponieważ układ $\mathcal{O}'$ porusza się względem układu $\mathcal{O}$ wzdłuż osi $\mathcal{O}x$ z prędkością v (tzn. oś $\mathcal{O}x$ jest wyróżniona).

5 Podłużny relatywistyczny efekt Dopplera

Rozważmy następującą sytuację. W kierunku obserwatora spoczywającego w układzie odniesienia $\mathcal{O}$ porusza się z prędkością v źródło promieniowania elektromagnetycznego. Wraz ze źródłem związany jest jego własny układ odniesienia $\mathcal{O}'$. Promieniowanie elektromagnetyczne jest falą, która ma długość i częstotliwość. Możemy to jednak uprościć, zakładając, że źródło emituje w regularnych odstępach czasu $\Delta T'$ paczki fotonów (błyski światła), gdzie $\Delta T'$ jest mierzone w układzie własnym źródła $\mathcal{O}'$. Oznacza to też, że w układzie własnym źródła $\mathcal{O}'$ częstotliwość emisji jest równa $f' = 1/\Delta T'$. Zastanówmy się, jaka jest częstotliwość docierających do oczu obserwatora błysków?

Zauważmy, że pytanie nie brzmi „jaka jest częstotliwość błysków w układzie odniesienia obserwatora $\mathcal{O}$?”, bowiem na to pytanie odpowiedzieliśmy pośrednio analizując dylatację czasu. Interesuje nas coś więcej, tzn. jak często błyski docierają do oczu obserwatora a ten problem to już nie jest tylko dylatacja czasu (która wciąż zachodzi), ale przede wszystkim relatywistyczny efekt Dopplera.

W związku z dylatacją czasu jest więcej czasu pomiędzy błyskami w układzie odniesienia obserwatora:

$$\Delta T = \gamma \Delta T' \;\Rightarrow\; f = \frac{f'}{\gamma} \tag{83}$$

Dylatacja czasu zmniejsza częstotliwość błysków docierających do oka obserwatora, ale nie jest to jeszcze finalna odpowiedź, ponieważ częstotliwość f oznacza częstotliwość błysków wyznaczaną w układzie odniesienia $\mathcal{O}'$ (i nie oznacza częstotliwości docierania do oka obserwatora!).

Relatywistyczny efekt Dopplera jest podobny do akustycznego efektu Dopplera – wynika on z ruchu źródła. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że źródło zbliża się do obserwatora. Oznacza to, że kolejne błyski mają mniejszy dystans do pokonania aby dotrzeć do oka obserwatora. Ten efekt zwiększa częstotliwość błysków docierających do oka.

Gdy fotony z pierwszego błysku zdążyły pokonać dystans w układzie odniesienia obserwatora równy $c\Delta T = c\gamma\Delta T'$, następuje kolejny błysk. W tym czasie, pomiędzy kolejnymi błyskami, źródło zdąży pokonać dystans $v\Delta T = v\gamma\Delta T'$ w kierunku obserwatora mierzony w układzie obserwatora.

W chwili drugiego błysku, nowo wyemitowane fotony oraz źródło znajdują się w odległości mierzonej według układu odniesienia obserwatora równej:

$$(c - v)\Delta T = (c - v)\gamma\Delta T' \tag{84}$$

za fotonami z pierwszego błysku. Ten rezultat jest identyczny dla wszystkich kolejnych błysków światła, tzn. dla błysków o numerach n oraz $n+1$.

Ile czasu ΔT^* będzie czekał obserwator od zobaczenia pierwszego błysku aż do zobaczenia drugiego błysku? Ten czas jest równy odległości pomiędzy paczkami fotonów wyznaczonej powyżej podzielonej przez prędkość rozchodzenia się światła:

$$\begin{aligned} \Delta T^* &= \frac{1}{c}(c - v)\gamma\Delta T' \\ &= \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta T' \\ &= \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\Delta T' \end{aligned}$$

gdzie $\beta = v/c$. W związku z tym obserwowaną częstotliwością jest:

$$f^* = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f'$$

Przykład 1. Po spędzeniu dziesięciu tygodni na eksploracji króliczej nory, Alicja znowu zachciała zobaczyć wielki świat. Spożywszy ciastko z napisem „Zjedz mnie”, wróciła do swoich natualnych rozmiarów i po małych perypetiach znalazła się z powrotem przed wejściem do nory, do której wpadła przy okazji pierwszego kolokwium z fizyki. Na polanie przed norą zaobserwowała ona zmierzającego w jej kierunku Relatywistycznego Białego Królika poruszającego się rakietą z prędkością $v = c/7$. Królik dysponuje zegarkiem kieszonkowym i krzycząc „Ojej! Ojej! Spóźnię się!” biega raz w jedną a raz w drugą stronę rakiety z prędkością względem tejże rakiety równą $u' = c/9$. Królik jest ubrany w niezwykłą kamizelkę, która działa jak zwierciadło, a Alicja jest w stanie przez iluminatory (tzn. okna statku kosmicznego) zobaczyć Królika w rakiecie a nawet swoje odbicie w jego kamizelce. W jakim kolorze Alicja zobaczy odbicie swojej monochromatycznej czerwonej sukienki ($f_0 = 450\,\mathrm{THz}$), gdy Królik biegnie zgodnie z ruchem rakiety a w jakim, gdy biegnie on przeciwnie? Tabela zakresów częstotliwości odpowiadających poszczególnym kolorom znajduje się poniżej. Jeśli otrzymana częstotliwość leży poza zakresem podanym w tabeli, uznaj, że sukienka ma kolor czarny.

kolor	czerwony	pomarańczowy	żółty	zielony	cyjan	niebieski	fioletowy
f [THz]	400 480	480 510	510 530	530 600	600 620	620 670	670 790

□

Rozwiązanie. Podwójny podłużny relatywistyczny efekt Dopplera jest opisywany równoważnym wzorem co akustyczny efekt Dopplera, ponieważ wszystkie rozważania można przeprowadzić w układzie odniesienia Alicji (alternatywnie należy zaaplikować dwa razy wzór na pojedynczy relatywistyczny efekt Dopplera, tzn. uwzględniający dylatację czasu):

$$f = \frac{1+\beta}{1-\beta} f_0 \tag{85}$$

gdzie f_0 jest częstotliwością światła odpowiadającą kolorowi czerwonemu sukienki Alicji a f jest częstotliwością światła widzianego w odbiciu od kamizelki Królika. Wartość parametru szybkości β należy wyznaczyć z wzorów na relatywistyczne składanie prędkości. W szczególności, w układzie odniesienia Alicji stojącej na polanie prędkość Królika dana jest wzorem:

$$u_\pm = \frac{\pm u' + v}{1 \pm u'v/c^2} \;\Rightarrow\; \beta_\pm = \frac{(\pm u' + v)/c}{1 \pm u'v/c^2} \tag{86}$$

gdzie znak $+$ odpowiada sytuacji w której Królik biegnie zgodnie z ruchem rakiety a znak $-$ odpowiada sytuacji gdy biegnie on przeciwnie. Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\beta_\pm &= \frac{\pm 1/9 + 1/7}{1 \pm 1/63} \in \left\{ \frac{1}{4}^+, \frac{1}{31}^- \right\} \\
\frac{f_\pm}{f_0} &\in \left\{ \frac{5}{3}^+, \frac{16}{15}^- \right\} \\
f_+ &= \frac{5}{3} \cdot 450\,\mathrm{THz} = 750\,\mathrm{THz} \\
f_- &= \frac{16}{15} \cdot 450\,\mathrm{THz} = 480\,\mathrm{THz}
\end{aligned}$$

Alicja widzi swoją sukienkę w kolorze fioletowym lub pomarańczowo-czerwonym. ■