Bartłomiej Kamiński (10p)

Zad. 1

Wiemy, że energia stanu podstawowego $E_0 = \frac{3}{5} N E_F$

W $T=0$, $U = E_0 = \frac{3}{5} N E_F$

Obliczmy wielki potencjał termodynamiczny:

$\Omega = U - TS - \mu N$

Wiemy, że $T=0$, oraz w $T=0$ potencjał chemiczny $\mu = E_F$:

$\Omega = U - 0 - N E_F = -\frac{2}{5} N E_F$

Z drugiej strony, $\Omega = -pV$, a więc:

$pV = \frac{2}{5} N E_F$ ✓ (4p)

Wiemy też, że $\frac{N}{V} = \int_0^{E_F} g(E)\, dE$ (w temperaturze 0K)

gdzie $g(E) = \frac{2s+1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E}$ – gęstość stanów w nierelatywistycznym gazie 3D

$2s+1 = 2 \Rightarrow g(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E}$

$\frac{N}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{E_F} \sqrt{E}\, dE = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{3/2}$

$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$

Stąd, $pV = \frac{2}{5} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3}$

$V^{5/3} = \frac{\hbar^2}{5m} \frac{N^{5/3}}{p} (3\pi^2)^{2/3}$

$V(p,N)_{T=0} = \left(\frac{\hbar^2}{5m}\right)^{3/5} \frac{N}{p^{3/5}} (3\pi^2)^{2/5}$

$-\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{N,T} = \left(\frac{\hbar^2}{5m}\right)^{3/5} \cdot \frac{3}{5} \frac{N}{p^{8/5}} (3\pi^2)^{2/5}$

$-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{N,T} = \frac{3}{5p}$

$K_T = \frac{3}{5p} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{V}{N}\right)^{5/3} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(3\pi^2)^{2/3}} = \underline{\frac{3}{(3\pi^2)^{2/3}} \frac{m}{\hbar^2} \left(\frac{V}{N}\right)^{5/3}}$

Bartłomiej Kamiński

**10**

Zad. 2

1) Funkcja falowa elektronu w prostopadłościennej nieskończonej studni potencjału:

$$\psi(x,y,z) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right)\sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right)\sin\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right)$$

$n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$

Energia:

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_e}\left[\left(\frac{n_x\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{L_z}\right)^2\right]}_{E_{n_x n_y n_z}}\psi$$

5

2) Dno studni potencjału, dla której obliczyłem widmo energetyczne, jest jednocześnie dnem pasma przewodnictwa GaAs. Stąd energia uwięzienia:

$$E_e = E_{111} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left[\left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_z}\right)^2\right]$$

Gdy $L_x = L_y = L_z = L$:

$$E = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2m_e L^2}$$

2

Podstawiając dane, otrzymujemy:

$$E_e = \frac{3\cdot(1{,}05\cdot10^{-34})^2\cdot 3{,}14^2}{2\cdot 0{,}067\cdot 9{,}1\cdot10^{-31}\cdot(10^{-8})^2}\ \mathrm{J} \approx \frac{30\cdot 1{,}1\cdot 10^{-68}}{1{,}2\cdot 10^{-47}}\ \mathrm{J} = \frac{3{,}3}{1{,}2}\cdot 10^{-20}\ \mathrm{J} \approx 2{,}8\cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}$$

$E_e \approx$ ~~[illegible]~~ $0{,}17\ \mathrm{eV}$

3) Dla dziury, energia uwięzienia wyniesie:

$$E_h = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2m_h L^2} = \frac{m_e}{m_h}E_e = \frac{0{,}067}{0{,}45}\cdot 0{,}17\ \mathrm{eV} \approx 0{,}024\ \mathrm{eV}$$

Stąd przerwa energetyczna kropki zwiększy się o $E_e + E_h \approx 0{,}2\ \mathrm{eV}$

Rydberg efektywny:

$$Ry^* = \frac{\mu}{\varepsilon_r^2} Ry$$

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{0,45} + \frac{1}{0,067}} = \qquad 0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} \qquad 0,067 \simeq \frac{2}{30}$$

$$= \frac{1}{\frac{20}{9} + \frac{30}{2}} = \frac{1}{\frac{318}{18}} = \frac{18}{318} = \frac{3}{53} \simeq 0,06$$

$$\varepsilon_r^2 = 13,1^2 = 171,63$$

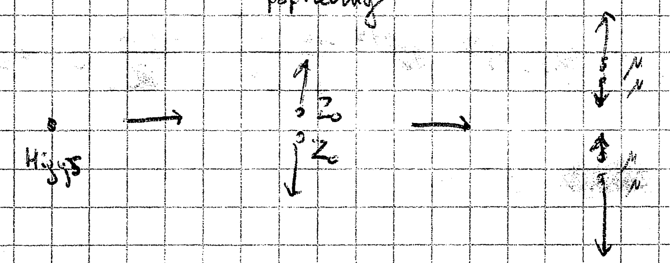
$$Ry^* \simeq \frac{0,06}{171,63} \cdot 13,6\,eV \simeq \frac{6 \cdot 13,6}{17,163}\,meV \simeq 4,7\,meV$$

Jest to dużo mniej, niż zmiana przerwy energetycznej w kropce.

Bartłomiej Kamiński 10p ok

Zad. 3

Maksymalny pęd poprzeczny mionu wystąpi wtedy, gdy rozpady zajdą następująco:




Niech w rozpadzie Higgsa bozony $Z_0$ uzyskają pospieszności $\eta_Z$, a w rozpadzie $Z_0$ miony uzyskają pospieszności $\eta'_\mu$ (w układzie spoczynkowym $Z_0$). Wówczas w układzie detektora miony będą mieć pospieszności:

$$\eta_\mu = \eta_Z + \eta'_\mu$$ (te o maksymalnym pędzie poprzecznym)

Energia cząstki: $E = m\gamma = m\cosh(\eta)$

Pęd cząstki: $p = m\gamma\beta = m\sinh(\eta)$

$\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \beta = v,\ c = 1\right)$

Zatem maksymalny pęd poprzeczny mionu:

$$p_\mu = m_\mu \sinh(\eta_\mu) = m_\mu \sinh(\eta'_\mu + \eta_Z) = m_\mu\left[\sinh(\eta'_\mu)\cosh(\eta_Z) + \sinh(\eta_Z)\cosh(\eta'_\mu)\right]$$

Z zasady zachowania energii:

$$\cosh \eta_Z = \frac{M}{2M_Z} = \gamma_Z$$

$$\cosh \eta'_\mu = \frac{M_Z}{2m_\mu} = \gamma'_\mu$$

$$\sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$$

Stąd:

$$p_\mu = m_\mu\left(\gamma_Z\sqrt{{\gamma'_\mu}^2 - 1} + \gamma'_\mu\sqrt{\gamma_Z^2 - 1}\right) = m_\mu\left(\frac{M}{2M_Z}\sqrt{\frac{M_Z^2}{4m_\mu^2} - 1} + \frac{M_Z}{2m_\mu}\sqrt{\frac{M^2}{4M_Z^2} - 1}\right)$$

Ponieważ $m_\mu << M_Z$, $\sqrt{\frac{M_Z^2}{4m_\mu^2} - 1} \simeq \frac{M_Z}{2m_\mu}$, zatem:

$$p_\mu \simeq \frac{M}{4} + \frac{M_Z}{2}\sqrt{\frac{M^2}{4M_Z^2} - 1}$$

Promień krzywizny $R = \dfrac{p_\mu}{eB}$

1) $X = 0$

$M = 2M_2$

$$p_\mu = \frac{M}{4} = \frac{M_2}{2} = 46\ \frac{GeV}{c} = \frac{46 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}\ \frac{kg \cdot m}{Cs} \cdot e \simeq 153\ \frac{kg \cdot m}{Cs}$$

$$R = \frac{p_\mu}{eB} = \frac{153}{4}\ m \simeq 38\ m$$

2) $X = M_2$

$M = 4M_2$

$$p_\mu = \frac{M}{4} + \frac{M_2}{2}\sqrt{\left(\frac{M}{2M_2}\right)^2 - 1} = M_2 + \frac{M_2}{2}\sqrt{3} \simeq 1{,}866 \cdot 92\ \frac{GeV}{c} =$$

$$= 171{,}672\ \frac{GeV}{c} \simeq 572\ e \cdot \frac{kg \cdot m}{Cs}$$

$$R = \frac{p_\mu}{eB} = \frac{572}{4}\ m = 143\ m$$