

**„Fizyka materii skondensowanej i struktur półprzewodnikowych”**  
**Wykład 8 (05.05.2021)**

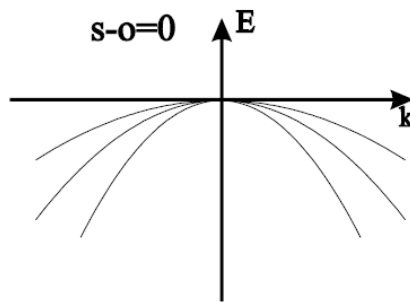
Tomasz Kazimierczuk

Zakład Fizyki Ciała Stałego  
Instytut Fizyki Doświadczalnej  
Wydział Fizyki  
Uniwersytet Warszawski

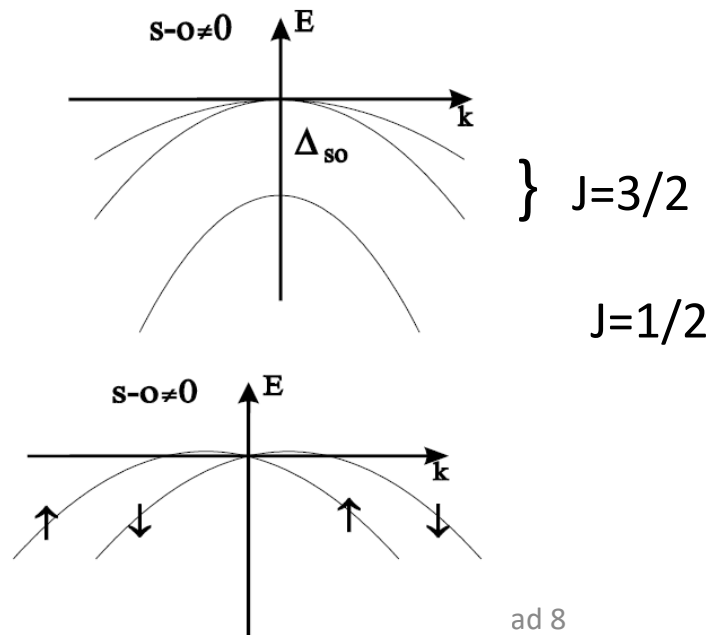
Na podstawie materiałów prof. M. Baja

# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

- W półprzewodnikach grupy IV oraz w związkach półprzewodnikowych  $A^{III}B^V$  i  $A^{II}B^{VI}$  wierzchołek pasma walencyjnego znajduje się w punkcie  $\Gamma$
- Pasma utworzone jest głównie ze stanów typu p (tzn.  $L=1$ ) anionu
- 6-krotna degeneracja (z uwzględnieniem spinu) jest zniesiona przez oddziaływanie spin-orbita

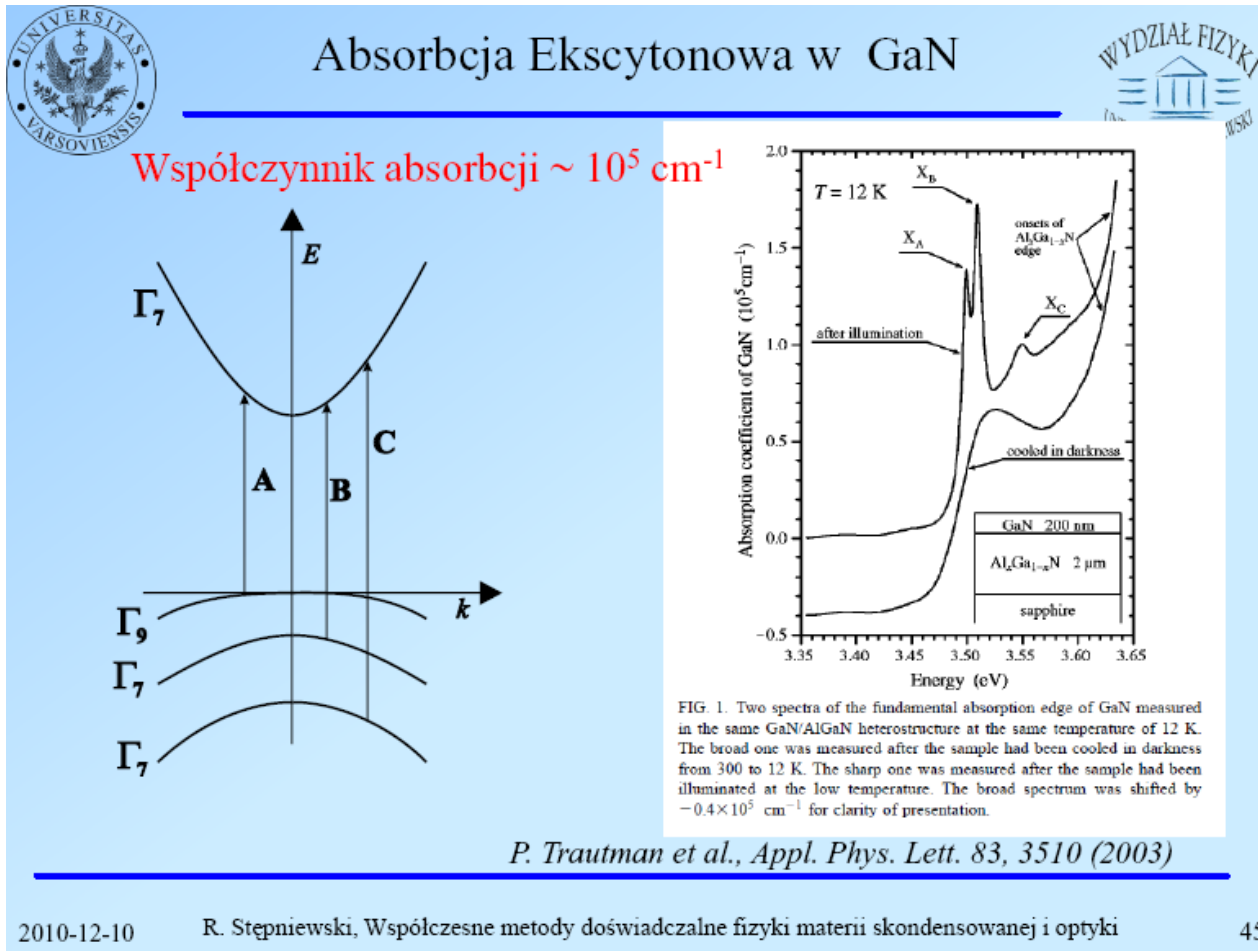


Bez spinu  $E(k)=E(-k)$   
Jeżeli uwzględnimy spin  $E_{\uparrow}(k)=E_{\downarrow}(-k)$



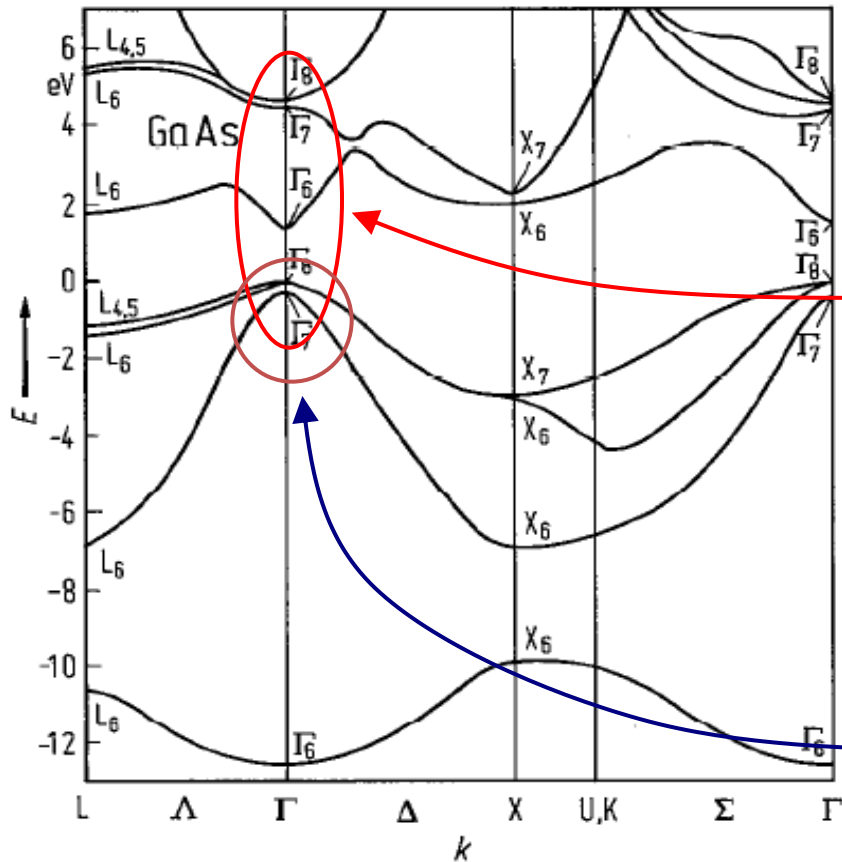
# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

- Przy obniżeniu symetrii punktowej kryształu (wurcyt), 4-krotna degeneracja stanów  $J=3/2$  jest zniesiona



# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

G. Dresselhaus, A.F. Kip, C. Kittel: Phys. Rev. **98**, 368 (1955), także np.: P. Yu, M. Cardona „Fundamentals of Semiconductors”



- Metoda  $k \cdot p$  z oddziaływaniem spin-orbita
- Pod uwagę brane: pasma walencyjne  $\Gamma_7$ ,  $\Gamma_8$  oraz najbliższe pasma przewodnictwa  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_7$ ,  $\Gamma_8$  – razem 14 stanów
- Wpływ pasm przewodnictwa uwzględniany w 2. rzędzie rachunku zaburzeń, podczas gdy hamiltonian  $k \cdot p$  diagonalizowany w bazie funkcji pasm walencyjnych (6 funkcji, macierz 6x6)

Chelikowsky, J.R., Cohen, L.: Phys. Rev. B **14**, 556 (1976)

# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

- Z atomowych stanów p:  $|x\rangle$ ,  $|y\rangle$ ,  $|z\rangle$

można utworzyć stany własne operatora rzutu momentu pędu na oś z:

$$|l, m_l\rangle = \begin{cases} |1, 1\rangle = -(|x\rangle + i|y\rangle)/\sqrt{2} \\ |1, 0\rangle = |z\rangle \\ |1, -1\rangle = (|x\rangle - i|y\rangle)/\sqrt{2} \end{cases}$$

- Oddziaływanie spin-orbita  $H_{so} = \lambda \hat{l} \cdot \hat{s}$  prowadzi do tego, że dobrymi liczbami kwantowymi stają się  $j$  i  $m_j$  i właściwą bazą stają się funkcje:

$$|j, m_j\rangle = \begin{cases} |3/2, 3/2\rangle = |1, 1\rangle \uparrow \\ |3/2, 1/2\rangle = (|1, 1\rangle \downarrow + \sqrt{2}|1, 0\rangle \uparrow)/\sqrt{3} \\ |3/2, -1/2\rangle = (|1, -1\rangle \uparrow + \sqrt{2}|1, 0\rangle \downarrow)/\sqrt{3} \\ |3/2, -3/2\rangle = |1, -1\rangle \downarrow \\ |1/2, 1/2\rangle = (|1, 0\rangle \uparrow - \sqrt{2}|1, 1\rangle \downarrow)/\sqrt{3} \\ |1/2, -1/2\rangle = (|1, 0\rangle \downarrow - \sqrt{2}|1, -1\rangle \uparrow)/\sqrt{3} \end{cases}$$

# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

- Taka samą procedurę możemy przeprowadzić dla funkcji stanów elektronowych pasma walencyjnego z punktu  $\Gamma$ :  $|X\rangle$ ,  $|Y\rangle$ ,  $|Z\rangle$ , które *transformują się* pod działaniem operacji grupy punktowej kryształu *jak atomowe stany p*. Będziemy wtedy mówili o  $p$  – podobnych stanach, a także, po przeprowadzeniu takiej samej operacji jak przy tworzeniu atomowych funkcji  $|j, m_j\rangle$  (przy dodaniu s-o), o ( $j = 3/2$ ) – podobnych stanach czy ( $j = 1/2$ ) – podobnych stanach
- Takich  $|j, m_j\rangle$  – podobnych stanów można teraz użyć jako bazy do diagonalizacji hamiltonianu  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$

# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

Wyniki takiej procedury (uwzględniającej wyższe pasma w 2. rzędzie rachunku zaburzeń):

- pasmo  $\Gamma_7$  odszczepione spin-orbitalnie

$$E_{so} = -\Delta_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{P^2}{m(E_0 + \Delta_0)} + \frac{2Q^2}{m(E'_0 + \Delta_0)} \right) \right]$$

- dwa pasma  $\Gamma_8$  (dziury ciężkie i lekkie):

$$E_{\pm} = Ak^2 \pm \sqrt{B^2 k^4 + C^2 (k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2)}$$

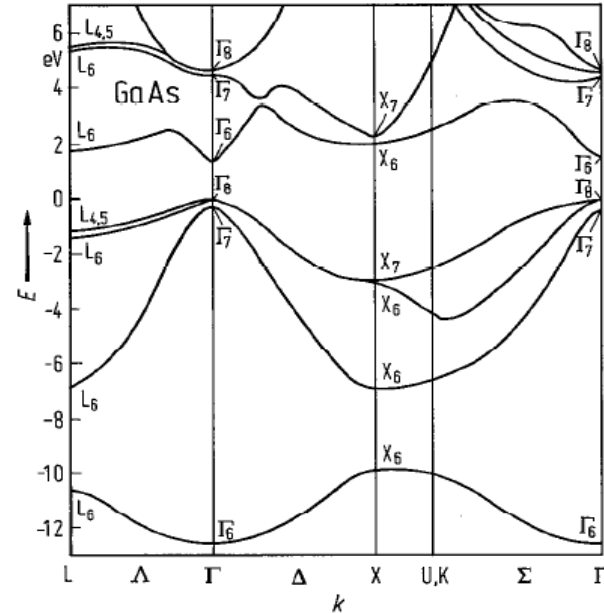
# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

gdzie parametry  $A, B, C$ :

$$\frac{2m}{\hbar^2} A = 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{P^2}{mE_0} + \frac{2Q^2}{mE'_0} \right)$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} B = \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{-P^2}{mE_0} \right) + \left( \frac{Q^2}{mE'_0} \right) \right]$$

$$\left( \frac{2m}{\hbar^2} C \right)^2 = \frac{16P^2 Q^2}{3m^2 E_0 E'_0}$$



$$iP = \langle X | \hat{p}_x | \Gamma_{6c} \rangle$$

– element macierzowy operatora pędu pomiędzy funkcjami typu  $p$  pasma walencyjnego i funkcją pasma przewodnictwa  $\Gamma_{6c}$

$$iQ = \langle X | \hat{p}_y | \Gamma_{8c}(z) \rangle$$

– element macierzowy operatora pędu pomiędzy funkcjami typu  $p$  pasma walencyjnego i funkcjami typu  $p$  pasma przewodnictwa  $\Gamma_{8c}$

$$E_0, E'_0, \Delta_0$$

– przerwa  $\Gamma_{6c} - \Gamma_{8v}$ ,  $\Gamma_{8c} - \Gamma_{8v}$  i rozszczepienie spin-orbitalne  $\Gamma_{8v} - \Gamma_{7v}$



# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

Wyniki takiej procedury (uwzględniającej wyższe pasma w 2. rzędzie rachunku zaburzeń):

- pasmo  $\Gamma_7$  odszczepione spin-orbitalnie

$$E_{so} = -\Delta_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{P^2}{m(E_0 + \Delta_0)} + \frac{2Q^2}{m(E'_0 + \Delta_0)} \right) \right]$$

- dwa pasma  $\Gamma_8$  (dziury ciężkie i lekkie):

$$E_{\pm} = Ak^2 \pm \sqrt{B^2 k^4 + C^2 (k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2)}$$

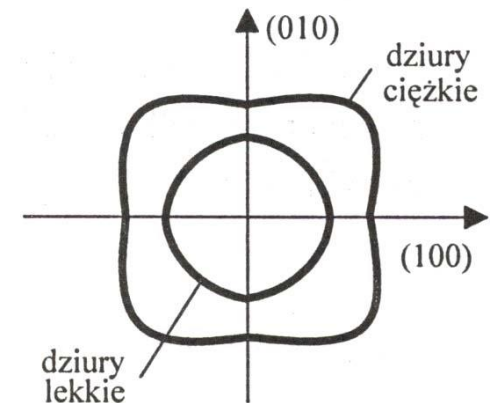
# Struktura wierzchołka pasma walencyjnego półprzewodników grupy IV

## Podsumowanie:

- Wszystkie pasma w ramach zastosowanych przybliżeń są w pobliżu punktu  $\Gamma$  paraboliczne
- Pasma  $\Gamma_{7v}$  odszczepione spin-orbitalnie jest sferyczne
- Pasma  $\Gamma_{8v}$  są silnie niesferyczne, „pofałdowane” (tzw. warping) – dotyczy to zarówno dziur ciężkich jak i lekkich. Masa efektywna zależy od kierunku i nie da się traktować jej jak „tensor masy efektywnej” w rozumieniu definicji wprowadzonej przy omawianiu metody  $k \cdot p$ :

$$E_n(\vec{k}) \approx E_n(0) + \sum_{i,j} \left( \frac{1}{m_{ij}^*} \right)_n \frac{\hbar^2 k_i k_j}{2}$$

Przekrój przez powierzchnie stałej energii w paśmie walencyjnym  $\Gamma_8$



# **KWAZI-KLASYCZNY OPIS DYNAMIKI ELEKTRONÓW W CIELE STAŁYM**

# Prędkość grupowa paczki falowej

- Funkcja Blocha zależna od czasu ( $\omega = E/\hbar$ ):

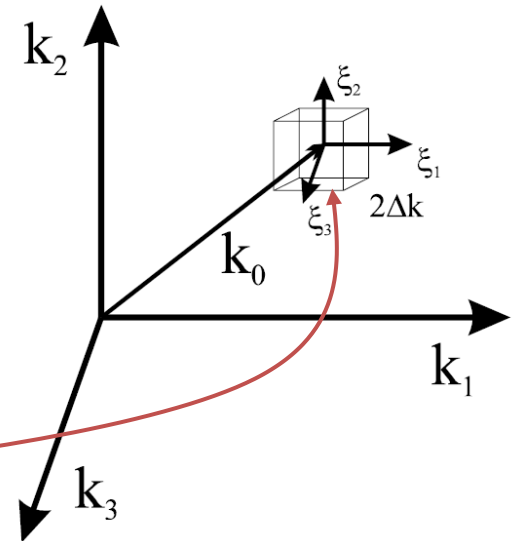
$$\Psi_{n,\vec{k}}(\vec{r}, t) = \varphi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} = u_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

opisuje elektron **całkowicie zdelokalizowany** – prawdopodobieństwo znalezienia go w każdej z komórek elementarnych  $\Omega$  jest takie samo:

$$\int_{\Omega} \Psi_{n,\vec{k}}^*(\vec{r}, t) \cdot \Psi_{n,\vec{k}}(\vec{r}, t) d_3r = \int_{\Omega} \varphi_{n,\vec{k}}^*(\vec{r}) \cdot \varphi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) d_3r = const$$

- Paczka falowa** utworzona ze stanów n-tego pasma z otoczenia  $\vec{k}_0$  ( $\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{\xi}$ ) będzie tworem zlokalizowanym, ale nie będzie odpowiadała stanowi własnemu hamiltonianu (wskaźnik  $n$  opuszczony):

$$\psi(\vec{r}, t) = A \int_{\Delta V_k} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)} d_3k$$



# Prędkość grupowa paczki falowej

- Ponieważ:
  - energia jest analityczną funkcją  $\vec{k}$  :  $\omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k}_0) + \nabla_{\vec{k}} \omega \cdot \vec{\xi} + \dots$
  - funkcja  $u_{\vec{k}}(\vec{r})$  jest wolnozmienną funkcją  $\vec{k}$ ,
 to (oznaczamy  $\omega(\vec{k}_0) = \omega_0$ ):

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, t) &\approx A u_{\vec{k}_0}(\vec{r}) \int_{\Delta V_k} e^{i[(\vec{k}_0 + \vec{\xi}) \cdot \vec{r} - (\omega_0 + \nabla_{\vec{k}} \omega \cdot \vec{\xi}) t]} d_3 \xi = \\ &= A u_{\vec{k}_0}(\vec{r}) e^{i[\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t]} \int_{\Delta V_k} e^{i[\vec{\xi} \cdot \vec{r} - \nabla_{\vec{k}} \omega \cdot \vec{\xi} t]} d_3 \xi = \\ &= A u_{\vec{k}_0}(\vec{r}) e^{i[\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t]} \cdot J_1 \cdot J_2 \cdot J_3 \end{aligned}$$

$$J_j = \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \exp \left[ i \xi_j \left( x_j - \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \cdot t \right) \right] d \xi_j = 2 \Delta k \frac{\sin \left[ \Delta k \left( x_j - \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \cdot t \right) \right]}{\left[ \Delta k \left( x_j - \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \cdot t \right) \right]} = 2 \Delta k \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

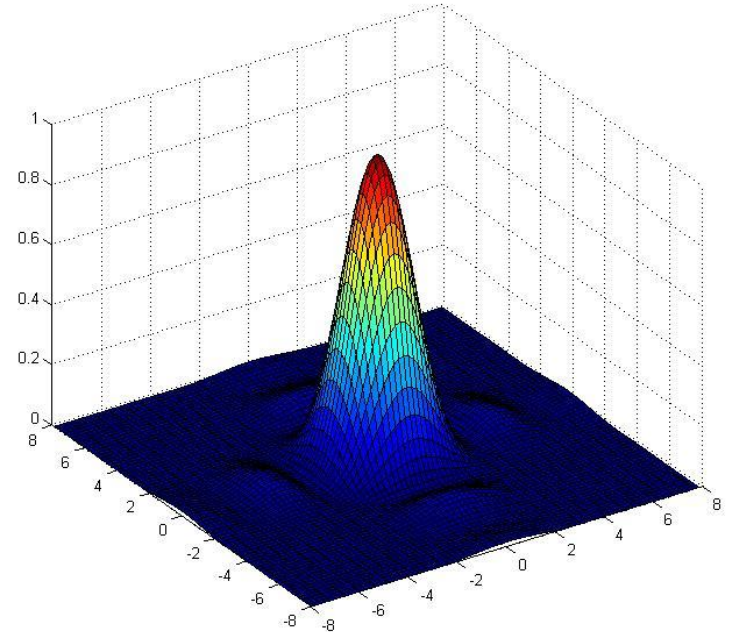
# Prędkość grupowa paczki falowej

- Maksimum występuje w  $\alpha = 0$ :

$$x_j - \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \cdot t = 0$$

$$\vec{r} - \nabla_{\vec{k}} \omega \cdot t = 0$$

$$\vec{v} = \nabla_{\vec{k}} \omega = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k})$$



## *prędkość grupowa elektronu w kryształach*

- zależy od struktury pasmowej
- w potencjale periodycznym  $v = \text{const}$  (nieskończona droga swobodna)
- skończona droga swobodna w realnych kryształach związana z odstępstwami od periodyczności potencjału (domieszki, defekty, drgania termiczne etc.)
- kierunek prędkości prostopadły do powierzchni stałej energii

# Prędkość grupowa paczki falowej

- Pasma paraboliczne, *w układzie osi głównych:*

$$E_n(\vec{k}) = E_n(\vec{k}_0) + \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{(k_1 - k_{01})^2}{m_1^*} + \frac{(k_2 - k_{02})^2}{m_2^*} + \frac{(k_3 - k_{03})^2}{m_3^*} \right)$$

$$\vec{v} = \hbar \left( \frac{k_1 - k_{01}}{m_1^*}, \frac{k_2 - k_{02}}{m_2^*}, \frac{k_3 - k_{03}}{m_3^*} \right)$$

- co daje się zapisać:  $\overline{\overline{m}}^* \vec{v} = \hbar (\vec{k} - \vec{k}_0)$

- powyższe związki można uogólnić na *dowolny (także nieparaboliczny przypadek):*

$$m_{pi}^* \cdot \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\partial E}{\partial k_i} \right) = \hbar (k_i - k_{0i}) \qquad \frac{1}{m_{pi}^*} = \frac{1}{\hbar^2 (k_i - k_{0i})} \left( \frac{\partial E}{\partial k_i} \right)$$

*jest to tensor (odwrotności) pędowej masy efektywnej*

# Elektron w polu zewnętrznym

- Załóżmy, że **działa siła zewnętrzna**  $\vec{F}$
- Moc tej siły: 
$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE}{dt} = \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = \hbar \vec{v} \cdot \dot{\vec{k}}$$

- stąd: 
$$\boxed{\vec{F} = \hbar \dot{\vec{k}}} \quad \text{równanie ruchu}$$

a więc **wektor pseudopędu** spełnia to samo równanie, co **pęd** dla elektronu poza kryształem (równanie Newtona).  $\vec{F}$  może być dowolna, np.  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

- $\vec{F}$  jest siłą zewnętrzną; oddziaływania z rdzeniami atomowymi i innymi elektronami są już uwzględnione w  $E(\vec{k})$  i  $m^*$
- przyspieszenie:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \left[ \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) \right] = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) \cdot \dot{\vec{k}} = \frac{1}{\hbar^2} \nabla_{\vec{k}} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) \cdot \vec{F} = \left( \frac{1}{\overline{m_d}} \right) \cdot \vec{F}$$



# Elektron w polu zewnętrznym

$$\frac{1}{\overline{m}_d} = \frac{1}{\hbar^2} \nabla_{\vec{k}} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial k_1^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_1 \partial k_2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_1 \partial k_3} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial k_2 \partial k_1} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_2^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_2 \partial k_3} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial k_3 \partial k_1} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_3 \partial k_2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_3^2} \end{bmatrix}$$

*jest to tensor odwrotności dynamicznej masy efektywnej; definicja ta jest dobra dla dowolnego wektora falowego, nie tylko w pobliżu ekstremum*

- tensor symetryczny, dla punktu  $\Gamma$  jest tożsamy z tensorem odwrotności masy efektywnej wprowadzonym przy omawianiu zależności  $E(\vec{k})$  w pobliżu ekstremum pasma
- diagonalny w układzie osi głównych:
- dla kryształów regularnych w  $\vec{k} = 0$  masa jest skalarna:  $\overline{m}_d = m^* \cdot \overline{I}$
- w przypadku pasma parabolicznego masy pędowa i dynamiczna są identyczne  $\overline{m}_d = \overline{m}_p$ , **w ogólności – nie**

$$\frac{1}{\overline{m}_d} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3^*} \end{bmatrix}$$

# Przybliżenie masy efektywnej

*Przybliżenie masy efektywnej* (Effective Mass Approximation – EMA)  
– J.M. Luttinger, W. Kohn, Physical Review 97, 869 (1955)

- w celu wprowadzenia prędkości grupowej tworzyliśmy paczkę falową z otoczenia  $\vec{k}_0$ , a więc tworzyliśmy kombinację liniową funkcji Blocha, co w przybliżeniu dało iloczyn amplitudy blochowskiej  $u_{\vec{k}_0}(\vec{r})$  i pewnej funkcji obwiedni („enwelopty”) – tutaj była ona zależna od czasu

$$\psi(\vec{r}, t) = A u_{\vec{k}_0}(\vec{r}) e^{i[\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t]} \int_{\Delta V_k} e^{i[\vec{\xi} \cdot \vec{r} - \nabla_{\vec{k}} \omega \cdot \vec{\xi} t]} d_3 \xi$$

- przybliżenie masy efektywnej podaje przepis jak znaleźć rozwiązanie jednoelektronowego równania Schrödingera z *wolnozmiennym na obszarze komórki elementarnej potencjałem*  $U(\vec{r})$ , jeśli znamy rozwiązania  $u_{n, \vec{k}_0}(\vec{r})$  równania dla  $U(\vec{r}) = 0$  i  $\vec{k} = \vec{k}_0$

# Przybliżenie masy efektywnej

- Dla równania: 
$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) + U(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r})$$

gdzie:  $V(\vec{r})$  – potencjał periodyczny sieci

$U(\vec{r})$  – potencjał wolnozmienny (dodany)

$u_{n,\vec{k}_0}(\vec{r})$  – rozwiązania dla  $U(\vec{r})=0$  i  $\vec{k} = \vec{k}_0$

$E_n(\vec{k})$  – energie dla  $U(\vec{r})=0$

rozwiązaniami (dla  $n$ -tego pasma) są funkcje:  $\Psi_n(\vec{r}) = \Phi_n(\vec{r}) \cdot u_{n,\vec{k}_0}(\vec{r})$

- $\Phi_n(\vec{r})$  jest to tzw. funkcja enwelopty (obwiedni), spełniająca ***równanie masy efektywnej:***

$$\left[ E_n(-i\nabla) + U(\vec{r}) \right] \Phi_n(\vec{r}) = E \Phi_n(\vec{r})$$

# Przybliżenie masy efektywnej

**Przykład** – pasmo sferyczne, paraboliczne, z minimum w  $\vec{k} = 0$ :

$$E(\vec{k}) = E_n(0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

prowadzi do równania:

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m^*} (-i\nabla)^2 + U(\vec{r}) \right) \Phi_n(\vec{r}) = [E - E_n(0)] \Phi_n(\vec{r})$$

i w konsekwencji:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta + U(\vec{r}) \right) \Phi_n(\vec{r}) = [E - E_n(0)] \Phi_n(\vec{r})$$

***jest to, formalnie rzecz biorąc, równanie Schrödingera dla kwazicząstki o masie równej masie efektywnej  $m^*$  poruszającej się w potencjale  $U(\vec{r})$ . Potencjał periodyczny sieci jest uwzględniony poprzez masę efektywną.***

Jeśli np.  $U(\vec{r})$  jest przyciągającym potencjałem domieszki, to envelope będzie funkcją zlokalizowaną

# **WŁASNOŚCI PASM CAŁKOWICIE WYPEŁNIONYCH**

# Pasma całkowicie wypełnione

- Liczenie sumarycznego wkładu całkowicie zapełnionego pasma do danej wielkości fizycznej  $f(\vec{k})$  wymaga sumowania lub całkowania po wszystkich  $\vec{k} \in SB$  (SB = strefa Brillouina):

$$\langle f(\vec{k}) \rangle := \sum_{\vec{k} \in SB} f(\vec{k}) \rightarrow \int_{\vec{k} \in SB} f(\vec{k}) \rho(\vec{k}) d_3k = \rho(\vec{k}) \int_{\vec{k} \in SB} f(\vec{k}) d_3k$$

- Sumaryczny pseudopęd znika:

$$\langle \hbar \vec{k} \rangle = \rho(\vec{k}) \int_{\vec{k} \in SB} \hbar \vec{k} d_3k = 0 \quad \text{– bo SB ma środek inwersji}$$

- Jeśli  $f(\vec{r})$  jest funkcją okresową z okresem sieci Bravais, to całkowanie jej po obszarze komórki elementarnej  $\Omega$  daje wartość stałą:

$$I(\vec{r}') = \int_{\Omega} f(\vec{r} + \vec{r}') d_3r = \text{const}$$

# Pasma całkowicie wypełnione

zaś pochodne  $I(\vec{r}')$  znikają:

$$\nabla' I(\vec{r}') = \int_{\Omega} \nabla' f(\vec{r} + \vec{r}') d_3r = \int_{\Omega} \nabla f(\vec{r} + \vec{r}') d_3r = 0$$

$$\nabla'^2 I(\vec{r}') = \int_{\Omega} \nabla'^2 f(\vec{r} + \vec{r}') d_3r = \int_{\Omega} \nabla^2 f(\vec{r} + \vec{r}') d_3r = 0$$

w szczególności dla  $\vec{r}'=0$  otrzymujemy:  $\int_{\Omega} \nabla f(\vec{r}) d_3r = 0$ ,  $\int_{\Omega} \nabla^2 f(\vec{r}) d_3r = 0$

- Stosując otrzymane wzory do  $E(\vec{k})$ , która jest okresowa w sieci odwrotnej oraz pamiętając, że  $E_n^{\uparrow}(\vec{k}) = E_n^{\downarrow}(-\vec{k})$ :

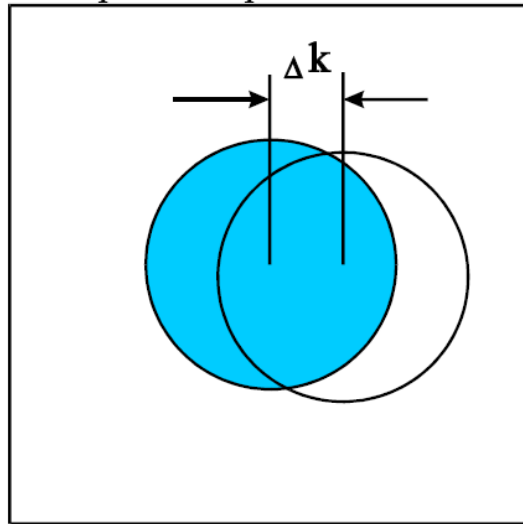
$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\rho(\vec{k})}{\hbar} \int_{\vec{k} \in SB} \nabla_k E(\vec{k}) d_3k = 0 \quad \langle \overline{\overline{m}^{-1}} \rangle = \frac{\rho(\vec{k})}{\hbar^2} \int_{\vec{k} \in SB} \nabla_k \nabla_k E(\vec{k}) d_3k = 0$$

$$\langle \vec{j} \rangle = -e \langle \vec{v} \rangle = 0 \quad \langle \dot{\vec{v}} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle = 0 \quad \langle \vec{s} \rangle = 0$$

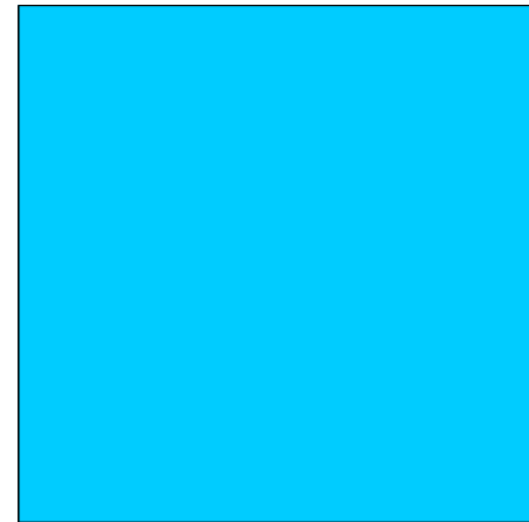
# Pasma całkowicie wypełnione

Elektrony *całkowicie wypełnionego pasma* nie mogą uzyskać dodatkowego pędu pod działaniem siły zewnętrznej – nie dają wkładu do żadnych własności transportowych:

Niezapełnione pasmo



rozkład elektronów pod wpływem zaburzenia (np. pola elektrycznego) ulega zmianie.  
Całkowity pęd ulega zmianie



każdy elektron pod wpływem zaburzenia „dochodzący” do granicy strefy „przeskakuje” na drugą powierzchnię.  
Sumarycznie nic się nie zmienia.  
 $\langle v \rangle = 0$

prof. R. Stępniewski - skrypt do wykładu „Podstawy Fizyki Półprzewodników”: <http://www.fuw.edu.pl/~stepniew/PFP.pdf>



# POJĘCIE I WŁASNOŚCI DZIURY

# Pojęcie i własności dziury

Jeśli z zapełnionego pasma zabierzemy jeden elektron, to do opisu sumarycznych własności układu pozostałych  $2N-1$  elektronów wygodnie jest wprowadzić pojęcie nowej kwazicząstki – dziury.

Jeśli  $f(\vec{k})$  – jakaś ekstensywna wielkość fizyczna charakteryzująca elektron o wektorze falowym  $\vec{k}$ , to dla dziury odpowiadającej pasmu, w którym brakuje elektronu w stanie  $j$  będzie ona wynosiła:

$$f_d(\vec{k}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2N} f(\vec{k}_i)$$

- **Wektor falowy dziury** (w paśmie brakuje elektronu z wektorem falowym  $\vec{k}_e$ ):

$$\vec{k}_d = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2N} \vec{k}_i = \sum_{i=1}^{2N} \vec{k}_i - \vec{k}_e = -\vec{k}_e$$

- **Prędkość dziury:**  $\vec{v}_d(\vec{k}_e) = -\vec{v}_e(\vec{k}_e) \Rightarrow \vec{v}_d(\vec{k}_d) = \vec{v}_e(\vec{k}_e)$

- **Masa efektywna dziury:**  $m_d^*(\vec{k}) = -m_e^*(\vec{k})$

masa dziury w wierzchołku pasma walencyjnego jest dodatnia ( $m_e^* < 0$ )

# Pojęcie i własności dziury

- **Ładunek dziury jest dodatni** gdyż w polu elektrycznym równanie Newtona daje:

$$\hbar \dot{\vec{k}}_d = -\hbar \dot{\vec{k}}_e = +eE$$

- **Energia dziury:** 
$$E_d = \sum_{i=1}^{2N} E(\vec{k}_i) - E(\vec{k}_e) = E_0 - E_e(\vec{k})$$

rośnie, kiedy  $E_e$  (a więc energia brakującego elektronu) maleje

Jeśli liczymy energię elektronów od dna pasma przewodnictwa, to w paśmie walencyjnym mamy:

$$E_e = -E_G - \frac{\hbar^2 k^2}{2|m_e^*|} \quad \Rightarrow \quad E_d = E_0 + E_G + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_d^*}$$

przy czym  $E_0$  można pominąć (przeskalowanie energii)

- **Dziura jest fermionem** (tak jak elektron, którego brakuje w paśmie)

# Pojęcie i własności dziury

- *Jeśli interesuje nas tylko pasmo walencyjne, wygodnie jest operować językiem dziur:*

$$\vec{v}_d = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E_d(\vec{k}_d)$$

$$\hbar \dot{\vec{k}}_d = +e\vec{E}$$

$$E_d(\vec{k}_d) = E(0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_d^*}$$

(lub bardziej skomplikowana  
zależność dyspersyjna)

- Często obecne są równocześnie i elektrony w paśmie przewodnictwa i dziury w paśmie walencyjnym. *Trzeba wtedy brać oba pasma pod uwagę.*

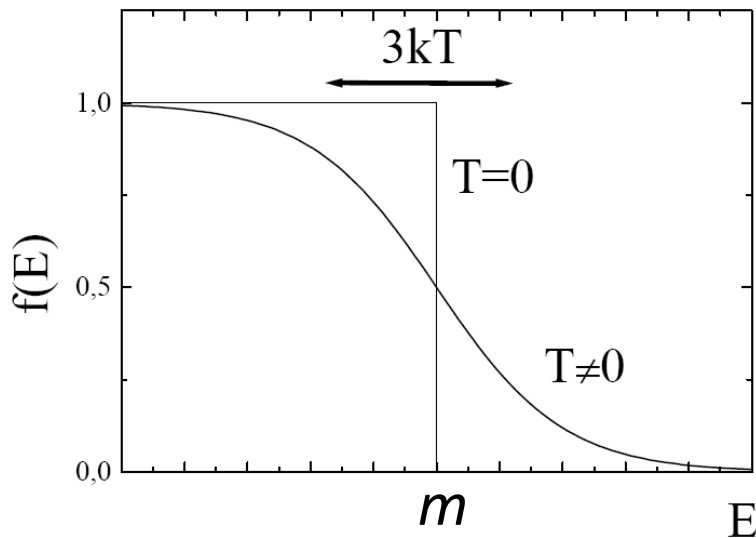
# **STATYSTYKA ELEKTRONÓW W KRYSZTAŁACH W RÓWNOWADZE TERMODYNAMICZNEJ – METALE**

# Statystyka elektronów – klasyczny metal

- W  $T \neq 0$  równowaga układu termodynamicznego (w warunkach  $V = \text{const}$  i  $N = \text{const}$ ) odpowiada minimum energii swobodnej Helmholtza  $F = U - TS$ , a nie minimum  $U$  – obsadzone są stany o większych energiach.
- Dla fermionów w równowadze termodynamicznej – rozkład Fermiego-Diraca:

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E - \mu}{kT}} + 1}$$

$\mu$  – potencjał chemiczny lub poziom Fermiego



- $0 < f(E) < 1$
- $f(\mu) = 0,5$
- dla  $T = 0$  – rozkład schodkowy
- dla  $T \neq 0$  – rozmycie rzędu  $3 kT$
- $1 - f(E)$  – prawdopodobieństwo, że stan jest nieobsadzony

# Statystyka elektronów – klasyczny metal

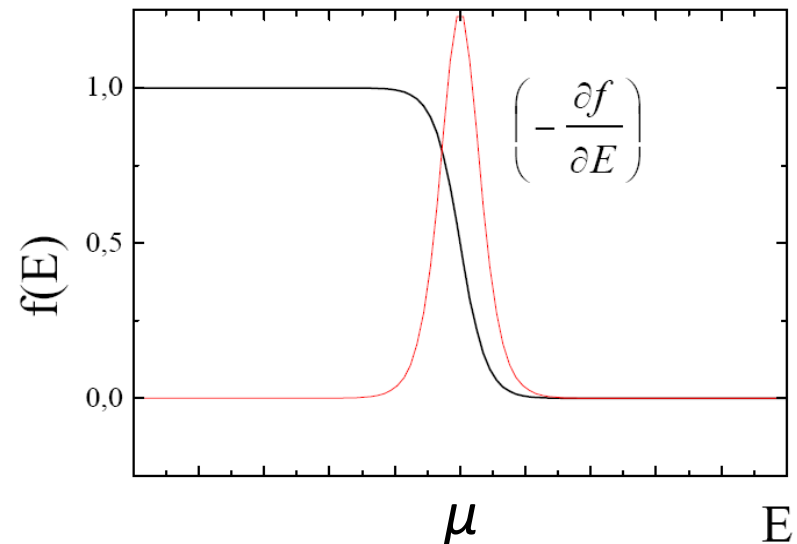
- Pochodna rozkładu Fermiego-Diraca

wprowadzając  $x = \frac{E - \mu}{kT}$  mamy  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$

$$\left(-\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} \quad \text{– funkcja parzysta, dla której: } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{df(x)}{dx}\right) dx = 1$$

stąd:

$$T \rightarrow 0 \quad \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) \Rightarrow \delta(E - \mu)$$



# Statystyka elektronów – klasyczny metal

## *Średnie statystyczne wielkości fizycznych zależnych od energii elektronu.*

- Niech  $A(E)$  będzie jakąś ekstensywną wielkością fizyczną zależną od energii elektronu.

$$A_{tot}(T) := \int_{SB} A(E(\vec{k})) f(E(\vec{k}), T) \rho(\vec{k}) d_3k = \int_{pasma} A(E) f(E, T) \rho(E) dE$$

*jest uśrednionym termodynamicznie całkowitym wkładem do wielkości  $A$  od wszystkich elektronów w paśmie;*

w szczególności koncentracja elektronów w paśmie będzie równa ( $A = 1$ ):

$$n(T) = \int_{pasma} f(E, T) \rho(E) dE$$



# Statystyka elektronów – klasyczny metal

**Metale:**  $\mu \approx 5 \text{ eV}$ ; ponieważ  $kT|_{300\text{K}} \approx 25 \text{ meV}$ , to  $\eta = \frac{\mu}{kT} \gg 1$

$\Rightarrow$  ***silnie zdegenerowany gaz elektronowy***

***Kolejne kroki prowadzące do wzoru opisującego  $A_{tot}(T)$  dla gazu zdegenerowanego:***

1. Wprowadzamy wielkość  $G(E) = \int_0^E A(E')\rho(E')dE'$  i otrzymujemy

$$A_{tot}(T) = \int_{\text{pasma}} \frac{\partial G}{\partial E} f(E, T) dE$$

2. Całkujemy przez części i rozszerzamy granicę całkowania po energii do  $\infty$ :

$$A_{tot}(T) = \int_0^{\infty} G(E) \left( -\frac{\partial f}{\partial E} \right) dE$$

# Statystyka elektronów – klasyczny metal

3. Wprowadzamy nową zmienną  $x = \frac{E - \mu}{kT}$        $E = \mu + xkT$

4. W nowej zmiennej:  $A_{tot}(T) = \int_{-\frac{\mu}{kT}}^{\infty} G(\mu + xkT) \left( -\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu + xkT) \left( -\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx$

5. Ze względu na silną degenerację istotny wkład do całki daje tylko obszar w pobliżu  $x = 0 \Rightarrow$  rozwijamy funkcję  $G$ :

$$G(\mu + xkT) = G(\mu) + \left( \frac{\partial G}{\partial E} \right)_{\mu} xkT + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial E^2} \right)_{\mu} x^2 (kT)^2 + \dots$$

6. Korzystamy z parzystości  $\left( -\frac{\partial f}{\partial x} \right)$  i z tego, że  $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12}$



$$A_{tot}(T) = \int_0^{\mu} A(E) \rho(E) dE + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left[ \frac{\partial (A(E) \rho(E))}{\partial E} \right]_{\mu}$$

# Statystyka elektronów – klasyczny metal

7. Podstawiając  $A = 1$  i zakładając, że  $n(T) = \text{const}$  można wyznaczyć zależność poziomu Fermiego  $\mu$  od temperatury:

$$\mu = \mu_0 - \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left[ \frac{\partial(\ln \rho(E))}{\partial E} \right]_{\mu}$$

8. Z kolei podstawiając  $A = E$  można wyznaczyć energię wewnętrzną gazu elektronowego:

$$U(T) = U_0 + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \rho(\mu)$$

i, licząc gęstość stanów na poziomie Fermiego, elektronowe ciepło

molowe, które jest zredukowane o czynnik rzędu  $\left( \frac{kT}{\mu} \right)$

w stosunku do przewidywań klasycznych  $3/2 R$ :

$$C_{el} = \frac{\pi^2}{2} R \left( \frac{kT}{\mu} \right)$$

# **STATYSTYKA ELEKTRONÓW – PÓŁPRZEWODNIK NIEZDEGENEROWANY I IZOLATOR**

# Statystyka elektronów – półprzewodnik niezdegenerowany i izolator

- Jeśli gaz elektronowy (dziurowy) nie jest silnie zdegenerowany, to w celu policzenia  $A_{tot}(T)$  trzeba wykonywać całkowania bez przybliżeń stosowanych powyżej dla metali:

$$A_{tot}(T) = \int_{\text{pasmo}} A(E) f(E, T) \rho(E) dE$$

- Zarówno  $A(E)$  jak i  $\rho(E)$  można rozwinąć na szereg:  $f(E) = E^\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n E^n$

a więc  $A_{tot}(T)$  będzie się wyrażało poprzez tzw. całki Fermiego-Diraca (czasami definiowane bez funkcji  $\Gamma$  Eulera stojącej przed całką):

$$F_j(\eta) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{\exp(\varepsilon - \eta) + 1} d\varepsilon$$

*całki Fermiego-Diraca*

- I tak na przykład dla  $A = 1$  oraz trójwymiarowej gęstości stanów parabolicznego pasma przewodnictwa:

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{E}$$

# Statystyka elektronów – półprzewodnik niezdegenerowany i izolator

otrzymujemy (przy podstawieniu  $\eta = \frac{\mu}{kT}$ ):

$$n(T) = \int_0^{\infty} f(E, T) \rho(E) dE = 2 \left( \frac{m^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot F_{\frac{1}{2}}(\eta)$$

$N_c(T) \equiv$

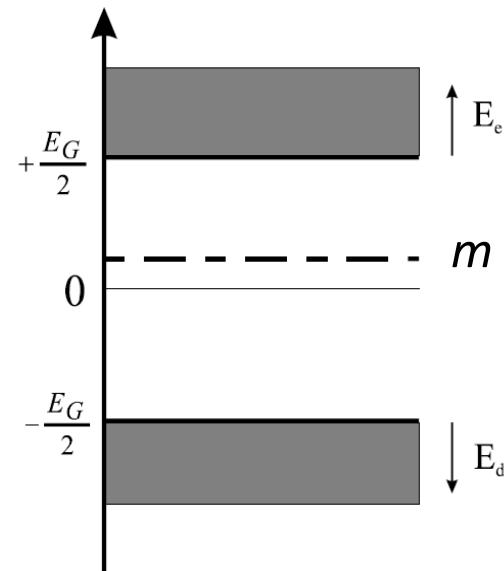
*koncentracja elektronów w funkcji zredukowanego poziomu Fermiego i temperatury*

*Przypadek półprzewodnika, w którym zarówno gaz elektronów jak i dziur są dalekie od degeneracji*

$$\frac{E_c - \mu}{kT} \gg 1$$

$$\frac{\mu - E_v}{kT} \gg 1$$

$$\frac{E_c - E_v}{kT} = \frac{E_G}{kT} \gg 1$$



# Statystyka elektronów – półprzewodnik niezdegenerowany i izolator

- prawdopodobieństwo obsadzenia stanów przez elektrony:

$$f_e = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}$$

i przez dziury:  $f_d = 1 - f_e = \frac{1}{e^{\frac{-E+\mu}{kT}} + 1}$

- dla elektronów:  $E = \frac{E_G}{2} + E_e$       dla dziur:  $E = -\frac{E_G}{2} - E_d$



$$f_e = \frac{1}{e^{\frac{E_G}{2kT} + \frac{E_e}{kT} - \frac{\mu}{kT}} + 1}$$

$$f_d = \frac{1}{e^{\frac{E_G}{2kT} + \frac{E_d}{kT} + \frac{\mu}{kT}} + 1}$$

# Statystyka elektronów – półprzewodnik niezdegenerowany i izolator

- Jeśli  $\frac{E_c - \mu}{kT} \gg 1$  i  $\frac{\mu - E_v}{kT} \gg 1$ , to:

$$f_e \approx e^{-\frac{E_G}{2kT} - \frac{E_c}{kT} + \frac{\mu}{kT}} \quad f_d \approx e^{-\frac{E_G}{2kT} - \frac{E_v}{kT} - \frac{\mu}{kT}} \quad \text{rozkłady Boltzmann}$$

- po wykonaniu całkowań po energii ( $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ):

$$n = 2 \left( \frac{m_e^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_G}{2kT}} \cdot e^{\frac{\mu}{kT}} \quad p = 2 \left( \frac{m_d^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_G}{2kT}} \cdot e^{-\frac{\mu}{kT}}$$



$$n = N_c(T) \cdot e^{-\frac{(E_c - \mu)}{kT}} \quad p = N_v(T) \cdot e^{-\frac{(\mu - E_v)}{kT}}$$



# Statystyka elektronów – półprzewodnik niezdegenerowany i izolator

- Przypadek samoistny  $n = p = n_s$  :

$$\mu_s = \frac{3}{4} kT \cdot \ln \left( \frac{m_d^*}{m_e^*} \right) \quad n_s = \sqrt{n \cdot p} = 2 \left( \frac{\sqrt{m_e^* m_d^*} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{-E_G}{2kT}}$$

## Koncentracja samoistna typowych półprzewodników

$E_g \setminus T$	77K	300K	1200K	material
0,25eV	$10^9 \text{ cm}^{-3}$	$10^{16} \text{ cm}^{-3}$	$10^{18} \text{ cm}^{-3}$	InSb PbSe
1eV	-	$10^{10} \text{ cm}^{-3}$	$10^{17} \text{ cm}^{-3}$	Ge, Si, GaAs
4eV	-	-	$10^{11} \text{ cm}^{-3}$	ZnS, SiC, GaN, ZnO, C (diament)

# Statystyka elektronów – półprzewodnik niezdegenerowany i izolator

$$np = 3.10 \times 10^{32} T^3 \exp(-0.785/kT). \quad (12)$$

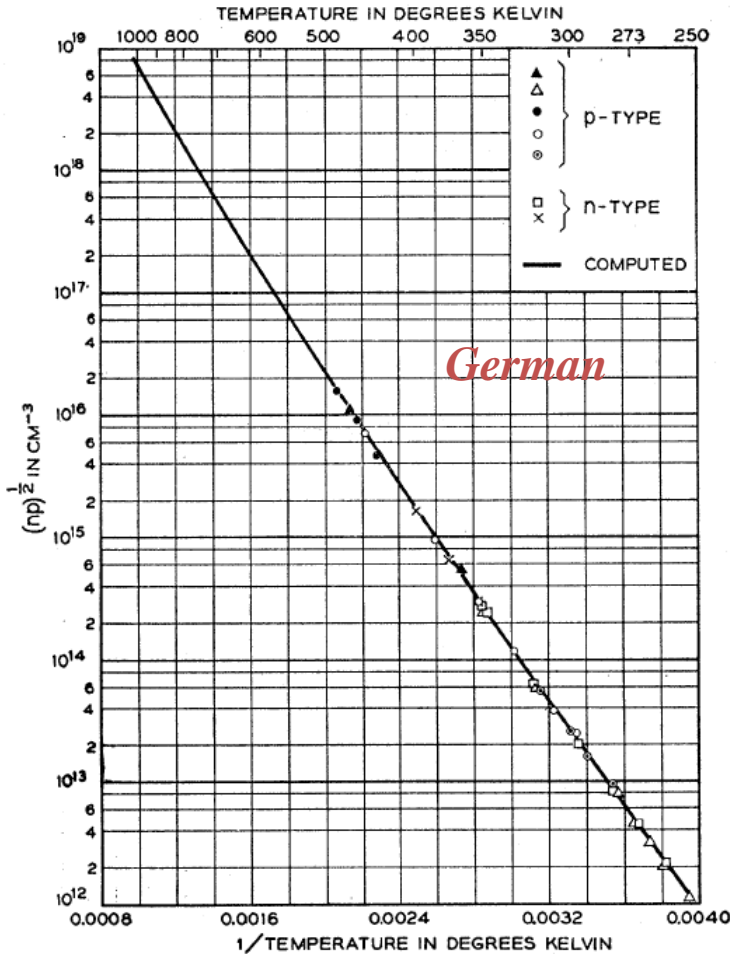


FIG. 4. Square root of the product of electron and hole concentration *vs* reciprocal temperature. F.J. Morin, J.P. Maita, Phys. Rev. **94**, 1525 (1954)

# Statystyka elektronów – półprzewodnik niezdegenerowany i izolator

$$np = 3.10 \times 10^{32} T^3 \exp(-0.785/kT). \quad (12)$$

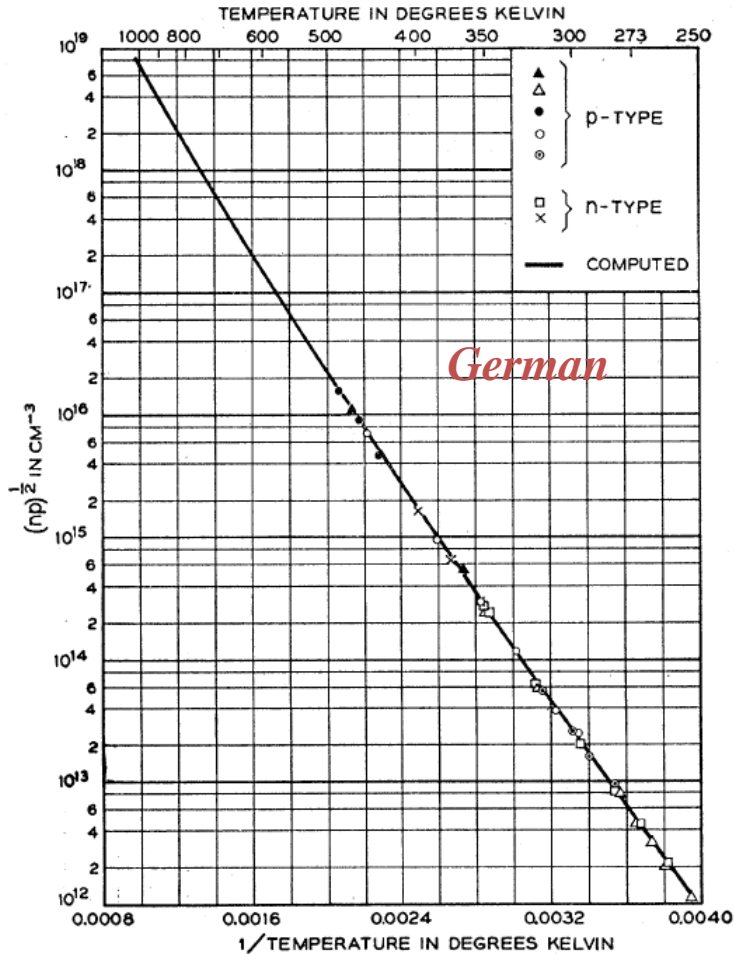


FIG. 4. Square root of the product of electron and hole concentration vs reciprocal temperature. F.J. Morin, J.P. Maita, Phys. Rev. **94**, 1525 (1954)