

„Fizyka materii skondensowanej i struktur półprzewodnikowych”
Wykład 15 (10.06.2020)

Tomasz Kazimierczuk

Zakład Fizyki Ciała Stałego
Instytut Fizyki Doświadczalnej
Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

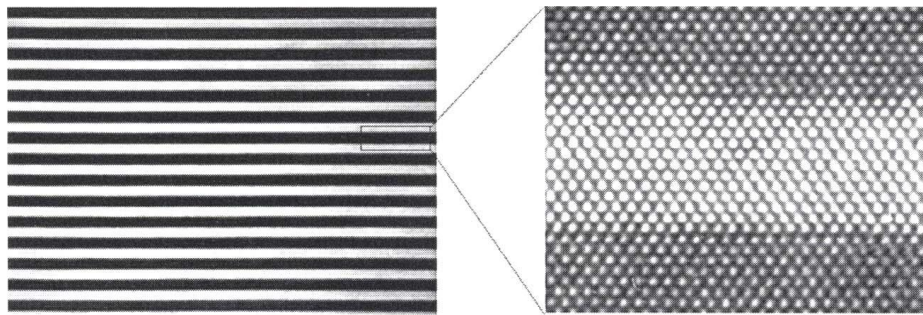
Na podstawie materiałów prof. M. Baja

UKŁADY NISKOWYMIAROWE

Układy niskowymiarowe – krótkie przypomnienie

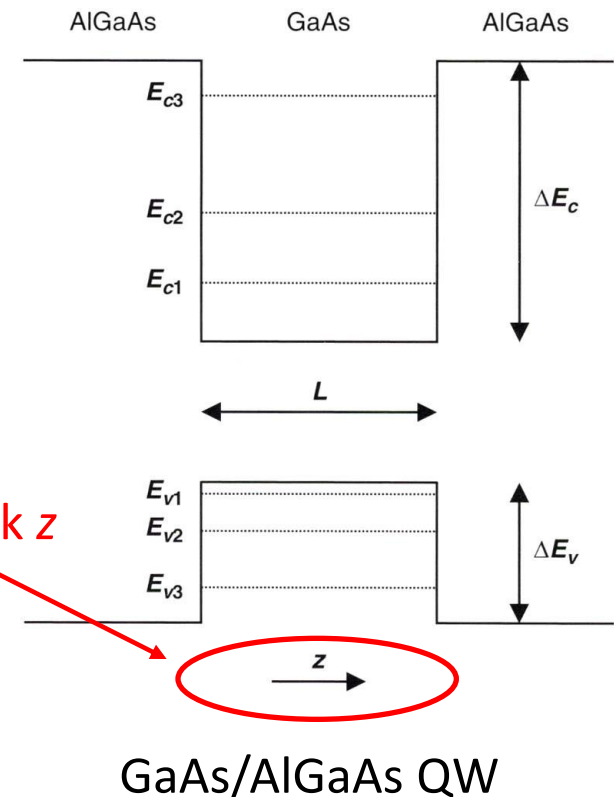
Metody wytwarzania układów niskowymiarowych

- epitaksjalne metody wytwarzania struktur warstwowych (LPE, MBE, MOVPE i metody pokrewne) umożliwiają uzyskanie układów 2D



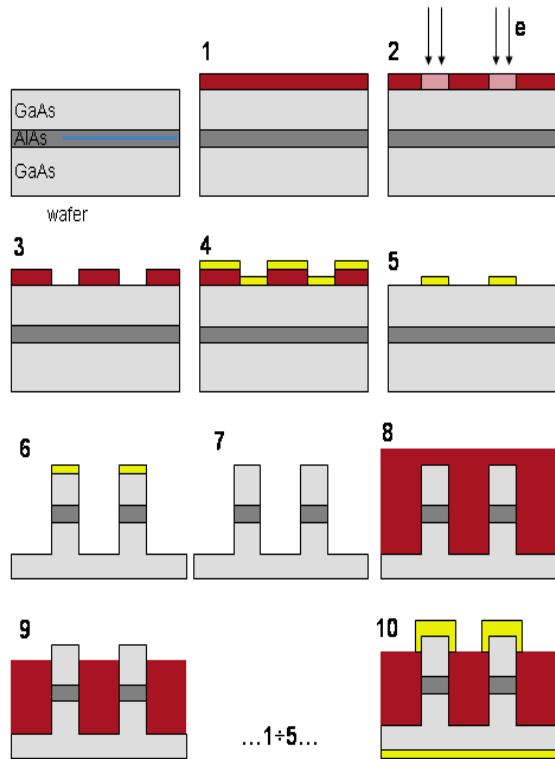
supersieć GaAs/AlGaAs
(prawie atomowo gładkie interfejsy)

kierunek z

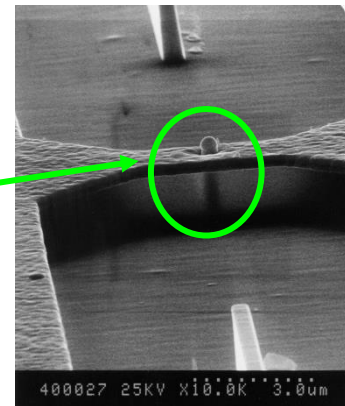
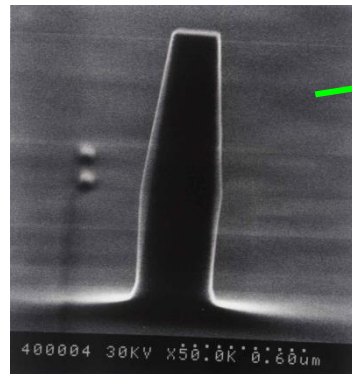


Układy niskowymiarowe – krótkie przypomnienie

- litografia – wytrawianie mes albo też ograniczanie obszaru 2DEG poprzez bramki naniesione litograficznie \Rightarrow możliwe wytwarzanie układów 1D i 0D



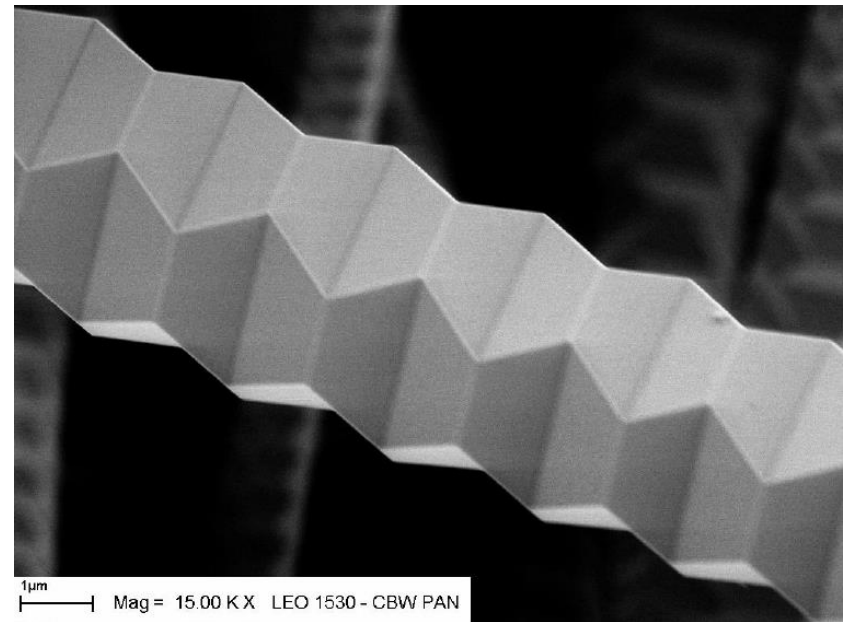
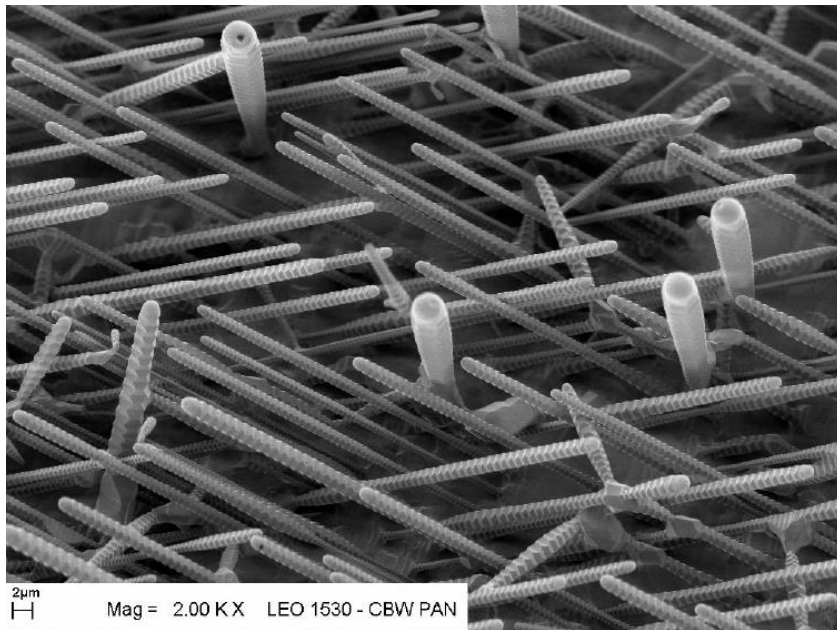
- elektronolitografia
- trawienie jonowe (RIE)



Marta Gryglas-Borysiewicz, struktury tunelowe GaAs/AlAs

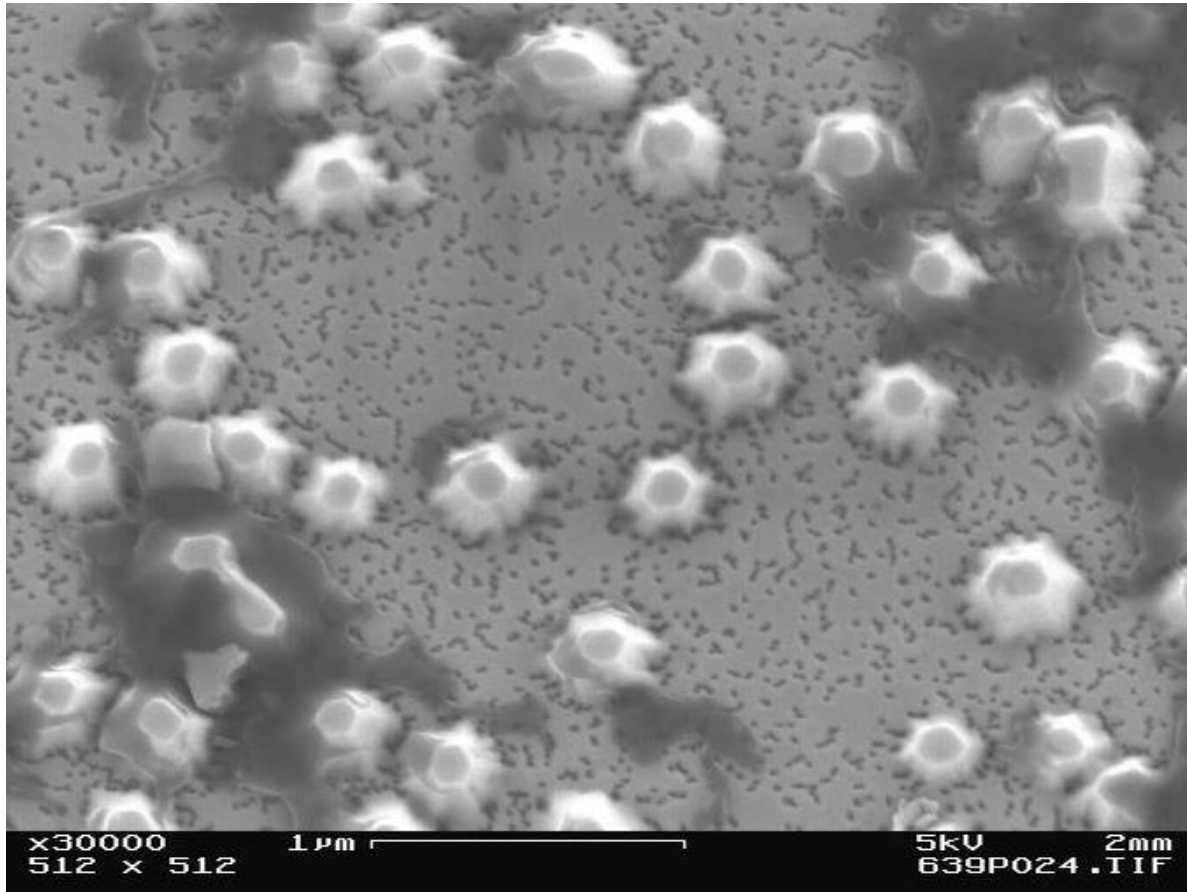
Układy niskowymiarowe – krótkie przypomnienie

- wytwarzanie struktur niskowymiarowych samoorganizujących się



Rafał Bożek, druty kwantowe InSb/GaAs

Układy niskowymiarowe – krótkie przypomnienie



Krzysztof Pakuła, Katarzyna Surowiecka,
kropki kwantowe GaN/Al_{1-x}Ga_xN

Układy niskowymiarowe – krótkie przypomnienie

Stany elektronowe struktur niskowymiarowych (na przykładzie 2D)

- Standardowe podejście – przybliżenie masy efektywnej:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{m_z^*(z)} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\hbar^2}{2m_{\parallel}^*} \Delta_{\vec{r}_{\parallel}} + V_{eff}(z) \right] \psi(\vec{r}_{\parallel}, z) = E \psi(\vec{r}_{\parallel}, z)$$

E – energia liczona od odpowiedniego ekstremum pasma,

$\psi(\vec{r}_{\parallel}, z)$ – funkcja envelopes

- $V_{eff}(z) = E_c(z) + V_I(z) + V_{ee}(z)$ – jednoelektronowy potencjał efektywny,

gdzie $E_c(z)$ – energia krawędzi pasma, $V_I(z)$ – energia kulombowskiego oddziaływania ze zjonizowanymi domieszkami, $V_{ee}(z)$ – energia oddziaływania z innymi elektronami

Układy niskowymiarowe – krótkie przypomnienie

- ruchy wzdłuż z i \vec{r}_{\parallel} separują się \Rightarrow

$$\psi(\vec{r}_{\parallel}, z) = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{i\vec{k}_{\parallel}\vec{r}_{\parallel}} \phi_n(z)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{m_z^*(z)} \frac{\partial}{\partial z} + V_{eff}(z) \right] \phi_n(z) = E_{n0} \phi_n(z) \quad (*)$$

$$E_n(\vec{k}_{\parallel}) = E_{n0} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{\parallel}^*} \quad \text{gdzie } E_{n0} \text{ – energia dna } n\text{-tego podpasma}$$

- Część energii potencjalnej $V_{eff}(z)$ związana ze zjonizowanymi domieszkami i oddziaływaniem z innymi elektronami może być w przybliżeniu (z dokładnością do efektów wymiany i korelacji) przedstawiona w postaci:

$V_I(z) + V_{ee}(z) \approx q\varphi_e(z)$ spełniającej równanie Poissona:

$$\frac{d^2 \varphi_e(z)}{dz^2} = -\frac{[\rho_I(z) + qn(z)]}{\epsilon\epsilon_0} \quad (**)$$

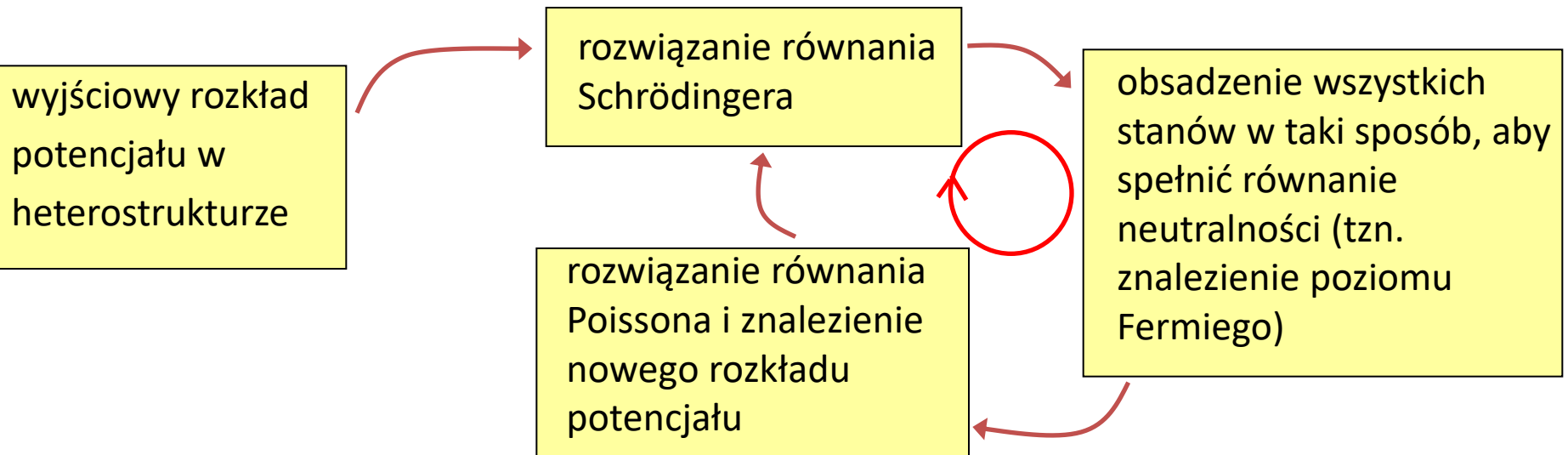
Układy niskowymiarowe – krótkie przypomnienie

gdzie $\rho_l(z)$ – gęstość objętościowa ładunku pochodzącego od zjonizowanych domieszek, a $n(z)$ – objętościowa koncentracja nośników o ładunku q :

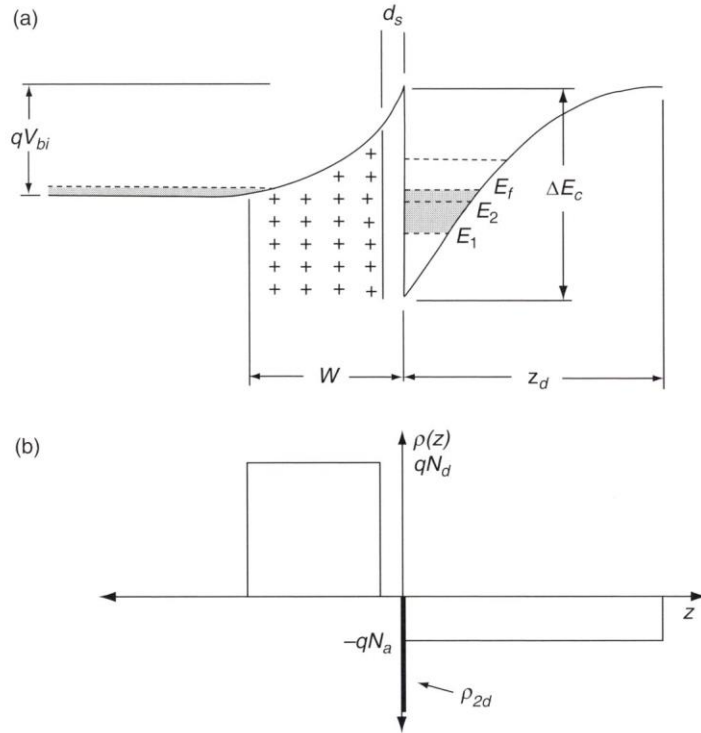
$$n(z) = \sum_i N_i |\phi_i(z)|^2$$

sumowanie jest po podpasmach, w których koncentracje 2D nośników wynoszą N_i

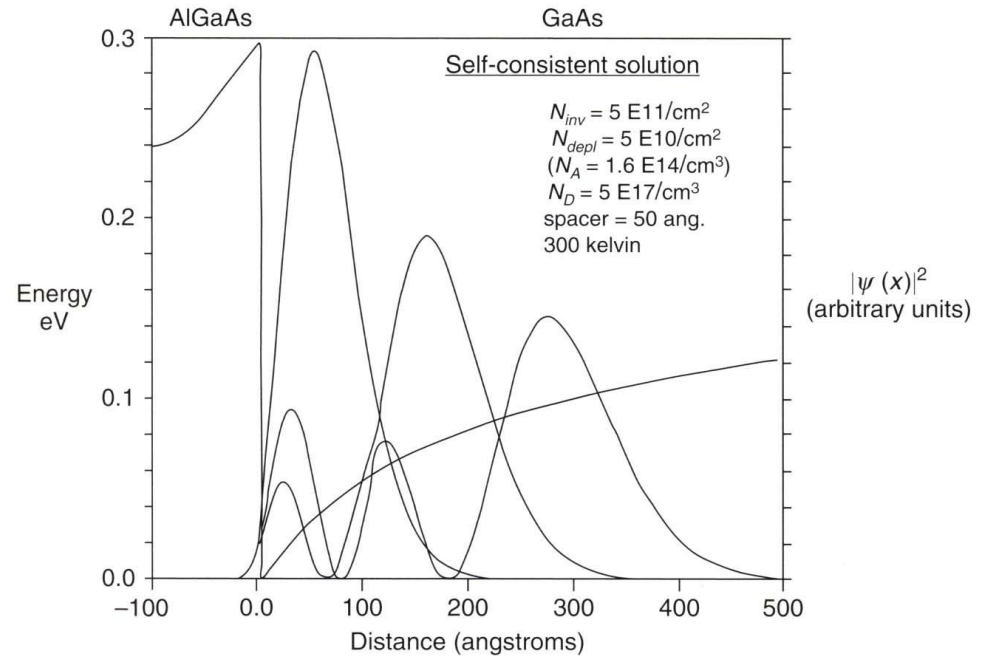
- znajdowanie stanów elektronowych (i rozkładu potencjału) polega na samouzgodnionym rozwiązaniu sprzężonych równań Schrödingera (*) i Poissona (**) przy zapewnieniu neutralności ładunkowej heterostrukturze:



Układy niskowymiarowe – krótkie przypomnienie



rozkład potencjału i
obsadzenia stanów



rozwiązania równania
Schrödingera

RÓWNOLEGŁY TRANSPORT DYFUZYJNY W STRUKTURACH NISKOWYMIAROWYCH

Równoległy transport dyfuzyjny w strukturach niskowymiarowych

- układy niskowymiarowe – uwięzienie kwantowe w r wymiarach (1, 2 lub 3) prowadzi do tego, że elektrony (dziury) mają swobodę ruchu tylko w pozostałych $d = 3 - r$ wymiarach \Rightarrow układy 2D, 1D, 0D
- w przypadkach 2D i 1D transport równoległy (lateralny) w płaszczyźnie gazu 2D lub wzdłuż drutu kwantowego (w odróżnieniu np. do transportu poprzecznego, wertykalnego, w poprzek warstw heterostruktury), w przypadku kiedy $L \gg l_e$ (gdzie l_e – średnia droga swobodna) może być rozpatrywany w taki sam sposób jak transport dyfuzyjny w 3D – *równanie Boltzmanna, przybliżenie czasu relaksacji, etc.*
- różnice w stosunku do przypadku 3D:
 1. wynikające z różnej, w zależności od wymiaru d , gęstości stanów
 2. różnych, w szczególności także takich, które nie występowały w układach 3D mechanizmów rozpraszania nośników

Równoległy transport dyfuzyjny w strukturach niskowymiarowych

1. Różnice wynikające z gęstości stanów

- w układach o różnej wymiarowości przy liczeniu prawdopodobieństwa rozpraszania (co doprowadziło nas w przypadku 3D do wyrażenia na czas relaksacji) trzeba teraz:
 - a) wziąć gęstość stanów właściwą dla wymiarowości problemu
 - b) obliczyć prawdopodobieństwo rozpraszania z właściwymi funkcjami falowymi
 - c) całkowania dokonać w przestrzeni ***d-wymiarowej***

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = -\rho(\vec{k}) \frac{\hbar}{m_p^*(k)} \int_{SB} \delta(k - k') \Theta(k, \mathcal{G}) \vec{X}(E) \cdot (\vec{k} - \vec{k}') d_3k'$$



przy takim samym potencjale rozpraszającym w układach o różnej wymiarowości czasy relaksacji będą w inny sposób zależały od energii

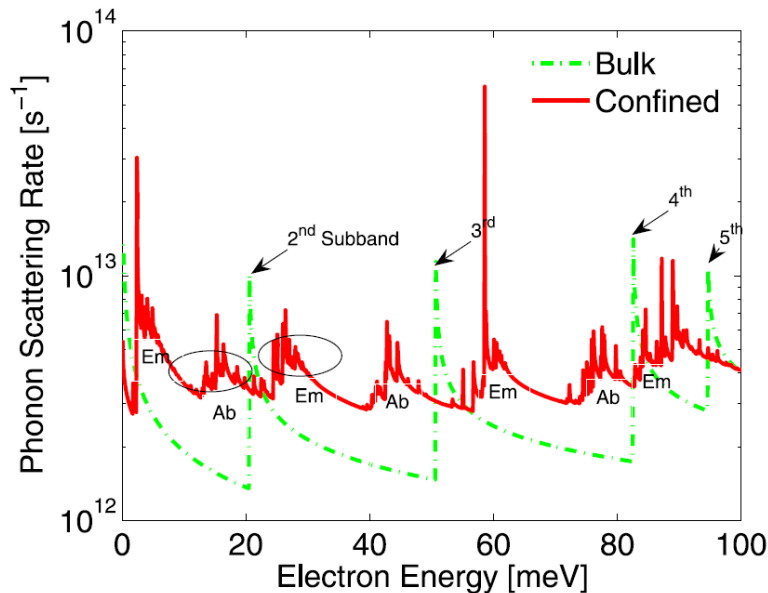
Równoległy transport dyfuzyjny w strukturach niskowymiarowych

- przy liczeniu wartości średnich funkcji $A(E)$ zależnych od energii, ze względu na wymiar przestrzeni w której całkujemy będziemy mieli:

$$\langle A(E) \rangle = \frac{\int_0^\infty A(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^d(E) dE}{\int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^d(E) dE}$$

$$d = 1, 2, 3$$

- przy obniżeniu wymiarowości układu pojawiają się nieciągłości gęstości stanów, rośnie gęstość stanów na krawędzi podpasma \Rightarrow w 1D prawdopodobieństwo rozproszenia może mieć osobliwość



\Rightarrow drut kwantowy Si 8nm \times 8 nm, fonony akustyczne kryształu objętościowego i „uwięzione”

E.B. Ramayya et al., „*Journal of Computational Electronics*” **7**, 319 (2008)

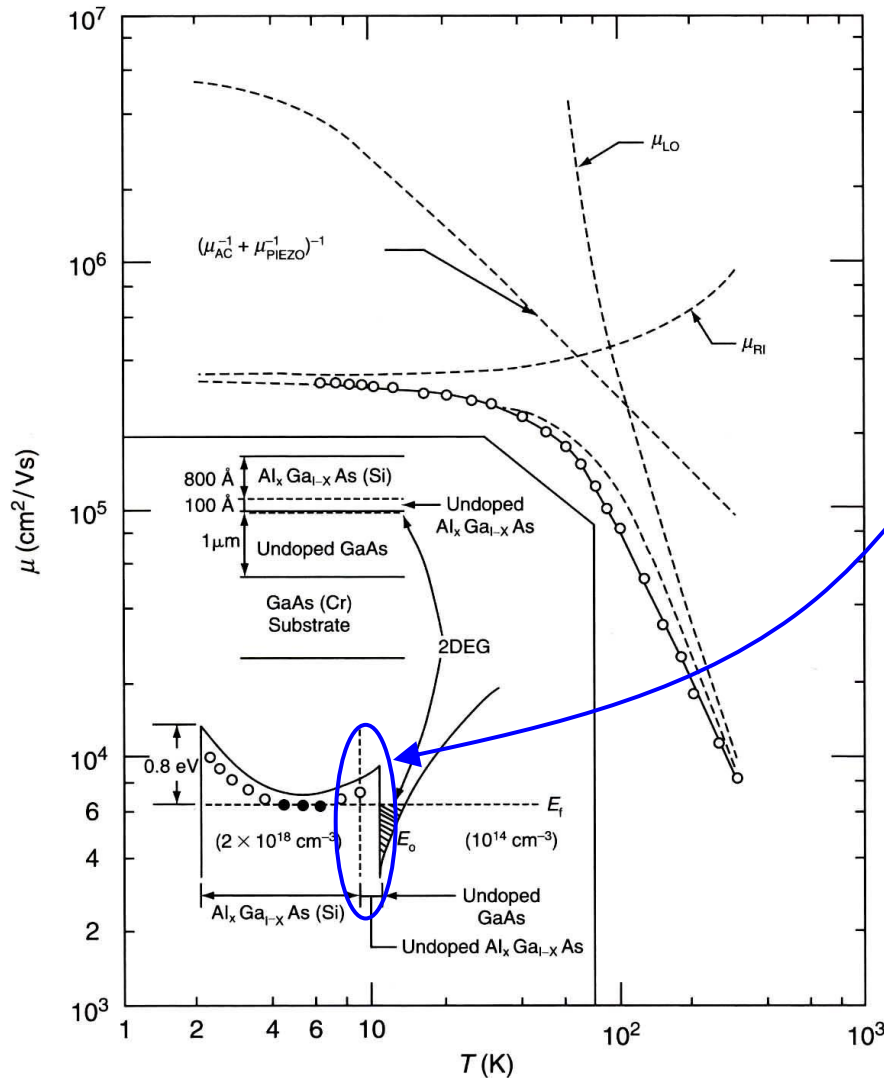
Równoległy transport dyfuzyjny w strukturach niskowymiarowych

- przy obniżaniu wymiarowości układu dramatycznie zmniejsza się liczba początkowych i końcowych stanów elektronowych w rozpraszaniu – w 1D w obrębie danego podpasma rozpraszanie elastyczne może prowadzić tylko do stanów z $k' = \pm k$ (do przodu albo do tyłu)
- różnice w ekranowaniu – potencjały są 3D, ekranowanie zaś odbywa się w obszarach d-wymiarowych

2. Mechanizmy rozpraszania nośników – cechy charakterystyczne dla układów niskowymiarowych

- rozpraszanie na zjonizowanych domieszkach
 - efekty związane z ekranowaniem i obrazami naładowanych centrów rozpraszających (metoda obrazów)
 - niejednorodne rozmieszczenie potencjałów rozpraszających – różne możliwości rozmieszczenia domieszek nieintencjonalnych (tło domieszkowania typu bulk, interfejsy, stany powierzchniowe)
 - remote impurities (domieszkowanie modulacyjne)

Równoległy transport dyfuzyjny w strukturach niskowymiarowych



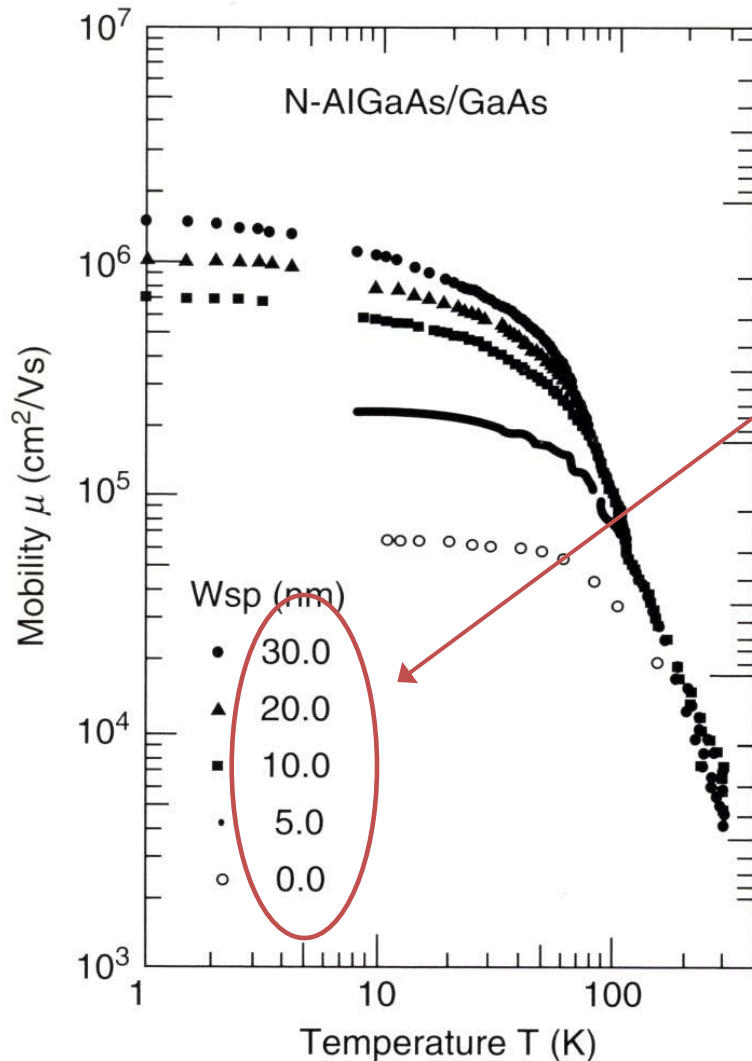
domieszki są odseparowane („spacer”) od 2DEG



rozproszenia są tylko niskokątowe, ruchliwość wysoka

B.J.F. Lin et al., „*Applied Physics Letters*”
45, 695 (1984)

Równoległy transport dyfuzyjny w strukturach niskowymiarowych



heterozłącze AlGaAs/GaAs,

różne grubości niedomieszkowanej warstwy rozdzielającej („spacer”)

występuje maksimum ruchliwości w funkcji grubości przekładki (im grubsza przekładka, tym mniejsza koncentracja i słabsze ekranowanie)

P.M. Solomon et al., „*Electron Device Letters*” **5**, 379 (1984)

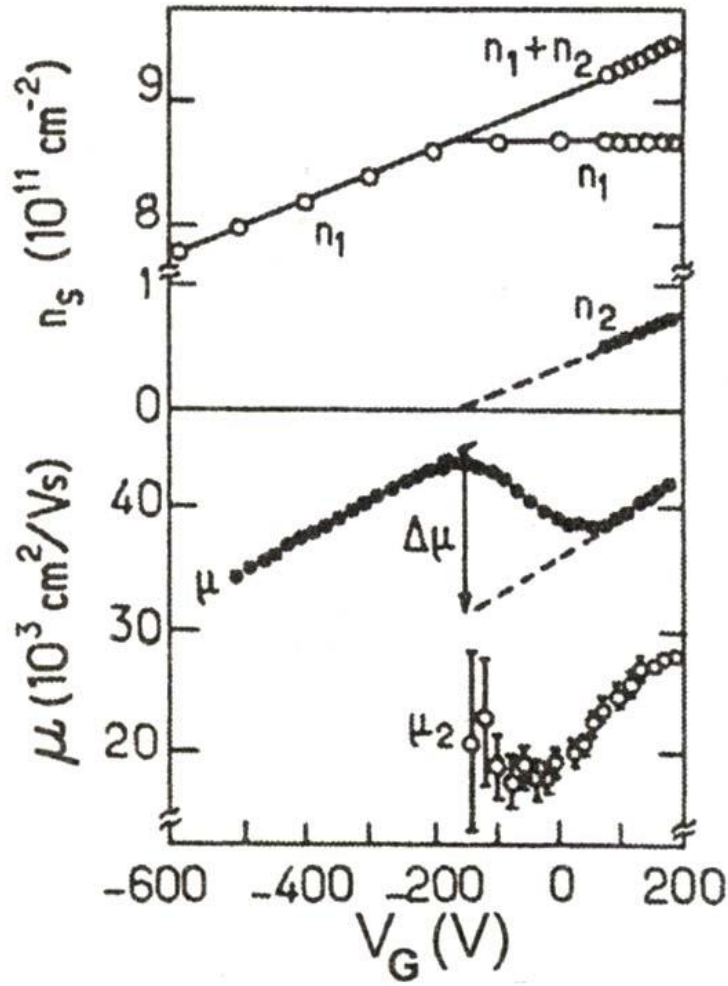
Równoległy transport dyfuzyjny w strukturach niskowymiarowych

- rozpraszanie na fononach – widmo fononowe zmodyfikowane w stosunku do układów 3D:
 - możliwe mody ograniczone do obszarów cienkich warstw/drutów
 - możliwe fonony akustyczne z $\omega > 0$ dla $q = 0$
 - możliwe mody optyczne zlokalizowane na interfejsie/powierzchni
- szorstkość interfejsu/powierzchni (interface/surface roughness) – asymetria obu interfejsów: AlGaAs hodowany na GaAs daje znacznie lepszy interfejs niż GaAs hodowany na AlGaAs \Rightarrow najwyższe ruchliwości uzyskuje się w heterozłączach, a nie w studniach kwantowych
- rozpraszanie międzypodpasmowe – jeśli na poziomie Fermiego leżą stany więcej niż jednego podpasma, to możliwe są procesy rozproszenia pomiędzy stanami różnych podpasm; wraz z rozpoczęciem obsadzania kolejnego podpasma pojawia się skokowa zmiana prawdopodobieństwa rozpraszania

Równoległy transport dyfuzyjny w strukturach niskowymiarowych

rozpraszanie międzypodpasmowe

AlGaAs/GaAs

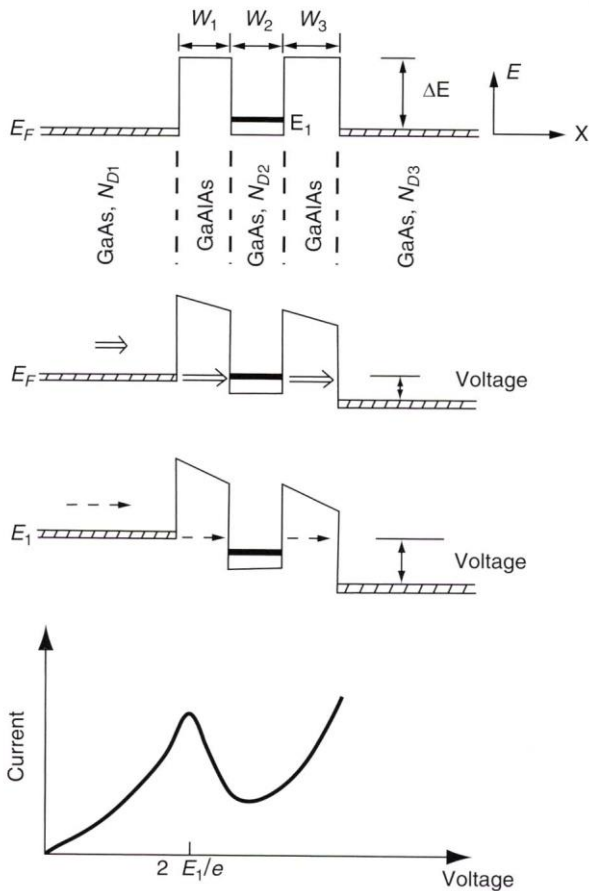


H.L. Störmer et al., „Solid State Communications”
41, 707 (1982)

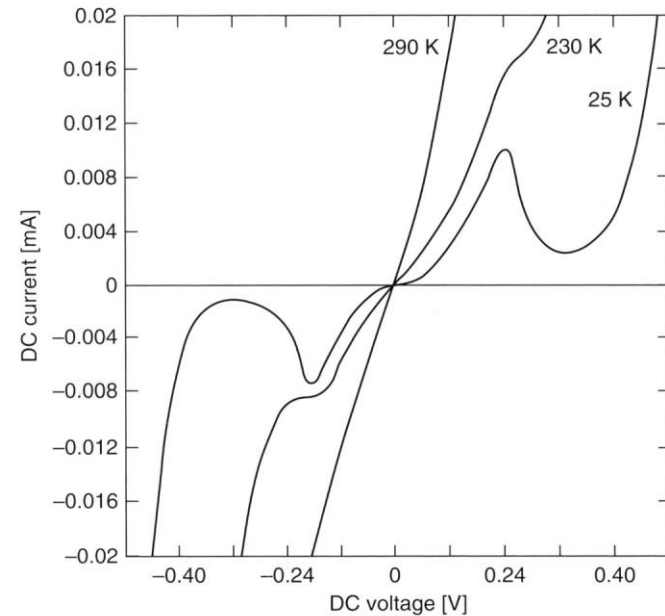
BALISTYCZNY TRANSPORT PROSTOPADŁY – TUNELOWANIE W HETEROSTRUKTURACH

Transport prostopadły – tunelowanie w heterostrukturach z planarnymi barierami

Tunelowanie w heterostrukturach z planarnymi barierami



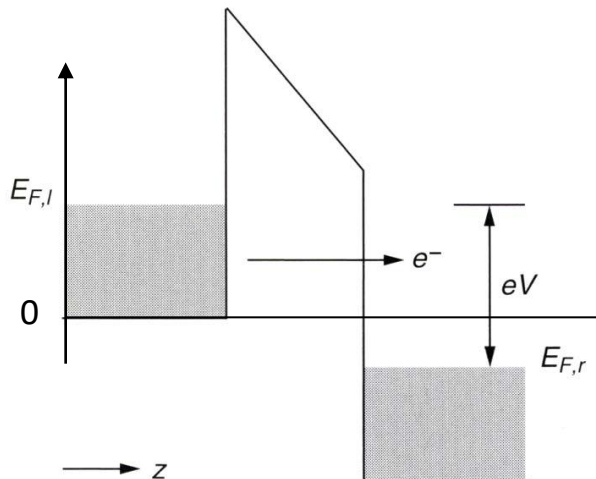
Rezonansowa dioda tunelowa z dwiema barierami (double-barrier RTD)



T.C.L.G. Sollner et al., „*Applied Physics Letters*” **43**, 588 (1983)

Transport prostopadły – tunelowanie w heterostrukturach z planarnymi barierami

Jak znaleźć prąd tunelowy? (D.K. Ferry, S.M. Goodnick, J. Bird, „Transport in Nanostructures”, Cambridge University Press 2009)



- zakładamy, że z lewej i z prawej strony bariery mamy układy **3D**, w których ruch elektronów separuje się na składowe wzdłuż osi z i poprzeczne, t.j. równoległe do bariery (t)
- zero energii przyjmujemy na dnie pasma przewodnictwa lewej elektrody (emitera)
- energie z lewej (l) i prawej (r) strony bariery wynoszą odpowiednio:

$$E_l = E_{z,l} + E_{t,l} = \frac{\hbar^2 k_{z,l}^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_{t,l}^2}{2m^*}$$

$$E_r = E_{z,r} + E_{t,r} = \frac{\hbar^2 k_{z,r}^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_{t,r}^2}{2m^*} + E_{c,r}$$

$E_{c,r}$ – energia dna pasma w kolektorze

Transport prostopadły – tunelowanie w heterostrukturach z planarnymi barierami

- struktura jest pseudomorficzna, \vec{k}_l jest dobrą liczbą kwantową, jest zachowane (z dokładnością np. do szorstkości interfejsów, łamiącej symetrię translacyjną):

$$E_{z,l} = \frac{\hbar^2 k_{z,l}^2}{2m^*} = E_{z,r} = \frac{\hbar^2 k_{z,r}^2}{2m^*} + E_{c,r}$$

- kontakty są idealnie absorbujące \Rightarrow cząstka docierająca do kontaktu z drugiej strony traci swoją spójność fazową i nadmiarową energię wskutek zderzeń nieelastycznych w obszarze kontaktu
- wkład do gęstości **prądu docierającego** z lewej strony do bariery pochodzący od elektronów z elementu przestrzeni fazowej $d_3 k_l$:

$$j_l^{inc} = -e \rho(\vec{k}_l) f_l(\vec{k}_l) v_z(\vec{k}_l) d_3 k_l$$

gdzie: $\rho(\vec{k}_l) = \frac{2}{(2\pi)^3}$ $v_z(\vec{k}_l) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(\vec{k}_l)}{\partial k_{z,l}} = \frac{\hbar k_{z,l}}{m^*}$

Transport prostopadły – tunelowanie w heterostrukturach z planarnymi barierami

- wkład do gęstości **prądu przechodzącego** przez barierę będzie dodatkowo mnożony przez współczynnik transmisji:

$$j_l = -\frac{2e\hbar}{(2\pi)^3 m^*} T(k_{z,l}) f_l(\vec{k}_t, k_{z,l}) k_{z,l} dk_{z,l} d_2k_t$$

- podobnie w stronę przeciwną:

$$j_r = -\frac{2e\hbar}{(2\pi)^3 m^*} T(k_{z,r}) f_r(\vec{k}_t, k_{z,r}) k_{z,r} dk_{z,r} d_2k_t$$

- biorąc pod uwagę, że współczynnik transmisji jest symetryczny oraz, że $k_{z,l} dk_{z,l} = k_{z,r} dk_{z,r} = \frac{m^*}{\hbar^2} dE_z$, otrzymujemy na całkowitą gęstość prądu:

$$J_T = -\frac{2e}{(2\pi)^3 \hbar} \int_0^\infty dE_z \int_0^\infty 2\pi k_t dk_t \cdot T(E_z) [f_l(E_z, k_t) - f_r(E_z, k_t)] \quad (*)$$

Transport prostopadły – tunelowanie w heterostrukturach z planarnymi barierami

- przyjmujemy, że zarówno f_l jak i f_r są funkcjami równowagowymi (Fermiego-Diraca):

$$f_{l,r}(E_z, E_t) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_z + E_t - E_{F,l,r}}{k_B T}\right)}$$

- w (*) zamieniamy zmienne z k_t na E_t :

$$J_T = -\frac{4\pi em^*}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^\infty T(E_z) dE_z \int_0^\infty [f_l(E_z, E_t) - f_r(E_z, E_t)] dE_t$$

- wreszcie, pamiętając, że $E_{F,l} = E_{F,r} + eV$ wykonujemy całkowanie po E_t :

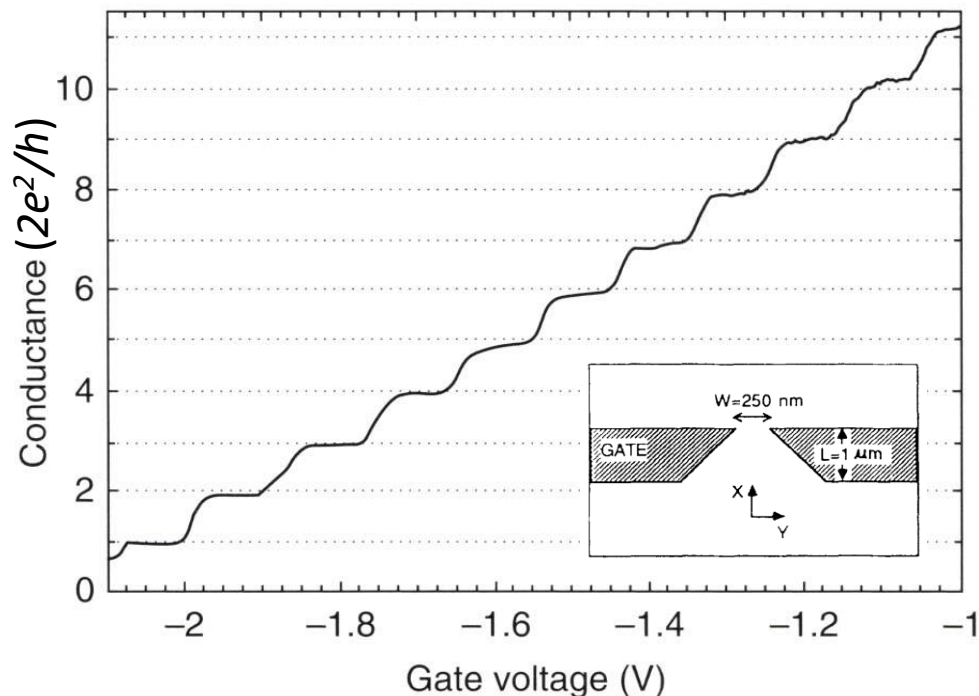
$$J_T = -\frac{em^* k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dE_z T(E_z) \ln \left[\frac{1 + e^{(E_{F,l} - E_z)/k_B T}}{1 + e^{(E_{F,l} - eV - E_z)/k_B T}} \right]$$

wzór Tsu–Esaki: *Applied Physics Letters* **22**, 562 (1973)

TRANSPORT BALISTYCZNY – KWANTOWANIE PRZEWODNOŚCI, WZÓR LANDAUERA

Kwantowanie przewodności – wzór Landauera

- Heterozłącze GaAs/AlGaAs z litograficznie naniesionymi bramkami elektrostatycznie definiującym przewężenie o szerokości rzędu 100-200 nm (tzw. kontakt punktowy, ang. point contact)



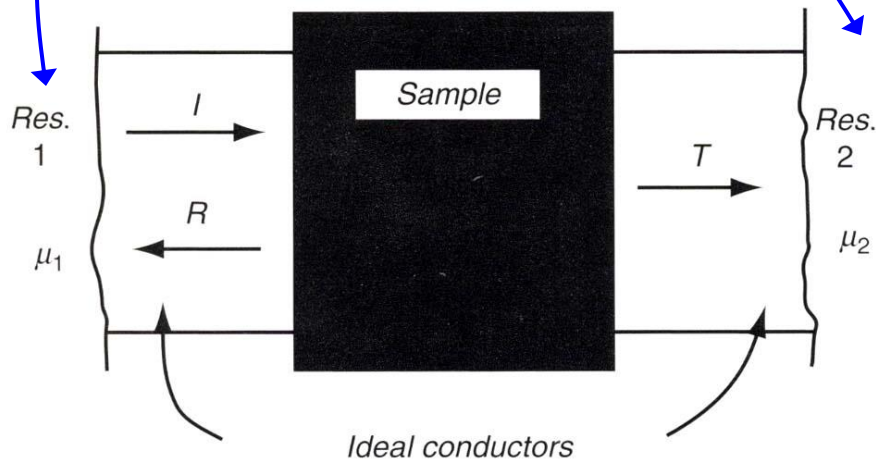
- poprzez zmianę napięcia bramki uzyskuje się efektywną regulację szerokości kanału
- przewodność $G = I/U$ jest skwantowana:

$$G = \frac{2e^2}{h} \cdot N$$

B.J. van Wees et al., „*Physical Review Letters*” **60**, 848 (1988)

Kwantowanie przewodności – wzór Landauera

- Dwa rezerwuary (kontakty) w których poziom Fermiego wynosi odpowiednio μ_1 i μ_2
- Kontakty są idealnie absorbujące \Rightarrow cząstka docierająca do kontaktu z drugiej strony traci swoją spójność fazową i nadmiarową energię wskutek zderzeń nieelastycznych w obszarze kontaktu i odwrotnie – funkcje falowe cząstek opuszczających kontakty mają całkowicie nieskorelowane ze sobą fazy



- Próbka połączona z kontaktami poprzez idealne doprowadzenia, w których nie ma rozproszeń. W tych obszarach będziemy rozważali strumienie cząstek (prądy)

Kwantowanie przewodności – wzór Landauera

- Wkład do prądu płynącego przez próbkę od pojedynczego modu poprzecznego (w układzie 2D powiedzielibyśmy – podpasma) **przy założeniu degeneracji spinowej**:

$$I = \frac{2e}{2\pi} \left[\int_0^\infty dk v(k) f_1(k) T(E) - \int_0^\infty dk' v(k') f_2(k') T(E') \right]$$

- W niskich temperaturach do lewego doprowadzenia są wstrzykiwane tylko elektrony z energiami $E \leq \mu_1$, zaś do prawego z energiami $E' \leq \mu_2$:

$$I = \frac{e}{\pi} \left[\int_0^{\mu_1} dE \left(\frac{dk}{dE} \right) v(k) T(E) - \int_0^{\mu_2} dE \left(\frac{dk}{dE} \right) v(k) T(E) \right] = \frac{e}{\pi} \int_{\mu_2}^{\mu_1} dE \left(\frac{dk}{dE} \right) v(k) T(E)$$

- W 1D** mamy $\left(\frac{dk}{dE} \right) v(k) = \frac{1}{\hbar}$. Jeśli ponadto ograniczymy się do małych napięć przykładanych do próbki $eU = \mu_1 - \mu_2$ (obszar liniowej odpowiedzi), to:

$$I = \frac{2e}{h} T(\mu_1 - \mu_2) = \frac{2e^2}{h} T U \quad \Rightarrow \quad G = \frac{I}{U} = \frac{2e^2}{h} T$$

Kwantowanie przewodności – wzór Landauera

- Dla N kanałów (modów poprzecznych) biorących udział w procesie, **przy założeniu degeneracji spinowej**:

$$G = \frac{2e^2}{h} T \cdot N$$

wzór Landauera

- W przypadku **przewodnika balistycznego** nie ma rozprożeń, współczynnik transmisji wynosi $T = 1$ i:

$$G = \frac{2e^2}{h} \cdot N$$

co oznacza, że przewodność może przyjmować tylko **skwantowane wartości**

Kwantowanie przewodności – wzór Landauera

Ciekawa realizacja prostego eksperymentu pokazującego kwantowanie przewodności

FOTON 90, Jesień 2005

35

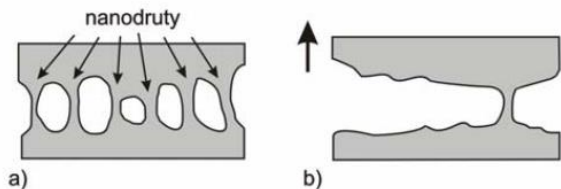


Kwantowanie przewodności elektrycznej w nanodrutach

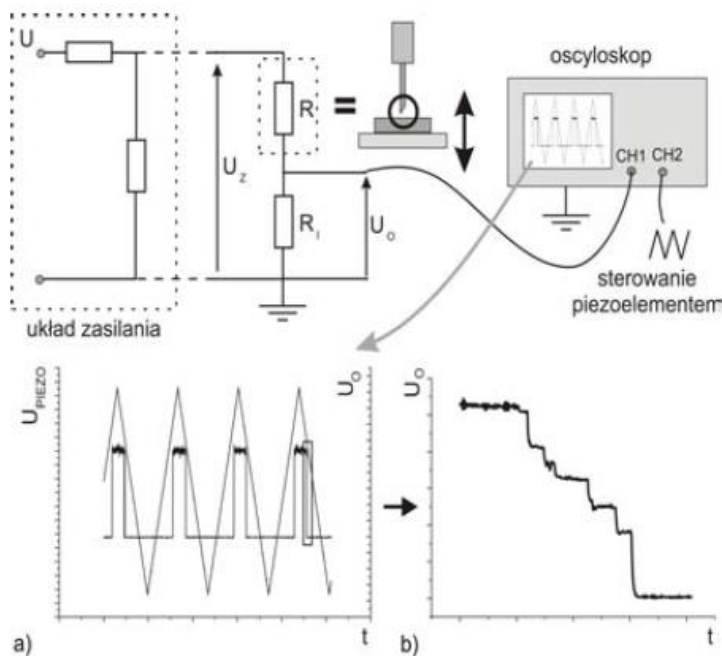
*Szymon Godlewski, Antoni Tekiel
Studia Matematyczno-Przyrodnicze, III rok
Uniwersytet Jagielloński*

<http://www.if.uj.edu.pl/Foton/90/pdf/08kwantowanie-godlewski-238.pdf>

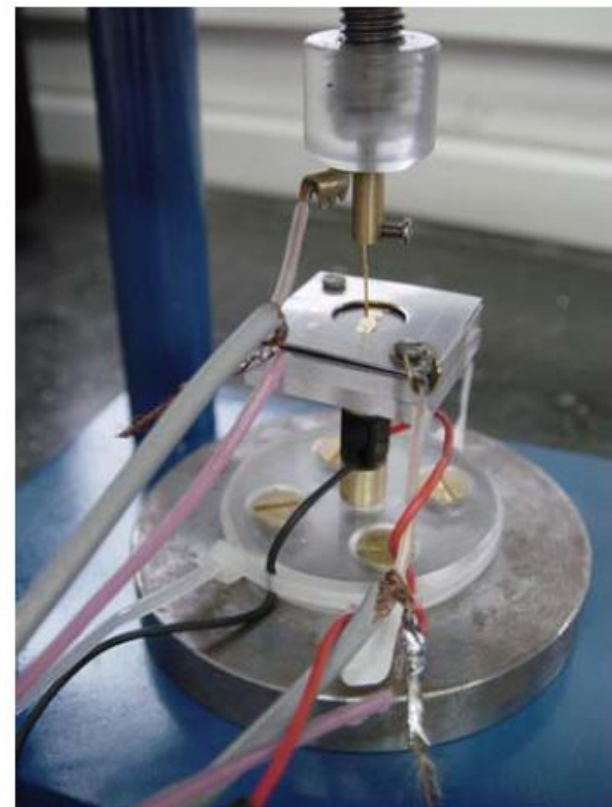
Kwantowanie przewodności – wzór Landauera



Rys. 3. Tuż przed zerwaniem kontaktu obie elektrody połączone są tylko jednym nanodrutem

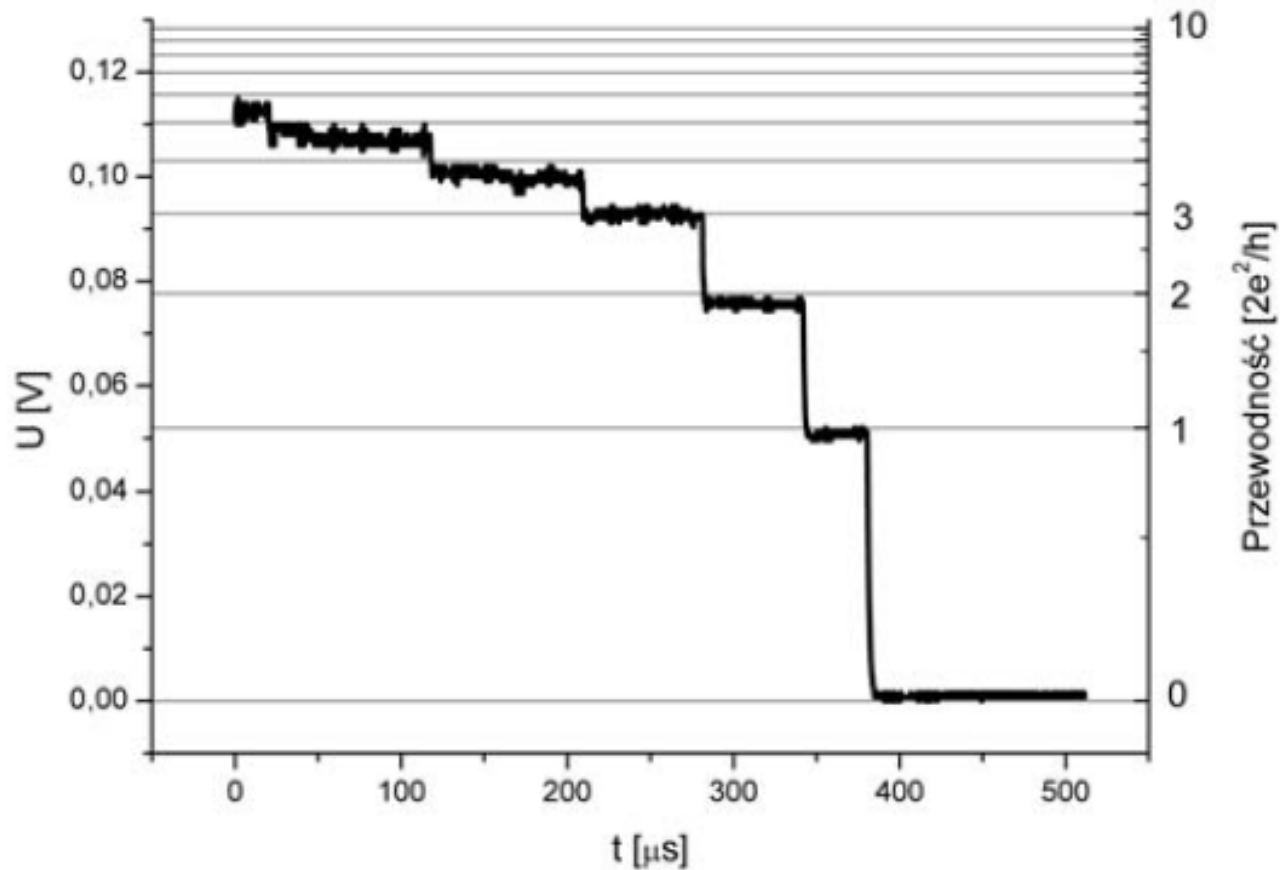


Rys. 5. Schemat metody pomiaru przebiegów czasowych spadku napięcia na oporniku R_I



Rys. 4. Na piezoelemencie umocowano złotą próbkę, którą uderzano cyklicznie w przyściętą, złoty drut stanowiący igłę

Kwantowanie przewodności – wzór Landauera



Rys. 6. Przebieg zarejestrowany podczas wytworzenia się nanodrutu

GAZ ELEKTRONOWY W KWANTUJĄCYM POLU MAGNETYCZNYM

Gaz elektronowy w kwantującym polu magnetycznym

- Cząstka naładowana w polu magnetycznym: $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - q\vec{A}$
- Potencjał wektorowy \vec{A} : $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \text{rot}\vec{A}$
- Pole magnetyczne wzdłuż osi z: $\vec{B} = (0, 0, B)$
- Jedna z możliwości wyboru \vec{A} (cechowanie Landaua): $\vec{A} = (-yB, 0, 0)$
- Równanie Schrödingera na enweloę (przybliżenie masy efektywnej):

cząstka swobodna (w kryształach):

3D
$$\frac{1}{2m^*} \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - eBy \right)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi_{3D}(x, y, z) = E_{3D} \phi_{3D}(x, y, z)$$

uwięzienie kwantowe w kierunku z:

2D
$$\hat{H}_{2D} \phi_{2D}(x, y, z) = \left[\hat{H}_{3D} + V_{\text{eff}}(z) \right] \phi_{2D}(x, y, z) = E_{2D} \phi_{2D}(x, y, z)$$

Gaz elektronowy w kwantującym polu magnetycznym

- Postulujemy rozwiązania (na envelopes) w postaci:

$$\text{3D} \quad \phi_{3D}(x, y, z) = e^{ik_x x} \cdot \chi(y) \cdot e^{ik_z z}$$

$$\text{2D} \quad \phi_{2D}(x, y, z) = e^{ik_x x} \cdot \chi(y) \cdot \varphi(z)$$

- Równanie na funkcję $\varphi(z)$ opisującą uwięzienie kwantowe w kierunku z:

$$\text{2D} \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_{eff}(z) \right] \varphi_i(z) = E_i \varphi_i(z) \quad \text{gdzie } E_i \text{ – energia dna } i\text{-tego podpasma}$$

- Równanie na funkcję $\chi(y)$:

$$\frac{1}{2m^*} \left[(\hbar k_x - eBy)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \chi(y) = E' \chi(y)$$

$$E'_{3D} = E_{3D} - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}$$

$$E'_{2D} = E_{2D} - E_i$$

Gaz elektronowy w kwantującym polu magnetycznym

- Po wprowadzeniu nowej zmiennej: $\xi = y - y_0 = y - \frac{\hbar k_x}{eB} = y - k_x l_m^2$ otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{m^*}{2} \omega_c^2 \xi^2 \right] \chi(\xi) = E' \chi(\xi) \quad \omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad \text{– częstość cyklotronowa}$$

- Rozwiązanie:

$$\chi_n(y) = \left(2^n n! \sqrt{\pi} l_m \right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(y - y_0)^2}{2l_m^2} \right] H_n\left(\frac{y - y_0}{l_m} \right)$$

wielomiany Hermite'a

$$E'_n = (n + 1/2) \hbar \omega_c \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

3D

$$E_{3D} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + (n + 1/2) \hbar \omega_c + (g^* s \mu_B B)$$

2D

$$E_{2D} = E_i + (n + 1/2) \hbar \omega_c + (g^* s \mu_B B)$$

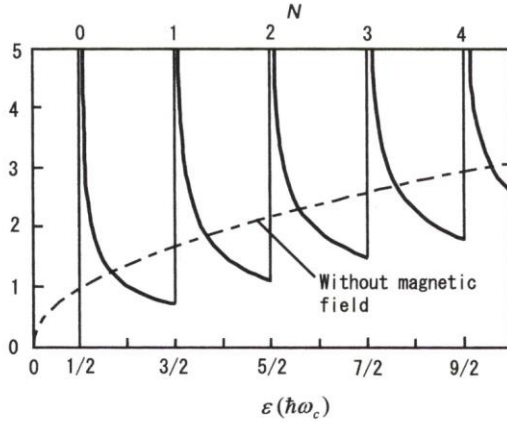
w przypadku uwzględnienia spinu ($s = \pm 1/2$)

Gaz elektronowy w kwantującym polu magnetycznym

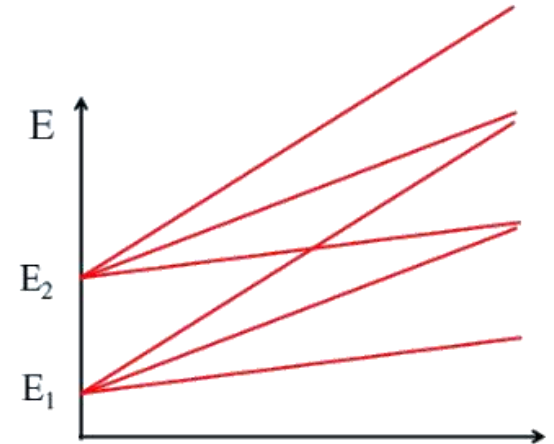
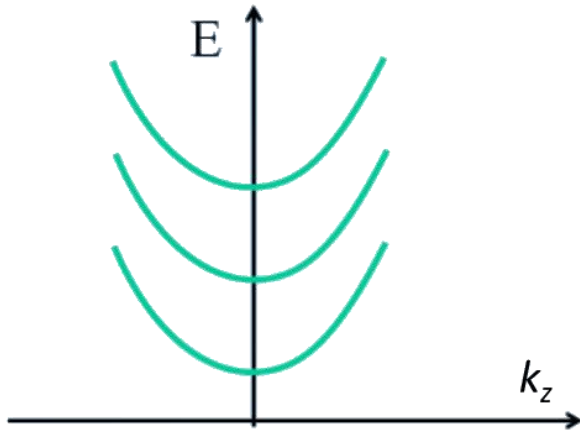
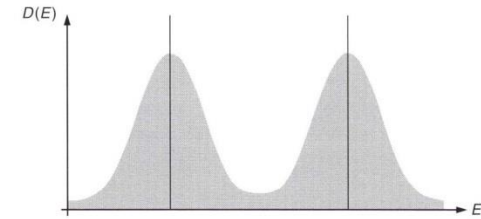
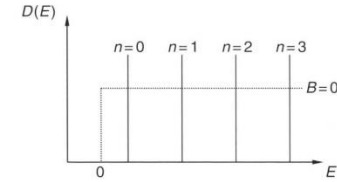
3D

Poziomy Landaua:

2D



degeneracja ze względu na k_x !!!



Gaz elektronowy w kwantującym polu magnetycznym

- Funkcje falowe w wybranym cechowaniu mają kształt „wałów” wycentrowanych na y_0 zależnym od k_x :

$$y_0 = \frac{\hbar k_x}{eB}$$

- Pomimo tego, że funkcje falowe zawierają czynnik $e^{ik_x x}$, to w **3D prędkość grupowa ma tylko składową v_z , a w 2D prędkość grupowa znika**:

$$v_x = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k_x} = 0$$

Jest to zgodne z obrazkiem klasycznym – ruch w płaszczyźnie xy jest ruchem po okręgu ze średnią prędkością równą zero

- Poziomy Landaua są zdegenerowane ze względu na k_x** :

$$0 < y_0 = \frac{\hbar k_x}{eB} < L_y$$

funkcja falowa nie może wychodzić poza próbkę (L_y – rozmiar próbki wzdłuż osi y)

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x$$

warunek periodyczności Borna – von Kármána

Gaz elektronowy w kwantującym polu magnetycznym

$$\text{stąd: } 0 < n_x < \frac{eB}{h} L_x L_y = \frac{e}{h} SB = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \Phi_0 = \frac{h}{e} - \text{kwant strumienia pola } \mathbf{B}$$



degeneracja poziomów Landaua (liczona na jednostkę powierzchni):

$$N_0 = \frac{eB}{h}$$

liczba stanów na poziomie Landaua jest proporcjonalna do pola magnetycznego, ale energia cyklotronowa też rośnie liniowo z polem
 \Rightarrow średnia gęstość stanów się nie zmienia

Gaz elektronowy 2D w kwantującym polu magnetycznym

Próbka 2D ograniczona w kierunku y (np. pasek o szerokości W)

$$\left[\hat{H}_{2D} + U(y) \right] \phi(x, y, z) = E \phi(x, y, z)$$

$$\phi(x, y, z) = e^{ik_x x} \cdot \psi(y) \cdot \varphi(z)$$

- Teraz **nie można się spodziewać**, że $\psi(y)$ będzie funkcją oscylatora harmonicznego, a energia nie będzie zależała od k_x . W związku z tym w ogólności zniesiona będzie degeneracja poziomów Landaua oraz prędkość będzie różna od zera:

$$v_x = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k_x} \neq 0$$

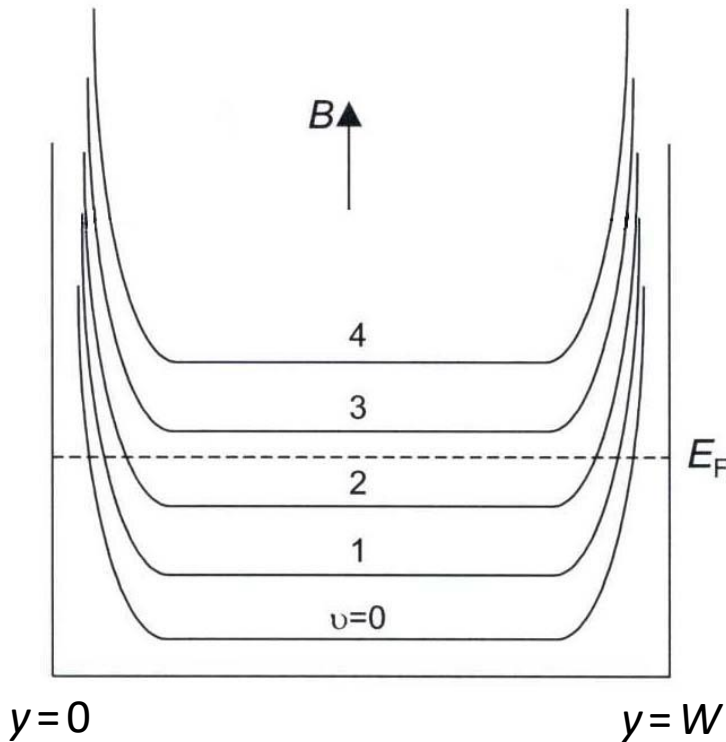
- Jeśli $U(y)$ mało zmienia się na obszarze długości magnetycznej $l_m = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ (a taka jest rozciągłość funkcji landauowskich w kierunku y), to energię możemy oszacować w najniższym rzędzie rachunku zaburzeń:

$$E_{i,n,k_x} \approx E_i + (n + 1/2)\hbar\omega_c + \langle \phi_{2D} | U | \phi_{2D} \rangle \approx E_i + (n + 1/2)\hbar\omega_c + U\left(y = \frac{\hbar k_x}{eB}\right)$$

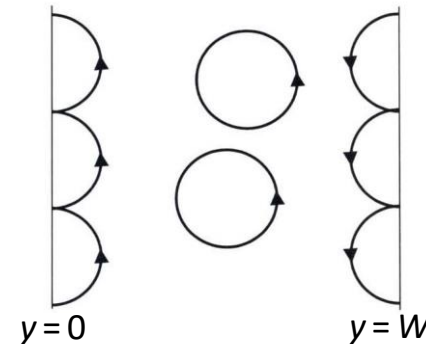
Gaz elektronowy 2D w kwantującym polu magnetycznym

- Prędkość:

$$v_x = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{i,n,k_x}}{\partial k_x} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U}{\partial k_x} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial k_x} = \frac{1}{eB} \frac{\partial U(y)}{\partial y}$$

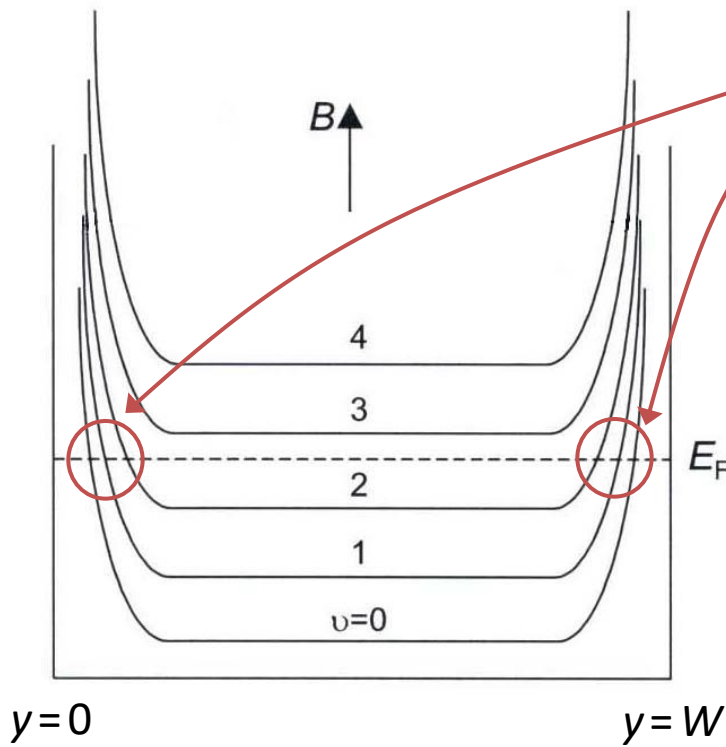


- Na przeciwnych krawędziach próbki prędkość jest przeciwnego znaku!**
- analogia do klasycznych orbit „przeskakujących” – ang. „skipping orbits”:

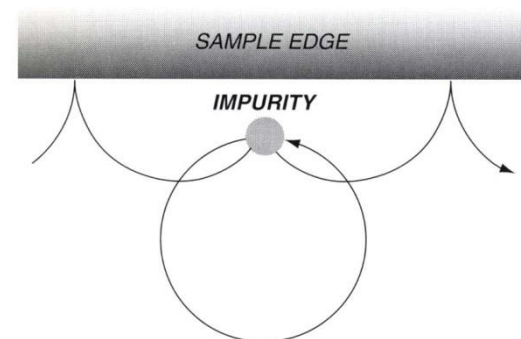


Gaz elektronowy w kwantującym polu magnetycznym

- Na obu krawędziach próbki płyną prądy w przeciwne strony – (edge states, edge currents), zaś blisko środka próbki stany elektronowe są praktycznie takie same jak w nieograniczonym układzie 2D (nie ma prądów wypadkowych)



- **Stany krawędziowe stanowią jednowymiarowe kanały przewodności**
- Rozproszenia w pobliżu danej krawędzi próbki nie wpływają na przenoszony prąd



Gaz elektronowy w kwantującym polu magnetycznym

- Na przenoszony prąd mogłyby mieć wpływ tylko rozproszenia pomiędzy stanami krawędziowymi z obu stron próbki (byłyby to rozproszenia „do tyłu”). W sytuacji, kiedy poziom Fermiego jest pomiędzy poziomami Landaua takie rozproszenia w niskich temperaturach i dla makroskopowych rozmiarów próbek są zupełnie niemożliwe, gdyż stany te są kompletnie odseparowane przestrzennie



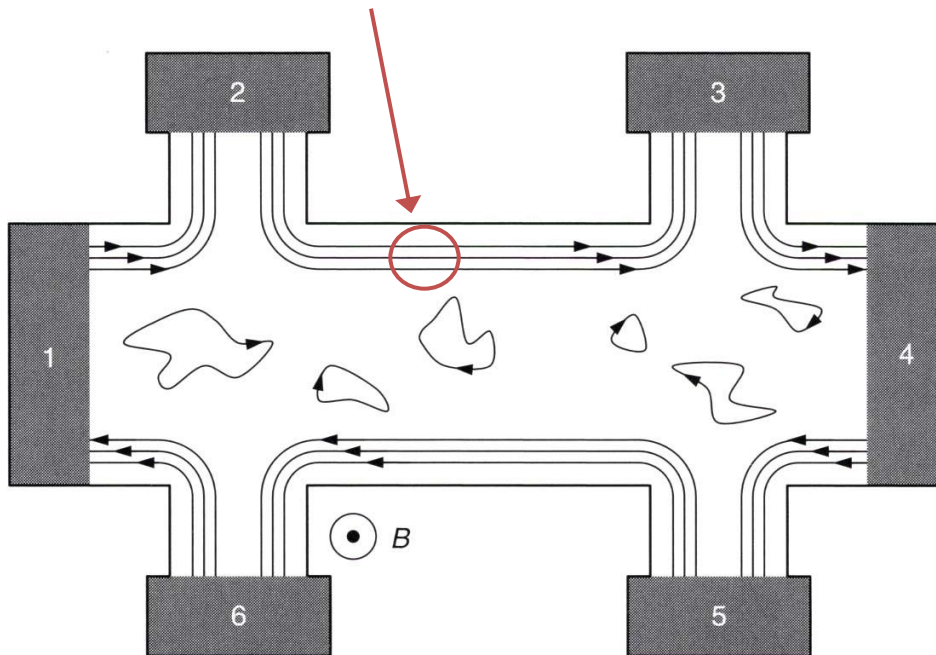
Relaksacja pędu jest wygaszona i transport odbywa się w taki sposób, jakby rozproszeń w ogóle nie było!



Kwantowy efekt Halla (QHE) a prądy krawędziowe

QHE a prądy krawędziowe

1. W głębi próbki obsadzonej jest N poziomów Landaua (na razie przyjmijmy, że są one zdegenerowane spinowo), poziom Fermiego leży między N -tym i $(N+1)$ -szym poziomem Landaua
2. Przy obu krawędziach znajduje się po N jednowymiarowych kanałów przewodności



3. Kontakty 2, 3, 5 i 6 – napięciowe (wypadkowy prąd równy zero)
4. Elektrony wypływające z danego kontaktu są z nim w równowadze
5. Korzystamy ze wzoru Landauera dla przypadku balistycznego

QHE a prądy krawędziowe

- Prądy poszczególnych kontaktów:

$$I_2 = \frac{2Ne^2}{h} (V_2 - V_1) = 0$$

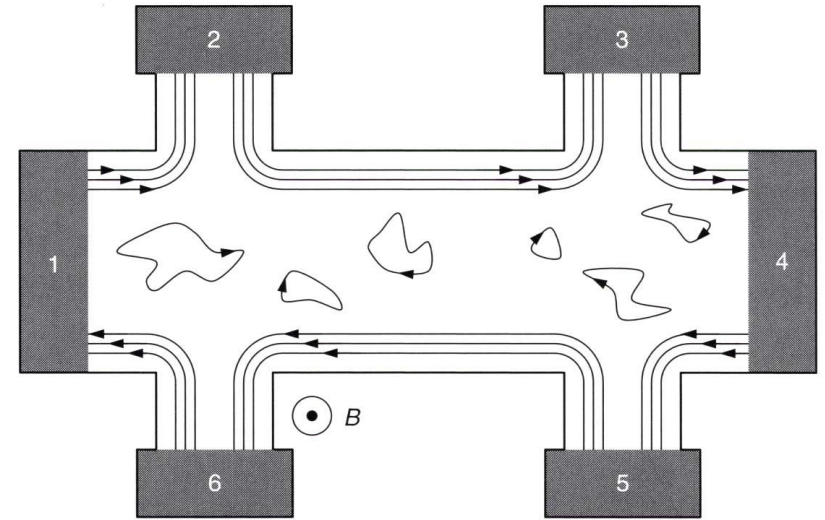
$$I_3 = \frac{2Ne^2}{h} (V_3 - V_2) = 0$$

$$I_5 = \frac{2Ne^2}{h} (V_5 - V_4) = 0$$

$$I_6 = \frac{2Ne^2}{h} (V_6 - V_5) = 0$$

$$I_1 = \frac{2Ne^2}{h} (V_1 - V_6) = I$$

$$I_4 = \frac{2Ne^2}{h} (V_4 - V_3) = -I$$



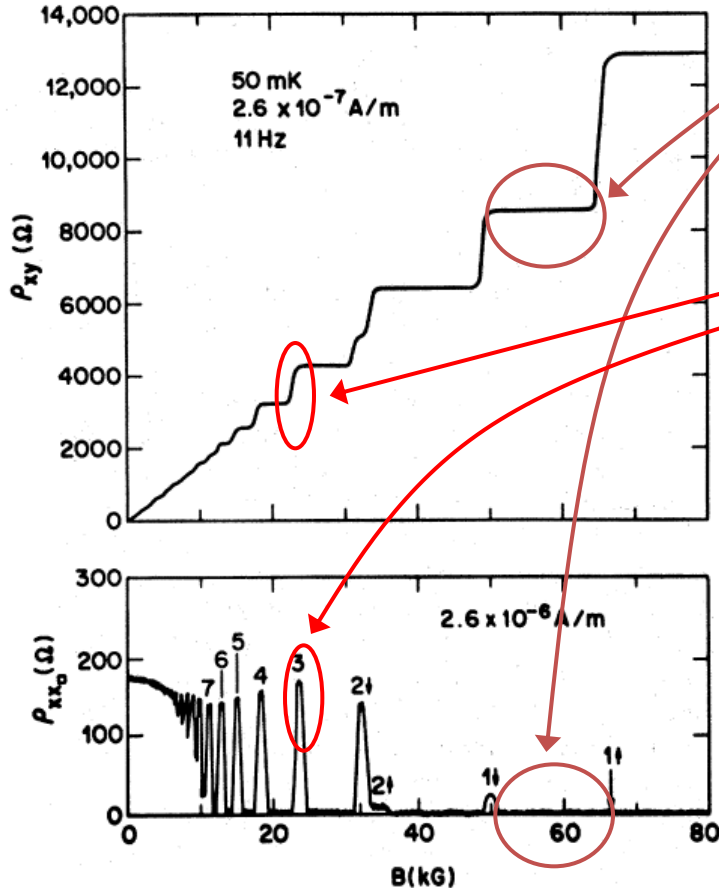
Opór hallowski

$$R_{Hall} = \frac{V_2 - V_6}{I} = \frac{h}{2Ne^2} \frac{V_2 - V_6}{V_1 - V_6} = \frac{h}{2Ne^2} = \frac{h}{\nu e^2}$$

Opór podłużny

$$R_{xx} = \frac{V_2 - V_3}{I} = \frac{V_6 - V_5}{I} = 0$$

QHE a prądy krawędziowe



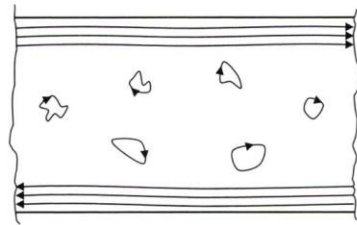
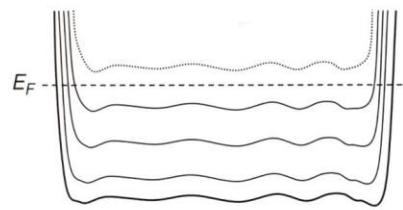
- Tam gdzie R_{xy} ma plateau, $R_{xx} = 0$ (poziom Fermiego leży między poziomami Landaua)
- Tam, gdzie R_{xx} ma maksimum, R_{xy} przechodzi z jednego plateau na drugie (kolejny poziom Landaua przechodzi przez poziom Fermiego, indeks obsadzenia zmienia się o 1)
- Dlaczego przy przejściu kolejnego poziomu Landaua przez poziom Fermiego pojawia się maksimum oporu podłużnego?

FIG. 1. ρ_{xx} and ρ_{xy} as a function of B . The numbers and the arrows above the ρ_{xx} maxima refer to the Landau quantum number and the spin polarization of the levels.

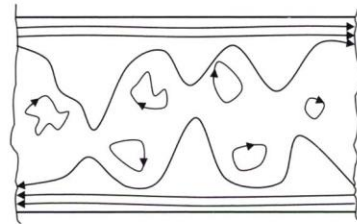
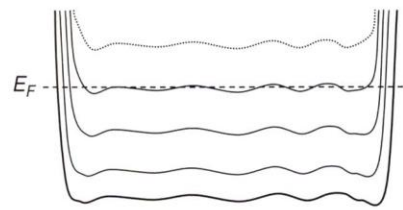
M.A. Paalanen et al., *Physical Review B* **25**, 5566 (1982)

QHE a prądy krawędziowe

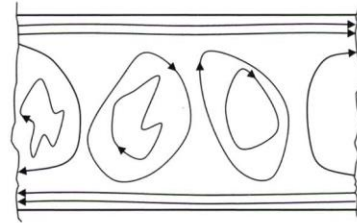
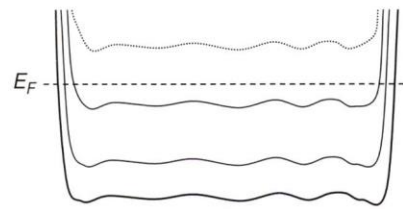
Ewolucja poziomów Landaua i stanów krawędziowych



rozpraszanie pomiędzy stanami krawędziowymi całkowicie nieefektywne, $R_{xx} = 0$, elektrony w głębi próbki zlokalizowane w obrębie fluktuacji potencjału



rozpraszanie pomiędzy stanami krawędziowymi efektywne, R_{xx} ma maksimum



kolejny poziom Landaua się opróżnił, liczba kanałów przewodzenia zmniejszyła się o jeden

QHE a prądy krawędziowe

Rola stanów zlokalizowanych w tworzeniu plateau hallowskich

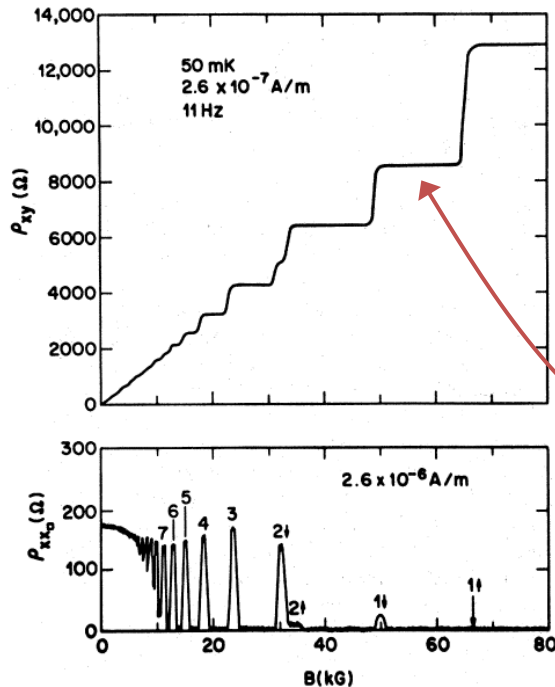
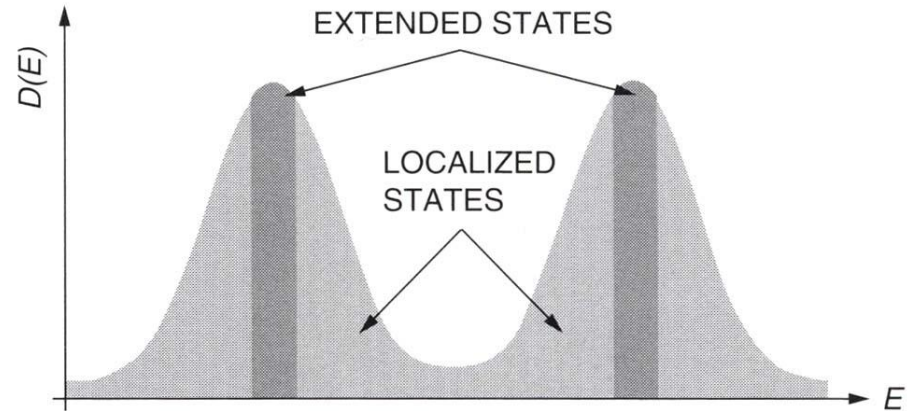


FIG. 1. ρ_{xx} and ρ_{xy} as a function of B . The numbers and the arrows above the ρ_{xx} maxima refer to the Landau quantum number and the spin polarization of the levels.



W obszarze plateau hallowskiego zwiększanie pola magnetycznego zmienia obsadzenie stanów zlokalizowanych bez zmiany liczby obsadzonych stanów krawędziowych – stany zlokalizowane „trzymają” poziom Fermiego z dala od stanów zdelokalizowanych

Warunki zaliczenia

- Dwa kolokwia, na każdym – 3 zadania po 3 pkt:
 $2 \times 3 \times 3$ pkt. = **18 pkt.**
- Ogólna aktywność w trakcie ćwiczeń (w tym – zadania rozwiązywane na ćwiczeniach) **2 pkt.**
- Zaliczenie ćwiczeń: **minimum 10 pkt.** oraz nie więcej niż 2 nieusprawiedliwione nieobecności.
- Egzamin pisemny (test + 3 zadania po 5 pkt.) (15+15) = **30 pkt.**
- **Razem** **50 pkt.**
- Egzamin ustny
- Ostateczny wynik zależy od wszystkich powyższych elementów

Warunki zaliczenia

- Osoby, które nie zaliczyły ćwiczeń w normalnym trybie - mogą uzyskać zaliczenie przystępując do egzaminu pisemnego w 1. terminie.
Warunek zaliczenia ćwiczeń: uzyskanie 15 pkt./30 pkt. z egzaminu (+ obecność na ćwiczeniach).
- Osoby, które w ten sposób zaliczą ćwiczenia, są dopuszczone do egzaminu ustnego w sesji normalnej.
- Do egzaminu pisemnego w sesji poprawkowej dopuszczeni są wszyscy.
- Osoby, które wcześniej nie zaliczyły ćwiczeń będą dopuszczone do poprawkowego egzaminu ustnego pod warunkiem uzyskania z części pisemnej minimum 15 pkt./30 pkt. (+ obecność na ćwiczeniach).