

„Fizyka materii skondensowanej i struktur półprzewodnikowych”
Wykład 13 (27.05.2020)

Tomasz Kazimierczuk

Zakład Fizyki Ciała Stałego
Instytut Fizyki Doświadczalnej
Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

Na podstawie materiałów prof. M. Baja

Transport – skale długości i czasu

Skale długości i czasu w transporcie

- Czas kwantowy τ_q , średnia droga swobodna $l_q = \tau_q v_F$
- Czas transportowy (czas relaksacji pędowej) τ_{tr} , średnia droga swobodna $l_{tr} \approx \tau_{tr} v_F$
- Czas relaksacji fazy (czas koherencji fazowej) τ_ϕ , długość relaksacji fazy (długość koherencji fazowej) l_ϕ
jeśli $\tau_\phi \gg \tau_{tr}$, to:

$$l_\phi = \sqrt{D \tau_\phi}$$

$$\text{a nie } l_\phi \approx \tau_\phi v_F$$

gdzie $D = \frac{\mu k T}{q}$ – stała dyfuzji

Transport – skale długości i czasu

5. *Długość fali de Broglie'a elektronu (na poziomie Fermiego):*

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F}$$

– dla metalu z $m^* \approx m_0$ i $E_F \approx 10$ eV:

$$\lambda_F \approx 0,4 \text{ nm} \quad (!!!)$$

– dla GaAs z $m^* \approx 0,067 m_0$ i $E_F \approx 10$ meV:

$$\lambda_F \approx 47 \text{ nm}$$



Nieporównanie łatwiej jest uzyskać efekty uwięzienia kwantowego w półprzewodnikach niż w metalach !!!

Transport – skale długości i czasu

6. Długość magnetyczna l_B

Promień orbity cyklotronowej najniższego poziomu Landaua:

$$\frac{\hbar\omega_c}{2} = \frac{m^*v^2}{2} = \frac{m^*\omega_c^2 l_B^2}{2} \quad \Rightarrow \quad l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$

w polu $B = 1\text{T}$: $l_B \approx 26\text{ nm}$

Energia cyklotronowa: $E_c = \hbar\omega_c$

Dla GaAs ($m^* = 0,067 m_0$) w $B = 1\text{T}$ $E_c \approx 1,7\text{ meV}$

Transport – skale długości i czasu

7. *Rozmiary układu (kropki kwantowej), dla których efekty ładowania pojedynczymi elektronami mogą być widoczne*

- Energia ładowania pojedynczym elektronem: $E = \frac{e^2}{2C}$
- Pojemność „wyspy” (krążka) o promieniu R otoczonej materiałem o stałej dielektrycznej ε : $C = 8\varepsilon\varepsilon_0R$
- Aby móc obserwować efekty związane z ładowaniem pojedynczym elektronem (np. tzw. blokadę kulombowską), energia ładowania nie może być dużo mniejsza od kT ($E \approx kT$):

$$R \approx \frac{e^2}{16\varepsilon\varepsilon_0kT}$$

1. dla $\varepsilon = 10$, $T = 300$ K: $R \approx 4$ nm
2. dla $\varepsilon = 10$, $T = 4$ K: $R \approx 300$ nm

Transport – skale długości i czasu

Transport elektronów przez kropki kwantowe – układ, w którym efekty ładowania muszą być widoczne

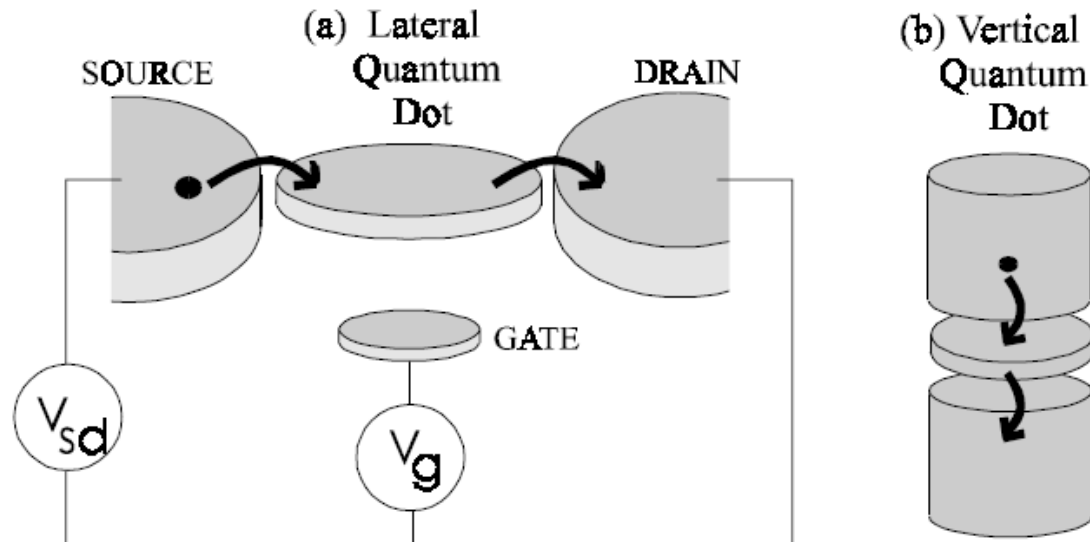
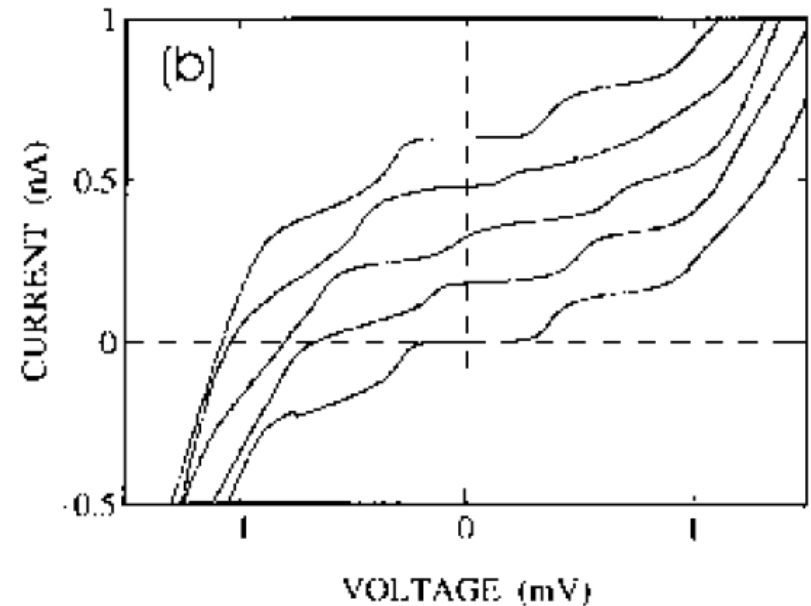
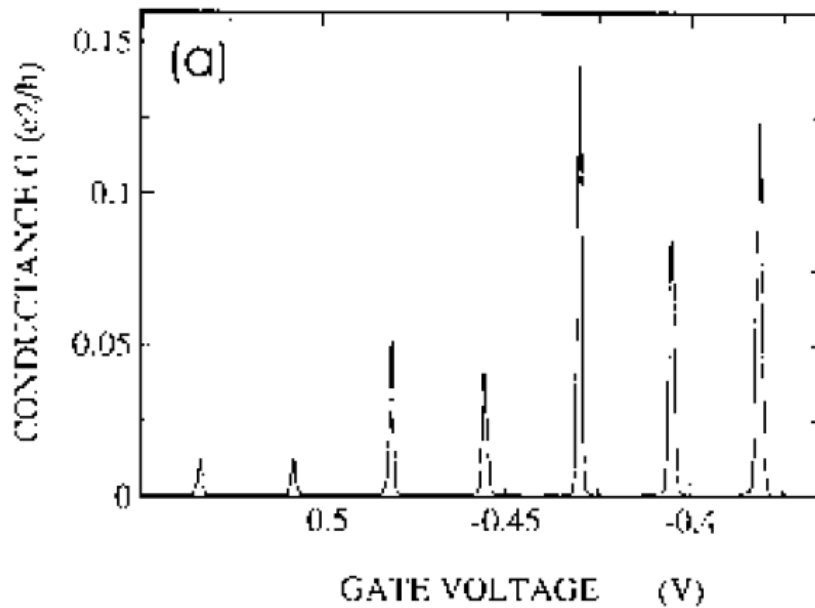


Figure 1.1. Schematic of a quantum dot, in the shape of a disk, connected to source and drain contacts by tunnel junctions and to a gate by a capacitor. (a) shows the lateral geometry and (b) the vertical geometry.

<http://marcuslab.harvard.edu/papers/KouwenhovenReview.pdf>

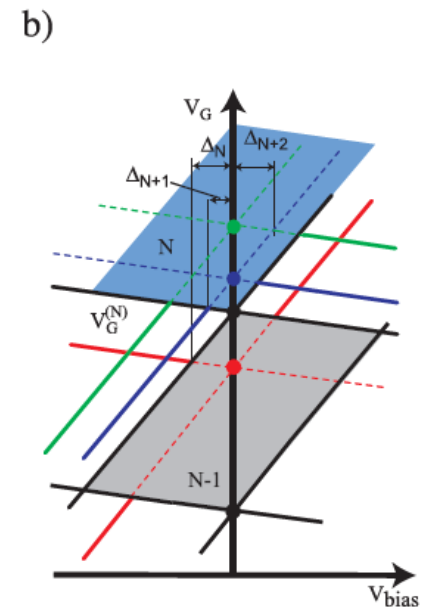
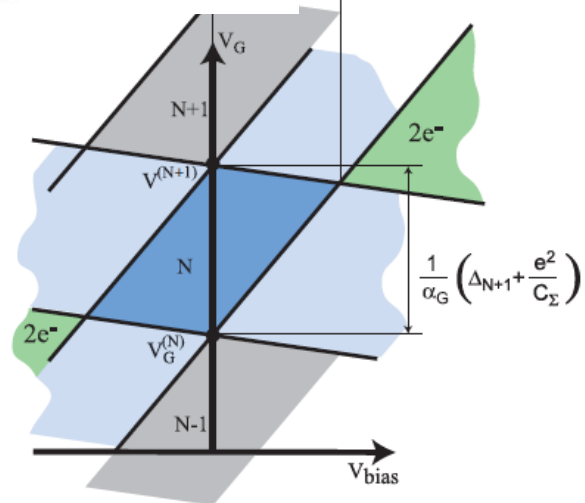
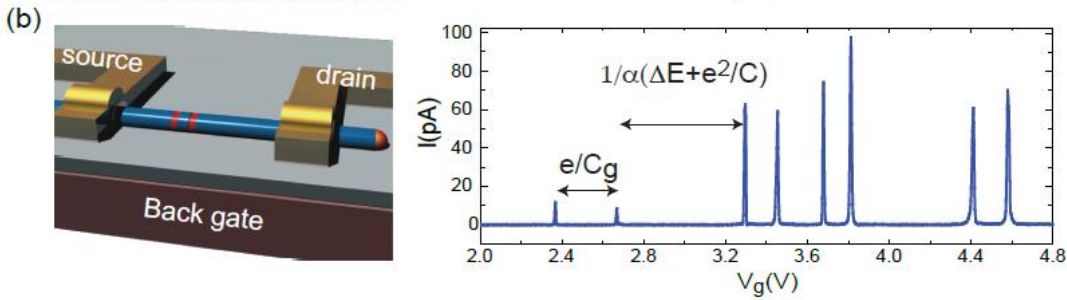
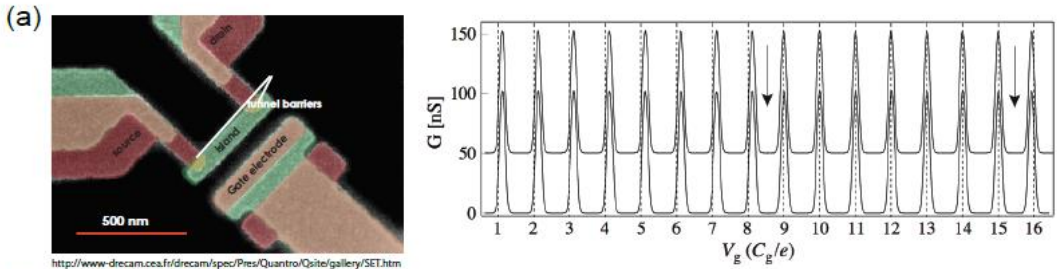
Transport – skale długości i czasu

Transport elektronów przez kropki kwantowe – układ, w którym efekty ładowania muszą być widoczne



<http://marcuslab.harvard.edu/papers/KouwenhovenReview.pdf>

Single electron transistors



Andreas Fuhrer

Transport – skale długości i czasu

Układy makro- i mezoskopowe, reżimy transportu

<p>conventional device:</p> <p style="text-align: center;">L</p>	<p>mesoscopic device:</p> <p style="text-align: center;">L</p>
<p>$L \gg l_e$ diffusive</p>	<p>$L \lesssim l_e$ ballistic</p>
<p>$L \gg l_\phi$ incoherent</p>	<p>$L \lesssim l_\phi$ phase coherent</p>
<p>$L \gg \lambda_F$ no size quantization</p>	<p>$L \lesssim \lambda_F$ size quantization</p>
<p>$e^2/C < k_B \Theta$ no single electron charging</p>	<p>$e^2/C \gtrsim k_B \Theta$ single electron charging effects</p>

T. Heinzel, „Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostuctures”, VILEY-VCH, 2007

TRANSPORT DYFUZYJNY

Transport dyfuzyjny

- Dyfuzyjny transport elektronowy – rozmiary układów (metale bądź półprzewodniki) dużo większe od średniej drogi swobodnej: $L \gg l_q, l_{tr}$
- Problem wielu cząstek – metody fizyki statystycznej \Rightarrow używać będziemy **funkcji rozkładu prawdopodobieństwa obsadzeń stanów elektronowych**. W równowadze była to funkcja rozkładu Fermiego-Diraca f_0 , teraz musi być to inna funkcja, w ogólności może explicite zależeć od:
 - wektora falowego \vec{k} (niekoniecznie tylko poprzez energię, jak to było w przypadku funkcji f_0),
 - położenia \vec{r} (dopuszczamy zależność od położenia takich parametrów jak np. temperatura – gradient temperatury)
 - i ewentualnie od czasu: $f = f(\vec{r}, \vec{k}, t)$
- Jeśli w jakiś sposób potrafilibyśmy znaleźć taką funkcję rozkładu, to bylibyśmy w stanie obliczyć rozmaite przepływy, np. (3D):

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{e}{4\pi^3} \int_{SB} \vec{v}(\vec{k}) f(\vec{r}, \vec{k}, t) d_3k \quad \text{– gęstość prądu elektrycznego}$$

Transport dyfuzyjny

czy gęstość strumienia energii (elektronowy wkład do transportu ciepła):

$$\vec{w}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{SB} (E(\vec{k}) - \mu) \vec{v}(\vec{k}) f(\vec{r}, \vec{k}, t) d_3k$$

- Przepis na znalezienie funkcji rozkładu $f = f(\vec{r}, \vec{k}, t)$ podał Boltzmann



Równanie transportu Boltzmannna

1. **Jeśli nie ma rozproszeń**, to podczas ruchu w przestrzeni fazowej **wszystkie** te elektrony, które w czasie $t + \Delta t$ znalazły się w elemencie przestrzeni fazowej opisanej współrzędnymi $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, $\vec{k} + \Delta\vec{k}$, w czasie t były w elemencie przestrzeni fazowej o współrzędnych \vec{r} , \vec{k} . Stąd (i na podstawie tw. Liouville'a) wniosek, że:

$$f(\vec{r} + \Delta\vec{r}, \vec{k} + \Delta\vec{k}, t + \Delta t) = f(\vec{r}, \vec{k}, t)$$

Transport dyfuzyjny

I w konsekwencji:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \nabla_{\vec{r}} f \cdot \Delta \vec{r} + \nabla_{\vec{k}} f \cdot \Delta \vec{k} = 0$$

co w związku z: $\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$ $\Delta \vec{k} = \frac{\vec{F}}{\hbar} \Delta t$

daje:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f = 0$$

2. Jeśli jednak są rozproszenia, to część elektronów opuszcza rozpatrywany element przestrzeni fazowej (ulegają rozproszeniom **ze** stanów zawartych w tym elemencie na zewnątrz niego), zaś część do niego wchodzi (rozproszenia **do** stanów zawartych w tym elemencie). Wtedy prawa strona powyższego równania nie równa się zero:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

Transport dyfuzyjny

Powyższe równanie można też zapisać:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{dryf} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd}$$

gdzie tzw. człon dryfowy wynosi:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{dryf} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{dyf} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{pole} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f$$

3. Człon zderzeniowy: $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd} = b - a$

$$a = \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{k}')] \rho(\vec{k}') f(\vec{k}) d_3k'$$

$$b = \int_{SB} W(\vec{k}'', \vec{k}) [1 - f(\vec{k})] \rho(\vec{k}'') f(\vec{k}'') d_3k''$$

zakładamy, że rozproszenia
odbywają się wewnątrz
jednego pasma !!!

Transport dyfuzyjny



Równanie Boltzmanna:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

- *Jest to równanie różniczkowo-całkowe, nieliniowe, w ogólnym przypadku niemożliwe do rozwiązania. Największy kłopot sprawia człon zderzeniowy!*
- Jeśli rozpatrujemy stan stacjonarny, to $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ i:

$$-\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a = 0$$

Transport dyfuzyjny

4. Uwaga!!!

Przestrzeń fazowa jest 6-cio wymiarowa (3D) i zawiera zmienne \vec{k} i \vec{r} , które nie mogą być dla cząstki kwantowej jednocześnie określone (zasada nieoznaczoności). Jest to więc *opis kwaziklasyczny*, który jest akceptowalny, jeśli elektronową paczkę falową można w przybliżeniu traktować jak cząstkę klasyczną:

- W szczególności długość fali de Broglie'a elektronu l musi spełniać następujące warunki:
 - $l \ll L$, gdzie L – typowy rozmiar dla danego problemu
 - $\lambda \cdot |\vec{F}| \ll \langle E \rangle$ – zmiana energii E wywołana działaniem siły zewnętrznej na drodze l musi być mała w porównaniu ze średnią energią



Transport dyfuzyjny

np. w polu elektrycznym o natężeniu e : $F = e\varepsilon$,

dla GaAs z $E_F \approx 10$ meV $\lambda \approx 50$ nm powyższy warunek daje:

$$\varepsilon \ll 2 \cdot 10^3 \text{ V/cm}$$

jest to silne pole jak na przewodzące próbki makroskopowe, ale niezbyt silne z punktu widzenia układów w skali mikro (np. przyrządów półprzewodnikowych)

- $\lambda \ll l$ gdzie l – średnia droga swobodna
- Ponadto, aby można było stosować opis w ramach równania Boltzmann'a, to np. pola magnetyczne muszą być niekwantujące:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_c \ll \langle E \rangle &\Rightarrow \hbar\omega_c \ll kT && \text{– przypadek niezdegenerowany} \\ & && \hbar\omega_c \ll E_F && \text{– przypadek zdegenerowany} \end{aligned}$$

Transport dyfuzyjny

Rozwiązywanie równania Boltzmann

Człon zderzeniowy

- Człon zderzeniowy równania Boltzmann (tutaj, dla uproszczenia, pomijamy ewentualną zależność od \vec{r}):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = b - a = \int_{SB} \left\{ W(\vec{k}', \vec{k}) [1 - f(\vec{k})] f(\vec{k}') - W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{k}')] f(\vec{k}) \right\} \rho(\vec{k}') d_3k'$$

- W **równowadze termodynamicznej** (wtedy $f = f_0$), z zasady równowagi szczegółowej wynika, że:

$$W(\vec{k}', \vec{k}) [1 - f_0(\vec{k})] f_0(\vec{k}') = W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f_0(\vec{k}')] f_0(\vec{k}) \quad (1)$$

a skoro f_0 jest rozkładem Fermiego-Diraca, to:

$$\frac{W(\vec{k}', \vec{k})}{W(\vec{k}, \vec{k}')} = \frac{(1 - f_0(\vec{k}')) f_0(\vec{k})}{(1 - f_0(\vec{k})) f_0(\vec{k}')} = \exp\left(\frac{E(\vec{k}') - E(\vec{k})}{k_B T}\right)$$

Transport dyfuzyjny



- Prawdopodobieństwo rozproszenia ze zmniejszeniem energii jest większe niż przejścia odwrotnego.
- Rozwiązanie równania Boltzmann'a zapisujemy w postaci:

$$f(\vec{k}) = f_0(E(\vec{k})) + f_1(\vec{k}) \quad (2)$$

gdzie f_0 jest funkcją Fermiego-Diraca (**parzysta** względem \vec{k}), zaś f_1 jest **nieparzysta** względem \vec{k}

- Przeważnie **f_1 jest małe**: $|f_1| = |f - f_0| \ll f_0$ i powinno być (w przybliżeniu liniowym) **proporcjonalne do zewnętrznej siły** (ewentualnie gradientu temperatury)
- Biorąc pod uwagę (1) i (2) oraz **opuszczając w rachunkach wyrazy wyższych rzędów niż pierwszy w f_1** , człon zderzeniowy przyjmuje postać **liniową** względem f_1 :

Transport dyfuzyjny

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = - \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}') \left\{ \frac{1 - f_0(E')}{1 - f_0(E)} \cdot f_1(\vec{k}) - \frac{f_0(E)}{f_0(E')} \cdot f_1(\vec{k}') \right\} \rho(\vec{k}') d_3k' \quad (3)$$

co można **formalnie** zapisać jako:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = - \frac{f_1(\vec{k})}{\tau(\vec{k})}$$

gdzie $\tau(\vec{k})$ – tzw. **czas relaksacji pędowej**:

$$\frac{1}{\tau(\vec{k})} = \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}') \left\{ \frac{1 - f_0(E')}{1 - f_0(E)} \frac{f_1(\vec{k}')}{f_1(\vec{k})} - \frac{f_0(E)}{f_0(E')} \right\} \rho(\vec{k}') d_3k' \quad (4)$$

- **Sens czasu relaksacji:**

jeśli wyprowadzimy układ ze stanu równowagi, a potem nagle wyłączymy siły zewnętrzne, to (jeśli $\tau(\vec{k})$ możemy uznać za stałą !!!):

$$\frac{\partial f(\vec{k}, t)}{\partial t} + \frac{f(\vec{k}, t) - f_0(\vec{k})}{\tau(\vec{k})} = 0 \quad \Rightarrow \quad (f - f_0)_t = (f - f_0)_{t=0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Transport dyfuzyjny

czas relaksacji charakteryzuje szybkość dochodzenia układu do stanu równowagi

- W ten sposób, *po wprowadzeniu pojęcia czasu relaksacji* równanie Boltzmann'a przyjmuje prostą (tylko formalnie !!!) postać :

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f = -\frac{f - f_0}{\tau(\vec{k})}$$

Ale:

- *w równaniu (4) występuje stosunek dwóch wartości nieznanej funkcji f_1 !!!*
- *tylko wtedy, gdy $\frac{f_1(\vec{k}')}{f_1(\vec{k})}$ nie zależy ani od rodzaju, ani od wielkości zaburzenia, czas relaksacji pędowej jest charakterystyczny dla danego materiału i ma dobrze określony sens fizyczny*

Równanie Boltzmann – uproszczenia

- *po podstawieniu $f(\vec{k}) = f_0(E(\vec{k})) + f_1(\vec{k})$ i założeniu, że $|f_1| \ll f_0$ równanie Boltzmann udało się wprowadzić zlinearyzować, ale **jest ono nadal równaniem różniczkowo-całkowym !!!***

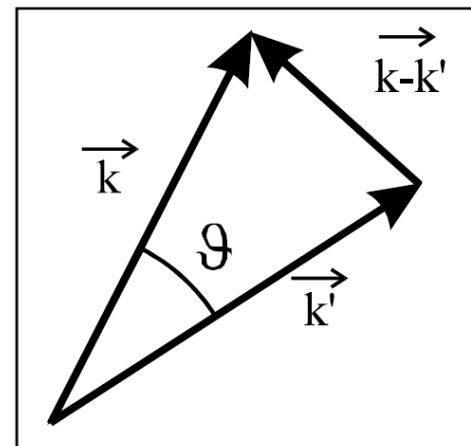
⇒ Potrzebne: **Dalsze uproszczenia/założenia**

1. *jeśli rozproszenia można uważać za **elastyczne**, to $E(\vec{k}') = E(\vec{k})$ i równanie (3) przyjmuje postać:*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = - \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}') [f_1(\vec{k}) - f_1(\vec{k}')] \rho(\vec{k}') d_3k'$$

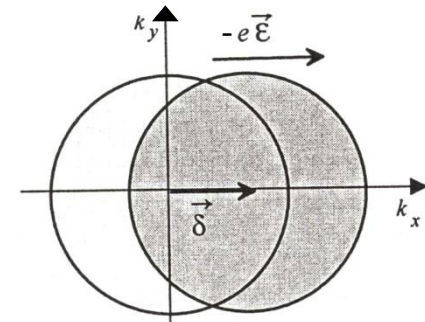
2. *jeśli ponadto proces rozpraszania jest **izotropowy** (to nie zawsze jest spełnione!), a **pasmo jest sferyczne**, to:*

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = \delta(k - k') \Theta(k, \mathcal{G})$$



Równanie Boltzmannna – uproszczenia

3. **zewnętrzna siła** (np. pole elektryczne) przesuwają rozkład równowagowy zgodnie z równaniem ruchu $\vec{F} = \hbar \dot{\vec{k}}$, zaś rozpraszanie ten ruch hamuje; **sensowne jest więc przypuszczać, że w stanie stacjonarnym będzie:**



$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k} - \vec{\delta}) = f_0(\vec{k}) - \frac{\partial f_0}{\partial E} (\nabla_{\vec{k}} E) \cdot \vec{\delta} = f_0(\vec{k}) + \vec{v} \cdot \vec{X}(E) = f_1$$

4. **jeśli pasmo jest sferyczne**, to $\vec{v} \parallel \vec{k}$:

$$\vec{v}(\vec{k}) = \frac{\hbar \vec{k}}{m_p^*(k)}$$

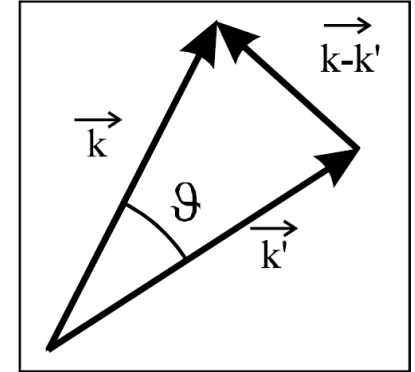
– gdzie $m_p(k)$ jest pędowną masą efektywną, w ogólności zależną od k (nieparaboliczność)

Z (1-4) wynika, że:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd} = -\rho(\vec{k}) \frac{\hbar}{m_p^*(k)} \int_{SB} \delta(k - k') \Theta(k, \mathcal{G}) \vec{X}(E) \cdot (\vec{k} - \vec{k}') d_3 k'$$

Równanie Boltzmannna – uproszczenia

5. **3D**, całkujemy we współrzędnych sferycznych, z osią biegunową równoległą do wektora \vec{k}



$$\vec{k} - \vec{k}' = (\vec{k} - \vec{k}')_{\parallel} + (\vec{k} - \vec{k}')_{\perp} = k(1 - \cos \vartheta) + (\vec{k} - \vec{k}')_{\perp}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd} = -\frac{1}{4\pi^3} \frac{\hbar}{m_p^*(k)} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(k - k') \Theta(k, \vartheta) \vec{X}(E) \cdot (\vec{k} - \vec{k}') k'^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dk'$$



całkowanie po φ eliminuje człon zawierający $(\vec{k} - \vec{k}')_{\perp}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\hbar}{m_p^*} \int_0^{\pi} \Theta(k, \vartheta) \vec{X}(E) \cdot \vec{k} (1 - \cos \vartheta) k^2 \sin \vartheta d\vartheta$$

f_1

Równanie Boltzmann – uproszczenia



$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \Theta(k, \vartheta) (1 - \cos \vartheta) k^2 \sin \vartheta d\vartheta$$

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = \delta(k - k') \Theta(k, \vartheta)$$

(*)

- *Taki czas relaksacji nie zależy od rodzaju i wielkości zaburzenia, zależy tylko od energii nośnika (elektronu lub dziury) – jest więc dobrym parametrem charakteryzującym dany materiał*
- *Dla różnych mechanizmów rozpraszania zależność $\tau(E)$ może być różna*
- *Jeśli istnieje szereg niezależnych mechanizmów rozpraszania, to:*

$$\frac{1}{\tau_{tot}(E)} = \sum_i \frac{1}{\tau_i(E)}$$

Równanie Boltzmannna – uproszczenia

Przypomnijmy założenia, które doprowadziły do wzoru (*) na czas relaksacji

1. $|f_1| \ll f_0$
2. rozproszenia można uważać za elastyczne i nie wyprowadzają poza pasmo
3. rozproszenia są izotropowe (w sensie niezależności od kierunku wektora \vec{k})
4. $f_1(\vec{k}) = \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$
5. pasmo jest sferyczne

Złożony problem rozwiązania nieliniowego równania różniczkowo-całkowego (równania Boltzmannna) został sprowadzony do 2 rozdzielnych problemów:

- 1. znalezienia zależności czasu relaksacji od energii***
- 2. rozwiązania liniowego równania różniczkowego***

Równanie Boltzmannna – czas relaksacji

Zależność czasu relaksacji od energii

- W ogólności zależności $\tau(E)$ dla różnych mechanizmów rozpraszania mogą być skomplikowane (np.: B.M. Askerov, „Electron transport phenomena in semiconductors”, World Scientific 1994, D. K. Ferry, „Semiconductor transport”, Taylor & Francis 2000)
- Dla ***pasma parabolicznego*** w wielu przypadkach czas relaksacji daje się opisać zależnością potęgową od energii:

$$\tau(E) = \tau_{0r}(T) \cdot \left(\frac{E}{kT} \right)^{(r-1/2)} \quad \Rightarrow \quad l_{tr}(E) \approx v\tau \sim E^{1/2} \cdot E^{(r-1/2)} = E^r$$

- czynnik $\tau_{0r}(T)$ zależy od temperatury z powodu:
 - wyłączenia kT we wzorze opisującym $\tau(E)$
 - dodatkowej zależności – np. poprzez liczbę fononów
- Jeśli półprzewodnik jest niezdegenerowany i można stosować rozkład Boltzmannna, to $\langle E \rangle \sim kT$ i τ zależy od temperatury wyłącznie poprzez czynnik $\tau_{0r}(T)$

Równanie Boltzmannna – czas relaksacji

Scattering mechanism	Scattering parameter	$\tau_{0r}(T)$	A_{0r}
Point defects (short-range potential)	0	$\frac{\pi\hbar^4}{m_n(2m_n k_0 T)^{1/2} U_0^2 N_g}$	$\frac{\pi}{\hbar} U_0^2 N_g$
Acoustic phonons (deformation potential)	0	$\frac{2\pi\hbar^4 \rho v_0^2}{E_1^2 (2m_n k_0 T)^{3/2}}$	$\frac{\pi E_1^2 k_0 T}{\hbar \rho v_0^2}$
Nonpolar optical phonons at high temperatures ($k_0 T \gg \hbar\omega_0$)*	0	$\frac{2}{\pi} \left(\frac{\hbar\omega_0}{E_0} \right)^2 \frac{\hbar^2 a^2 \rho}{(2m_n k_0 T)^{3/2}}$	$\pi^3 \hbar \left(\frac{E_0}{\hbar\omega_0} \right)^2 \frac{k_0 T}{\rho a^2}$
Polar optical phonons at high temperatures ($k_0 T \gg \hbar\omega_0$)	1	$\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\hbar}{\omega_0 k_0 T} \right)^{1/2}$	$\frac{2\pi^2 e^2 k_0 T}{\chi^* \hbar}$
Piezoacoustic phonons	1	$\frac{2\pi\hbar^2 \chi}{e^2 \Pi_0^2} \left(\frac{2}{m_n k_0 T} \right)^{1/2}$	$\frac{\pi e^2 k_0 T \Pi_0^2}{2\hbar \chi}$
Impurity ions	2	$\frac{\chi^2 (2m_n)^{1/2} (k_0 T)^{3/2}}{\pi e^4 N_i F_{\text{imp}}(\epsilon)}$	$\frac{2\pi^3 N_i F_{\text{imp}}(k)}{\hbar \chi^2}$
* At low temperatures ($k_0 T \ll \hbar\omega_0$) in the case of scattering by polar or nonpolar optical phonons τ does not depend on energy ($r = 1/2$), and for a parabolic band it is given by the formulae (11.63) and (11.84) respectively.			

B.M. Askerov, „Electron transport phenomena in semiconductors”

Równanie Boltzmann – pole elektryczne

Nośniki w polu elektrycznym (3D)

- równanie Boltzmann w przybliżeniu czasu relaksacji, dla stanu stacjonarnego:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0 \quad \vec{F} = q\vec{\varepsilon} \quad - \text{gdzie} \quad q = \pm e$$

- zakładamy, że układ jest jednorodny w całej swojej objętości: $\nabla_{\vec{r}} f = 0$

- $\nabla_{\vec{k}} f = \nabla_{\vec{k}} (f_0 + f_1) = \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E + \nabla_{\vec{k}} f_1$

- ograniczamy się do członów liniowych w zaburzeniu, a więc odrzucamy człon:

$$\frac{q}{\hbar} \vec{\varepsilon} \cdot \nabla_{\vec{k}} f_1$$



$$\frac{q}{\hbar} \vec{\varepsilon} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar \vec{v} + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 = q\tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{\varepsilon} \cdot \vec{v} = \vec{X}(E) \cdot \vec{v}$$

jest to postać postulowana już wcześniej

Równanie Boltzmannna – pole elektryczne

- gęstość prądu można obliczyć licząc całkę po całej strefie Brillouina z funkcją f_1 (f_0 jako funkcja równowagowa nie daje wkładu do prądu):

$$\vec{j} = \int_{SB} q\vec{v} \cdot f_1 \cdot \rho(\vec{k}) d_3k = \frac{1}{4\pi^3} \int_{SB} q\vec{v} \cdot q\tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) (\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) d_3k$$

- wprowadzając układ współrzędnych sferycznych z osią biegunową skierowaną wzdłuż wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{\varepsilon}$, wykonując całkowania po kątach i zamieniając zmienną całkowania z k na E (w przybliżeniu pasma sferycznego) można otrzymać:

$$\vec{j} = \frac{e^2}{m^*} \left[\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE \right] \vec{\varepsilon}$$

- wartość średnia funkcji $A(E)$ zależnej od energii:

$$\langle A(E) \rangle = \frac{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty A(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE}{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE} = \frac{1}{3\pi^2 n} \int_0^\infty A(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE$$

(ćwiczenia ?)

Równanie Boltzmannna – pole elektryczne



$$\vec{j} = \frac{e^2 n \langle \tau \rangle}{m^*} \vec{\varepsilon} = \sigma \vec{\varepsilon}$$

$$\sigma = en\mu$$

– przewodnictwo elektryczne

$$\mu = \frac{e \langle \tau \rangle}{m^*}$$

– ruchliwość

- w przypadku **niezdegenerowanym** w **niskich temperaturach** można się spodziewać $\mu(T) \sim T^{3/2}$ (rozpraszanie zdominowane przez zjonizowane domieszki)
- w przypadku **niezdegenerowanym** w **wysokich temperaturach** można się spodziewać $\mu(T) \sim T^{-3/2}$ (jeśli rozpraszanie zdominowane przez fonony akustyczne, potencjał deformacyjny)

Nośniki w polu elektrycznym - ruchliwość

GaAs - ruchliwość

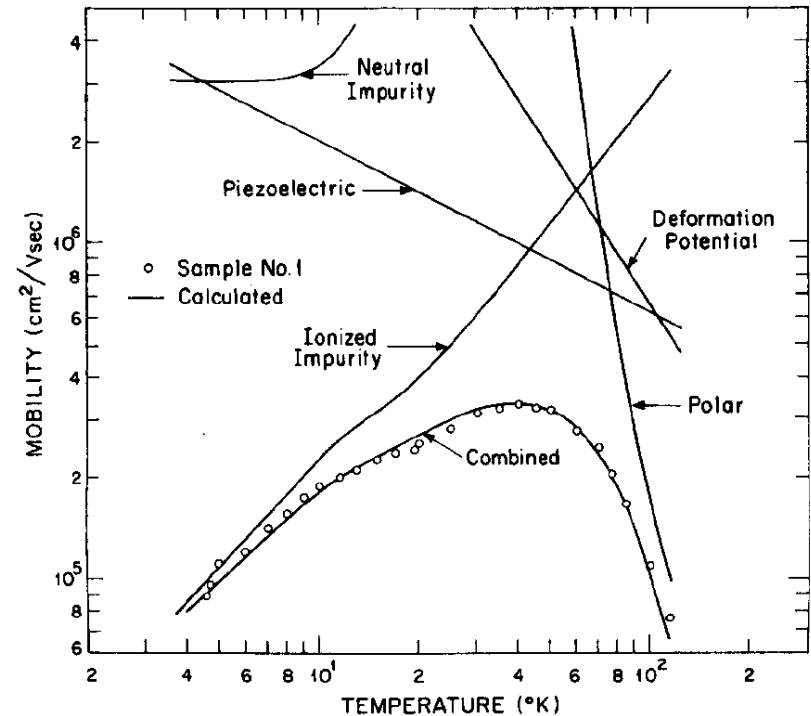
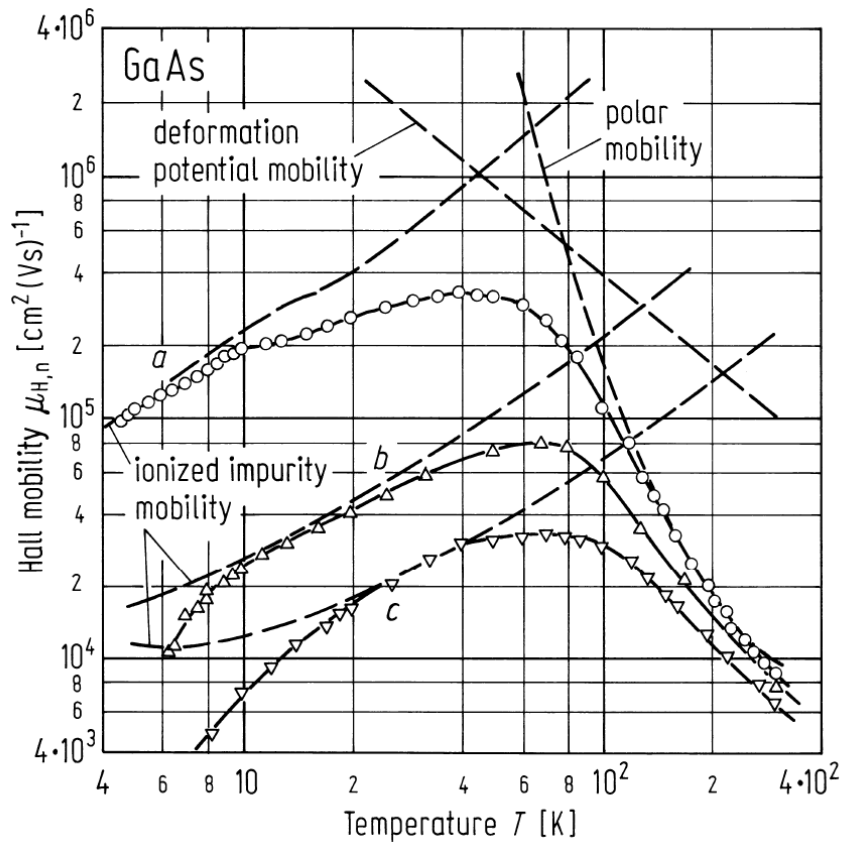


FIG. 1. Temperature dependence of the mobility for the highest purity sample showing the mobility curves calculated for each scattering process, the calculated combined mobility curve, and the experimental points.

C.M. Wolfe et al., *Journal of Applied Physics*, **41**, 3088 (1970)