

# TEORIA GRUP II W CZASACH ZARAŻY

## 2., 3., 4. I 7. WYKŁAD ZDALNY

### LIE TO ME, CARTAN!

#### SPIS TREŚCI

1. Grupy Liego i rachunek różniczkowy Cartana	1
Dodatek A. Odzworowania	22
Dodatek B. Iloczyn półprosty grup	22

#### 1. GRUPY LIEGO I RACHUNEK RÓŻNICZKOWY CARTANA

Ostatni wykład dostarczył rzetelnej motywacji do studiowania grup, których elementy zależą w sposób ciągły lub zgoła gładki od (zbioru) parametrów. Naturalnego uogólnienia i formalizacji naszych rozważań dostarcza teoria grup Liego, tj. zbiorów wyposażonych w uzgodnione wzajem struktury: algebraiczną strukturę grupy (wprowadzoną na pierwszorocznym wykładzie z Algebry) i geometryczną strukturę różniczkowalnej (wprowadzoną na drugorocznym wykładzie z Geometrii różniczkowej). Uzgodnienie takie ma daleko idące konsekwencje dla stycznościowego rachunku różniczkowego na tych różniczościach, którego liczne *strukturalne* zastosowania w mechanice klasycznej (np. teoria odwzorowań momentowych w opisie symetrii i redukcji symplektycznych) i teorii pola (np. cechowanie symetrii sztywnych, zw. też globalnymi, ale także nieliniowe realizacje symetrii istotne w opisie zjawisk takich jak mechanizm Higgsa czy odwrotny mechanizm Higgsa) czynią studium jego podstawowych własności nieodzownym elementem niniejszego kursu. Z owego studium wyprowadzimy naturalnie pojęcie (stycznościowej) algebry Liego (grupy Liego), którego desygnat zostanie następnie poddany abstrakcji i klasyfikacji, co będzie stanowiło punkt wyjścia do dyskusji teorii reprezentacji o fundamentalnym znaczeniu fizycznym (w kontekście, m.in., klasycznej teorii oddziaływań fundamentalnych i kwantowomechanicznej klasyfikacji pól materii i nośników oddziaływań).

Zacniemy od pojęć podstawowych

**Definicja 1.** Grupa topologiczna to grupa

$$(G, m \equiv \cdot, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto e),$$

której nośnik  $G$  jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne  $m$  i  $\text{Inv}$  są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej  $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$  to grupa topologiczna  $(H, m|_{H \times H}, \text{Inv}|_H, \bullet \mapsto e)$ , której nośnik  $H$  jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni  $G$ . **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi  $(G_1, m_1, \text{Inv}_1, \bullet_1 \mapsto e_1)$  i  $(G_2, m_2, \text{Inv}_2, \bullet_2 \mapsto e_2)$  to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Analogicznie definiujemy **grupę Liego** jako grupę, której nośnik jest różniczością gładką, a odwzorowania strukturalne  $m$  i  $\text{Inv}$  są klasy  $C^\infty$ . **Podgrupa Liego** grupy Liego  $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$  to grupa Liego  $(H, m|_{H \times H}, \text{Inv}|_H, \bullet \mapsto e)$ , której nośnik  $H$  jest podróżniczością klasy  $C^\infty$  różniczości  $G$ . **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

**Przykłady 1.**

- (1)  $\mathbb{R}^{x^n}$
- (2)  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \text{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$
- (3)  $\text{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$
- (4) grupa Poincarégo z App. B

- (5) Grupa liniowa główna  $GL(n; \mathbb{R})$  dziedziczy topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni  $\mathbb{R}(n) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$ , w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty  $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})$  (wszak  $\det_{(n)} : \mathbb{R}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym)
- (6) wiele innych, które zostaną przedstawione na ćwiczeniach.

**Lemat 1.** Przyjmijmy zapis Def.1 i niechaj  $G$  będzie grupą topologiczną. Dla dowolnego elementu  $g \in G$  i dowolnego otoczenia otwartego  $\mathcal{O}_e \in \mathcal{T}(G)$  elementu neutralnego  $e \in G$  istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_g \in \mathcal{T}(G)$  elementu  $g$  spełniające warunek

$$m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e.$$

*Dowód:* Odwzorowanie  $f \equiv m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)$  jest ciągle (w topologii produktowej na swej dziedzinie), przeto istnieją otoczenia otwarte  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  elementu  $g$  o własności  $f(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_e$ . Otwarte otoczenie  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 =: \mathcal{O}_g$  spełnia pożądaną własność  $f(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e$ .  $\square$

**Stwierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis Def.1 i niechaj  $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$  będzie grupą Liego. Czwórka

$$(\text{T}G, \text{T}m, \text{T}\text{Inv}, (\bullet, 0) \mapsto 0_{\text{T}_e G} \in \text{T}_e G)$$

jest grupą Liego noszącą miano **stycznej grupy Liego**. Rzut kanoniczny  $\pi_{\text{T}G} : \text{T}G \rightarrow G$  oraz cięcia zerowe  $\mathbf{0}_{\text{T}G}$  są homomorfizmami grup Liego spełniającymi relację

$$(1) \quad \pi_{\text{T}G} \circ \mathbf{0}_{\text{T}G} = \text{id}_G.$$

*Dowód:* Chwila zastanowienia uświadamia nam, że przyporządkowanie rozmaitości gładkiej jej wiązki stycznej ma charakter funktorialny (zrozumienie użytego tu niezwykle ekonomicznego skrótu pojęciowego umożliwia krótkie wprowadzenie do języka teorii kategorii, które załączam w oddzielnym pliku). Funktorialność  $\text{T}$  zapewnia transport nie tylko pełnej struktury (czyli struktury gładkiej i odwzorowań) grupy Liego  $G$ , ale także jej aksjomatyki – funktorialnym obrazem diagramów przemiennych wyrażających aksjomaty  $G$  są analogiczne diagramy dla  $\text{T}G$ . Jedynym zatem nietrywialnym punktem dowodzonego stwierdzenia jest ten mówiący o homomorficznym charakterze rzutu kanonicznego i cięcia zerowego oraz ich wzajemnej relacji. Zaczniemy od rzutu kanonicznego. Zważywszy definicję odwzorowania stycznego, stwierdzamy, że dla dowolnych  $(g, h) \in G \times G$  jest

$$\text{T}_{(g,h)} m : \text{T}_{(g,h)}(G \times G) \cong \text{T}_g G \oplus \text{T}_h G \rightarrow \text{T}_{m(g,h)} G,$$

zatem

$$\pi_{\text{T}G} \circ \text{T}m = m \circ (\pi_{\text{T}G} \times \pi_{\text{T}G}),$$

a to jest właśnie definiująca własność homomorfizmu grup, przy czym wobec gładkości  $m$  także odwzorowanie styczne jest gładkie, mamy przeto do czynienia z homomorfizmem grup Liego. Aby postąpić dalej, musimy wejrzeć w strukturę  $\text{T}_{(g,h)} m$ . Dla dowolnego elementu  $g \in G$  zdefiniujmy odwzorowania gładkie

$$\ell_g : G \circlearrowleft : h \mapsto m(g, h), \quad \wp_g : G \circlearrowright : h \mapsto m(h, g).$$

Wyberzmy lokalne mapy:  $\kappa_g \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O}_g \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $n = \dim G$  na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_g$  punktu  $g$ ,  $\kappa_h \equiv (y^1, y^2, \dots, y^n) : \mathcal{O}_h \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_h \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n \times n})$  na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_h$  punktu  $h$  oraz  $\kappa_{g \cdot h} \equiv (z^1, z^2, \dots, z^n) : \mathcal{O}_{g \cdot h} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{g \cdot h} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n \times n})$  na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_{g \cdot h}$  punktu  $g \cdot h$ , a wtedy – dla dowolnych  $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g) \in \text{T}_g G$  i  $W = W^a \frac{\partial}{\partial y^a}(h) \in \text{T}_h G$  – dostajemy

$$\text{T}_{(g,h)} m(V, W) = V^i \frac{\partial (z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i} (\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu} (g \cdot h)$$

$$+W^a \frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h).$$

W wyrażeniach  $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$  i  $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$  rozpoznajemy elementy macierzy odwzorowań liniowych  $\mathbb{T}_g \wp_h$  i  $\mathbb{T}_h \ell_g$ , odpowiednio, możemy zatem przepisać powyższe w wygodnej postaci

$$(2) \quad \mathbb{T}_{(g,h)}m = \mathbb{T}_g \wp_h \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \text{pr}_2.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o słuszności równości

$$\begin{aligned} \mathbb{T}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \mathbf{0}_{\mathbb{T}G})(g, h) &= \mathbb{T}_{(g,h)}m(0_{\mathbb{T}_g G}, 0_{\mathbb{T}_h G}) = \mathbb{T}_g \wp_h(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_h \ell_g(0_{\mathbb{T}_h G}) \\ &= 0_{\mathbb{T}_{g,h} G} + 0_{\mathbb{T}_{g,h} G} = 0_{\mathbb{T}_{g,h} G} \equiv \mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \circ m(g, h), \end{aligned}$$

która dokumentuje homomorficzny charakter  $\mathbf{0}_{\mathbb{T}G}$ , przy czym – rzecz jasna – mamy tu do czynienia z homomorfizmem gładkim. Tożsamość (1) jest oczywista.  $\square$

**Uwaga 1.** Ażeby do końca oswoić styczną grupę Liego, znajdziemy jeszcze jawną postać morfizmu  $\mathbb{T}\text{Inv}$ . W tym celu rozważymy tożsamości

$$m \circ (\text{id}_G \times \text{Inv}) \circ \Delta = \eta = m \circ (\text{Inv} \times \text{id}_G) \circ \Delta,$$

w których zapisie użyliśmy odwzorowań (jawnie) gładkich

$$\Delta : G \longrightarrow G \times G : g \longmapsto (g, g), \quad \eta : G \circlearrowright : g \longmapsto e,$$

a których funktorialnym obrazem względem  $\mathbb{T}$  jest

$$\mathbb{T}m \circ (\text{id}_{\mathbb{T}G} \times \mathbb{T}\text{Inv}) \circ \mathbb{T}\Delta = 0 = \mathbb{T}m \circ (\mathbb{T}\text{Inv} \times \text{id}_{\mathbb{T}G}) \circ \mathbb{T}\Delta.$$

Uwzględniając Równ. (2), wyprowadzamy stąd tożsamości (dla dowolnych  $g \in G$  i  $V \in \mathbb{T}_g G$ )

$$\mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}}(V) + \mathbb{T}_{g^{-1}} \ell_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) = 0_{\mathbb{T}_e G} = \mathbb{T}_{g^{-1}} \wp_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) + \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}(V),$$

czyli

$$\mathbb{T}_g \text{Inv} = -\mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}} = -\mathbb{T}_e \wp_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}.$$

Godzi się przy tym podkreślić, że ostatnia równość nie wymaga powyższego wyprowadzenia, wynika ona bowiem wprost ze wzajemnej przemienności  $\ell_g$  i  $\wp_h$  dla dowolnych  $g, h \in G$ .

**Stwierdzenie 2.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis i zdefiniujmy **działanie dołączone**

$$\text{Ad} : G \times G \longrightarrow G : (g, h) \longmapsto m(m(g, h), \text{Inv}(g)) \equiv \text{Ad}_g(h).$$

Odwzorowanie

$$\mathbb{T}_e \ell : G_{\mathbb{T}_e \text{Ad}} \times \mathbb{T}_e G \longrightarrow \mathbb{T}G : (g, X) \longmapsto \mathbb{T}_e \ell_g(X)$$

jest izomorfizmem grup Liego.

Dowód: Na podstawie Równ. (2) możemy przepisać

$$\mathbb{T}_{(g,e)}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G})(g, X) = \mathbb{T}_{(g,e)}m(0_{\mathbb{T}_g G}, X) = \mathbb{T}_g \wp_e(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_e \ell_g(X)$$

$$(4) \quad = \mathbb{T}_e \ell_g(X) \equiv \mathbb{T}_e \ell.(g, X),$$

czyli

$$\mathbb{T}_e \ell = \mathbb{T}_{(g,e)}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G}),$$

co dowodzi gładkości  $\mathbb{T}_e \ell$ . W połączeniu z obserwacją

$$(\mathbb{T}_e \ell)^{-1} = (\pi_{\mathbb{T}G}, \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)}(\cdot)),$$

którą weryfikujemy w bezpośrednim rachunku (w którym  $v \in \mathbb{T}G$ ):

$$(\pi_{\mathbb{T}G}, \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)}(\cdot)) \circ \mathbb{T}_e \ell.(g, X)$$

$$\begin{aligned}
 &= (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot)) \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X) = (g, \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X)) \\
 &= (g, \mathbb{T}_e(\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g)(X)) = (g, \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1} \cdot g}(X)) = (g, \mathbb{T}_e \ell_e(X)) = (g, X), \\
 &\quad \mathbb{T}_e \ell. \circ (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot))(v) \\
 &= \mathbb{T}_e \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)} \circ \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)} \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)^{-1}}(v) = \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)}(\ell_{\pi_{\text{TG}}(v)} \circ \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)^{-1}})(v) \\
 &= \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)}(\ell_e)(v) = v,
 \end{aligned}$$

przekonuje nas to o dyfeomorficznym charakterze tego odwzorowania (zależność  $(\mathbb{T}_e \ell.)^{-1}$  od argumentu jest jawnie gładka). Pozostaje zatem upewnić się, że mamy do czynienia z homomorfizmem grup. W tym celu obliczamy – dla dowolnych  $X, Y \in \mathbb{T}_e G$  oraz  $g, h \in G$ , a w odwołaniu do Równ. (2) –

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{T}_e \ell.((g, X)_{\mathbb{T}_e \text{Ad} \cdot} (h, Y)) = \mathbb{T}_e \ell.(g \cdot h, \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) \\
 &= \mathbb{T}_e \ell_{g \cdot h}(\mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) = \mathbb{T}_e(\ell_{g \cdot h \cdot h^{-1}} \circ \wp_h)(X) + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(Y) \\
 &= \mathbb{T}_e(\wp_h \circ \ell_g)(X) + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(Y) = \mathbb{T}_g \wp_h(\mathbb{T}_e \ell_g(X)) + \mathbb{T}_h \ell_g(\mathbb{T}_e \ell_h(Y)) \\
 &\equiv \mathbb{T}_{(g, h)} m(\mathbb{T}_e \ell_g(X), \mathbb{T}_e \ell_h(Y)) \equiv \mathbb{T}_{(g, h)} m(\mathbb{T}_e \ell.(g, X), \mathbb{T}_e \ell.(h, Y)).
 \end{aligned}$$

Warto odnotować na marginesie, że  $\mathbb{T}_e \ell.$  jest stycznościowym odpowiednikiem dyfeomorfizmu  $\ell. \upharpoonright_{G \times \{e\}} : G \times \{e\} \rightarrow G$ . □

**Definicja 2.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis. **Pole wektorowe lewoniemiennicze** na grupie Liego  $G$  to pole wektorowe  $\mathcal{V}_L \in \Gamma(\text{TG})$  o własności

$$\forall_{g \in G} : \ell_{g*} \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Analogicznie, **pole wektorowe prawoniemiennicze** na  $G$  to pole wektorowe  $\mathcal{V}_R \in \Gamma(\text{TG})$  o własności

$$\forall_{g \in G} : \wp_{g*} \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

**Uwaga 2.** Jako że powyższe wzory prowadzą czasami do nieporozumień, wypiszemy drugi z nich w jawnej postaci. Oto więc dla dowolnych  $g, h \in G$  zachodzi w ogólności

$$(\ell_{g*} \mathcal{V})(h) \equiv \mathbb{T}_{\ell_g^{-1}(h)} \ell_g(\mathcal{V}(\ell_g^{-1}(h))) = \mathbb{T}_{g^{-1} \cdot h} \ell_g(\mathcal{V}(g^{-1} \cdot h)),$$

przeto warunek lewoniemienniczości przyjmuje postać

$$\mathbb{T}_{g^{-1} \cdot h} \ell_g(\mathcal{V}(g^{-1} \cdot h)) = \mathcal{V}(h).$$

Innymi słowy, przesuując stycznościowo wzgl. lewej translacji  $\ell_g$  na grupie wartość pola wektorowego w dowolnym punkcie otrzymujemy wektor w punkcie poddanym translacji tożsamej z wartością tegoż pola w tym punkcie.

**Stwierdzenie 3.** Zbiory

$$\mathfrak{X}_L(G) := \{ \mathcal{V} \in \Gamma(\text{TG}) \mid \mathcal{V} \text{ lewoniemiennicze} \},$$

$$\mathfrak{X}_R(G) := \{ \mathcal{V} \in \Gamma(\text{TG}) \mid \mathcal{V} \text{ prawoniemiennicze} \}$$

są podprzestrzeniami  $\mathbb{R}$ -liniowymi w  $\Gamma(\text{TG})$ , a ponadto komutator pól wektorowych ogranicza się do każdego z nich,

$$[\cdot, \cdot]_G(\mathfrak{X}_H(G) \times \mathfrak{X}_H(G)) \subset \mathfrak{X}_H(G), \quad H \in \{L, R\}.$$

Parę

$$(\mathfrak{X}_L(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_L(G) \times \mathfrak{X}_L(G)})$$

nazywamy **algebrą pól lewoniemiennicznych na  $G$** , a parę

$$(\mathfrak{X}_R(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_R(G) \times \mathfrak{X}_R(G)})$$

**algebrą pól prawoniemiennicznych na  $G$** .

*Dowód:* Pierwsza część tezy wynika wprost z  $\mathbb{R}$ -liniowości warunku lewoniemienniczności (wzgl. prawoniemienniczności), a druga – z prostego rachunku (przeprowadzonego dla dowolnego elementu  $g \in G$  i dowolnych pól lewoniemiennicznych  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}_L(G)$ ):

$$\ell_{g*}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G = [\ell_{g*}\mathcal{V}_1, \ell_{g*}\mathcal{V}_2]_G = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G.$$

Analogiczny rachunek dowodzi prawoniemienniczności komutatora dowolnej pary pól prawoniemiennicznych.  $\square$

**Uwaga 3.** Przywołane powyżej zachowanie komutatora pól wektorowych stanowi szczególny przypadek ogólniejszego mechanizmu, któremu podlegają tzw. **pary pól wektorowych w  $F$ -relacji** wyróżnione przez dowolne gładkie odwzorowanie  $F : M \rightarrow M$  między rozmaitościami różniczkowalnymi  $M, N$ . Przypomnijmy: elementy takiej pary  $(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(TN)$  spełniają tożsamość definiującą

$$\forall_{x \in M} : \mathcal{W}(F(x)) = T_x F(\mathcal{V}(x)).$$

Dla każdych dwóch takich par  $(\mathcal{V}_A, \mathcal{W}_A)$ ,  $A \in \{1, 2\}$  dowodzimy tożsamości

$$(5) \quad \forall_{x \in M} : [\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2]_{\Gamma(TN)}(F(x)) = T_x F([\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2](x)),$$

wyrażającej prawidłowość: Komutator pierwszych składowych pary pól w  $F$ -relacji jest w  $F$ -relacji z komutatorem drugich składowych pary. W rozpatrywanym powyżej przypadku para  $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$  jest w  $\ell_g$ -relacji dla dowolnego elementu grupy  $g \in G$ .

**Definicja 3. Algebra Liego** nad ciałem  $\mathbb{K}$  to kolekcja  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V, [\cdot, \cdot]_V)$  złożona z przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V)$  oraz odwzorowania dwu- $\mathbb{K}$ -liniowego skośnie symetrycznego

$$[\cdot, \cdot]_V : V \times V \rightarrow V : (v, w) \mapsto [v, w]_V = -[w, v]_V,$$

zwanego **nawiasem Liego na  $V$** , którego **jakobiator**

$$\text{Jac}_V : V \times V \times V \rightarrow V$$

$$: (X_1, X_2, X_3) \mapsto [[X_1, X_2]_V, X_3]_V + [[X_3, X_1]_V, X_2]_V + [[X_2, X_3]_V, X_1]_V$$

jest tożsamościowo równy zeru. Tożsamość w algebrze wyrażająca znikanie jakobiatora nazywa się **tożsamością Jacobiego**.

**Podalgebrą Liego** algebry Liego  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V, [\cdot, \cdot]_V)$  nazwiemy algebrę Liego  $((W, +_W \upharpoonright_{W \times W}, P_W \upharpoonright_W, \bullet \mapsto \mathbf{0}_W), \ell_W \upharpoonright_{\mathbb{K} \times W}, [\cdot, \cdot]_W \upharpoonright_{W \times W})$  o nośniku  $W \subseteq V$  będącym podprzestrzenią  $\mathbb{K}$ -liniową  $V$ .

**Homomorfizm algebr Liego** między algebrami Liego  $((V_\alpha, +_\alpha, P_\alpha, \bullet \mapsto \mathbf{0}_\alpha), \ell_\alpha, [\cdot, \cdot]_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  to odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe  $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  o własności

$$[\cdot, \cdot]_2 \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot, \cdot]_1.$$

**Stwierdzenie 4.** Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 3. Odwzorowanie

$$\text{T.Ad.} : \mathfrak{X}_R(G) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_L(G) : \mathcal{V} \mapsto \text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot))$$

jest izomorfizmem przestrzeni pól prawo- i lewoniezmienniczych. Istnieją kanoniczne izomorfizmy przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych<sup>1</sup>

$$H. : \mathfrak{g} \equiv \text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_H(G), \quad H \in \{L, R\},$$

o własności

$$(6) \quad L. \circ (R.)^{-1} \equiv \text{T.Ad.}$$

Indukują one na przestrzeni  $\mathfrak{g} \cong \text{T}_e G$  nawias Liego

$$[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : (X_1, X_2) \longmapsto [L_{X_1}, L_{X_2}]_{\Gamma(\text{TG})}(e).$$

Algebra Liego

$$(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}) \equiv \text{Lie } G$$

(w której zapisie  $\mathfrak{g}$  jest traktowana jako przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa) nosi miano **algebry Liego grupy Liego**  $G$ .

Dowód: Dla dowolnego pola prawoniezmienniczego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_R(G)$  sprawdzamy lewoniezmienniczość jego obrazu względem (jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowego i odwracalnego)  $\text{T.Ad.}$  w bezpośrednim rachunku, prowadzonym dla dowolnych  $g, h \in G$  z uwzględnieniem prawoniezmienniczości  $\mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \ell_{g*}(\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h) &= \text{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)}\ell_g((\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(\ell_{g^{-1}}(h))) \\ &= \text{T}_{g^{-1}h}\ell_g(\text{T}_{g^{-1}h}\text{Ad}_{g^{-1}h}(\mathcal{V}(g^{-1}h))) = \text{T}_{g^{-1}h}(\ell_h \circ \wp_{h^{-1}g})(\mathcal{V}(g^{-1}h)) \\ &= \text{T}_e\ell_h \circ \text{T}_{g^{-1}h}\wp_{h^{-1}g}(\mathcal{V}(g^{-1}h)) = \text{T}_e\ell_h(\mathcal{V}(e)) \equiv \text{T}_e\ell_h \circ \text{T}_h\wp_{h^{-1}}(\mathcal{V}(h)) \\ &\equiv (\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h). \end{aligned}$$

Poszukiwania izomorfizmu  $L$ . zaczniemy od zauważenia, że dowolne pole lewoniezmiennicze  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(G)$  spełnia tożsamość

$$\mathcal{V}(g) = (\ell_{g*}\mathcal{V})(g) \equiv \text{T}_{\ell_{g^{-1}}(g)}\ell_g(\mathcal{V}(\ell_{g^{-1}}(g))) = \text{T}_e\ell_g(\mathcal{V}(e)) \equiv \mathcal{V}(e) \circ \ell_g^*,$$

gdzie  $\ell_g^*$ ,  $g \in G$  jest cofnięciem (funkcji). Jako że  $\mathcal{V}(e) \in \mathfrak{g}$ , powyższa obserwacja podpowiada wprost definicję poszukiwanego izomorfizmu. Określmy odwzorowanie, jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe,

$$L. : \mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma(\text{TG}) : X \longmapsto X \circ \ell^* \equiv L_X,$$

Bez trudu sprawdzamy lewoniezmienniczość pól w jego obrazie,

$$\begin{aligned} \ell_{g*}L_X &= \text{T}_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}\ell_g(L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)) \equiv (L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)) \circ \ell_g^* \equiv X \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* \circ \ell_g^* \\ &= X \circ (\ell_g \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)})^* = X \circ \ell_{g \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* = X \circ \ell^* \equiv L_X, \quad g \in G. \end{aligned}$$

Kierując się wcześniejszym rachunkiem postulujemy odwrotność  $L$ . w postaci, także jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowej,

$$\text{ev}_e : \mathfrak{X}_L(G) \longrightarrow \mathfrak{g} : \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}(e),$$

oto bowiem zachodzi

$$\mathcal{V} = \text{ev}_e(\mathcal{V}) \circ \ell^* \equiv L_{\text{ev}_e(\mathcal{V})}.$$

Z drugiej strony obliczamy

$$\text{ev}_e(L_X) = X \circ \ell_e^* = X,$$

więc w istocie

$$\text{ev}_e = (L.)^{-1}.$$

---

<sup>1</sup> $\text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R}) = \{ V \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(C^1(G, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \mid \forall_{f, g \in C^1(G, \mathbb{R})} : V(f \cdot C^1(G, \mathbb{R}) g) = V(f) \cdot g(e) + f(e) \cdot V(g) \}$  jest przestrzenią różniczkowań algebry funkcji klasy  $C^1$  w  $e$ .

Zastąpiwszy w powyższym rozumowaniu działanie lewe regularne  $\ell$ . jego prawym odpowiednikiem  $\wp$ ., możemy powtórzyć to rozumowanie w odniesieniu do pól prawoniezmiennicznych, co daje nam izomorfizm

$$R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_R(\mathbf{G}) : X \longmapsto X \circ \wp^* \equiv R_X ,$$

o odwrotności – jak poprzednio –

$$(R.)^{-1} = \text{ev}_e .$$

Tożsamość (6) jest w oczywisty sposób spełniona, oto bowiem dla dowolnego wektora  $X \in \mathfrak{g}$  zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \text{T.Ad.} \circ R.(X) &= \text{T.Ad.}(X \circ \wp^*) = X \circ \wp^* \circ \ell^* \circ \wp_{\text{Inv}(\cdot)}^* = X \circ \wp^* \circ \wp_{\text{Inv}(\cdot)}^* \circ \ell^* = X \circ \wp_{\text{Inv}(\cdot)}^* \circ \ell^* \\ &= X \circ \wp_e^* \circ \ell^* = X \circ \ell^* \equiv L.(X) . \end{aligned}$$

Pozostaje już tylko przekonać się, że jakobiator jawnie skośnie symetrycznego i dwu- $\mathbb{R}$ -liniowego odwzorowania  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$  znika tożsamościowo. Czynimy to w bezpośrednim rachunku, w którym wykorzystujemy prostą tożsamość (w której, tak jak w tych po niej następujących, opuszczamy znacznik  $\Gamma(\text{TG})$  na komutatorze pól wektorowych)

$$L_{[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}} \equiv L_{\text{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}])} = [L_{X_1}, L_{X_2}] .$$

Oto więc wyznaczamy

$$\begin{aligned} \text{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1, X_2, X_3) &\equiv [[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, X_3]_{\mathfrak{g}} + [[X_3, X_1]_{\mathfrak{g}}, X_2]_{\mathfrak{g}} + [[X_2, X_3]_{\mathfrak{g}}, X_1]_{\mathfrak{g}} \\ &= [\text{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}]), X_3]_{\mathfrak{g}} + [\text{ev}_e([L_{X_3}, L_{X_1}]), X_2]_{\mathfrak{g}} + [\text{ev}_e([L_{X_2}, L_{X_3}]), X_1]_{\mathfrak{g}} \\ &= [L_{\text{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}])}, L_{X_3}](e) + [L_{\text{ev}_e([L_{X_3}, L_{X_1}])}, L_{X_2}](e) + [L_{\text{ev}_e([L_{X_2}, L_{X_3}])}, L_{X_1}](e) \\ &= [[L_{X_1}, L_{X_2}], L_{X_3}](e) + [[L_{X_3}, L_{X_1}], L_{X_2}](e) + [[L_{X_2}, L_{X_3}], L_{X_1}](e) \\ &\equiv \text{Jac}_{\Gamma(\text{TG})}(L_{X_1}, L_{X_2}, L_{X_3})(e) = 0_{\mathfrak{g}} , \end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

**Definicja 4.** Przyjmijmy zapis Stw. 4 i jego dowodu, przy czym załóżmy dodatkowo, że  $N := \dim \mathbf{G} < \infty$ . Wybierzmy w przestrzeni wektorowej  $\mathfrak{g}$  dowolną bazę  $\mathcal{T} := \{t_A\}_{A \in \overline{1, N}}$ , a wówczas **stałe struktury algebry Liego**  $\text{Lie } \mathbf{G}$  w bazie  $\mathcal{T}$  to liczby  $f_{ABC} = -f_{BAC} \in \mathbb{R}$ ,  $A, B, C \in \overline{1, N}$  zdefiniowane przez **równania struktury algebry Liego**  $\text{Lie } \mathbf{G}$

$$[t_A, t_B] = f_{ABC} \triangleright t_C , \quad A, B \in \overline{1, N} .$$

W konsekwencji znikania jakobiatora na  $\text{Lie } \mathbf{G}$  spełniają one tożsamościowo dwuliniowe relacje

$$f_{ABD} f_{DCE} + f_{CAD} f_{DBE} + f_{BCD} f_{DAE} = 0 , \quad A, B, C, E \in \overline{1, N} ,$$

zwane **tożsamościami Jacobiego dla stałych struktury**  $\text{Lie } \mathbf{G}$ . Elementy bazy  $C^\infty(\mathbf{G}, \mathbb{R})$ -modułu  $\Gamma(\text{TG})$  będącej  $L$ -wzgl.  $R$ -obrazem bazy  $\mathcal{T}$  będziemy oznaczać symbolem

$$L_A(\cdot) \equiv \text{T}_e \ell.(t_A)$$

wzgl.

$$R_A(\cdot) \equiv \text{T}_e \wp.(t_A) .$$

**Twierdzenie 1** (Funktorialność Lie). Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 4. Przyporządkowanie grupom Liego ich algebr Liego rozszerza się kanonicznie do funktora

$$\text{Lie} : \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}} .$$

o składowej morfizmowej

$$\begin{aligned} \text{Lie} & : \text{Mor } \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}} \\ & : (G_1 \xrightarrow{\chi} G_2) \longmapsto (\text{Lie } G_1 \xrightarrow{\text{T}_{e_1}\chi} \text{Lie } G_2). \end{aligned}$$

*Dowód:* Odwzorowanie  $\text{T}_{e_1}\chi$  jest dobrze określone, pozostaje zatem jedynie wykazać, że jest ono homomorfizmem algebr Liego. Punktem wyjścia będzie dla nas następująca tożsamość funkcjonalna, słuszna dla dowolnego elementu  $g_1 \in G$ :

$$\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi = \chi \circ \ell_{g_1}.$$

Na jej podstawie obliczamy, dla dowolnych: funkcji  $f \in C^1(G_2; \mathbb{R})$  oraz wektora  $X \in \mathfrak{g}_1$ ,

$$\begin{aligned} \text{T}_{g_1}\chi(L_X(g_1))(f) & \equiv L_X(g_1) \circ \chi^*(f) \equiv X \circ \ell_{g_1}^* \circ \chi^*(f) = X \circ (\chi \circ \ell_{g_1})^*(f) \\ & = X \circ (\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi)^*(f) = (X \circ \chi^*) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \\ & \equiv \text{T}_{e_1}\chi(X) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \equiv L_{\text{T}_{e_1}\chi(X)}(\chi(g_1))(f), \end{aligned}$$

co pozwala skonstatować, że

$$\text{T}_{\chi}(L_X(\cdot)) = L_{\text{T}_{e_1}\chi(X)}(\chi(\cdot)),$$

czyli że  $(L_X, L_{\text{T}_{e_1}\chi(X)})$  jest parą pól w  $\chi$ -relacji w rozumieniu Uwagi 3, a zatem w świetle wypisanego w niej Równ. (5) dla dowolnych wektorów  $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$  zachodzi pożądana tożsamość

$$\begin{aligned} [\text{T}_{e_1}\chi(X_1), \text{T}_{e_1}\chi(X_2)]_{\mathfrak{g}_2} & \equiv [L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{G_2}(e_2) = [L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{G_2} \circ \chi(e_1) \\ & = \text{T}_{e_1}\chi([L_{X_1}, L_{X_2}]_{G_1}(e_1)) \equiv \text{T}_{e_1}\chi([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}_1}). \end{aligned}$$

□

**Stwierdzenie 5.** Pola lewo- i prawoniezmiennicze na dowolnej grupie Liego są zupełne.

*Dowód:* Rozważmy gładką krzywą całkową  $\gamma : ]a, b[ \longrightarrow G$  przez  $\gamma(t_0) = g_0 \in G$  w  $t_0 \in ]a, b[$  pola lewoniezmienniczego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(G)$ , tj. rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$D\gamma(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)), \quad t \in ]a, b[, \quad \gamma(t_0) = g_0.$$

Wyberzmy (dowolnie) czasy pośrednie  $t_1, t_2$  spełniające warunki  $a < t_1 < t_2 < b$  i oznaczmy  $\Delta t := t_2 - t_1 > 0$ . Krzywą  $\gamma$  będziemy teraz dowolnie przedłużać wykorzystując przechodniość działania lewego regularnego na  $G$ , która pozwala nam wskazać  $g_{21} := \gamma(t_2) \cdot \gamma(t_1)^{-1}$ . Zdefiniujmy zatem ścieżkę

$$\gamma_{\Delta t} : ]a + \Delta t, b + \Delta t[ \longrightarrow G : t \longmapsto \ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t).$$

Jest ona rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = \text{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ D\gamma(t - \Delta t), \quad t \in ]a + \Delta t, b + \Delta t[, \quad \gamma_{\Delta t}(t_2) = \gamma(t_2),$$

a ponieważ  $t - \Delta t \in ]a, b[$  dla dowolnego czasu  $t \in ]a + \Delta t, b + \Delta t[$ , przeto – wobec lewoniezmienniczości pola  $\mathcal{V}$  –

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = \text{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ \mathcal{V}(\gamma(t - \Delta t)) = \mathcal{V}(\ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t)) \equiv \mathcal{V}(\gamma_{\Delta t}(t)).$$

Widzimy więc, że także  $\gamma_{\Delta t}$  jest gładką krzywą całkową pola  $\mathcal{V}$ , stąd też – na mocy Twierdzenia o Jednoznaczności Rozwiązania Zagadnienia Cauchy’ego w dziedzinie określoności – na niepustym przedziale  $\Delta I := ]a + \Delta t, b[ \ni t_2$  zachodzi równość

$$\gamma_{\Delta t} \upharpoonright_{\Delta I} = \gamma \upharpoonright_{\Delta I}$$



i otrzymujemy gładkie przedłużenie  $\tilde{\gamma}$  krzywej  $\gamma$  do  $]a, b + \Delta t[$  w postaci

$$\tilde{\gamma} : ]a, b + \Delta t[ \longrightarrow G : \begin{cases} \gamma(t) & \text{dla } t \in ]a, b[ \\ \gamma_{\Delta t}(t) & \text{dla } t \in ]a + \Delta t, b + \Delta t[ \end{cases} .$$

Dokonyjąc iteracji powyższej procedury, możemy gładko przedłużyć wyjściową krzywą w sposób nieograniczony od góry, tj. do przedziału  $]a, \infty[$ . Podobny argument pokazuje, że jest ona także przedłużalna wstecz, tj. do  $] - \infty, b[$ , ostatecznie więc stwierdzamy, że  $\gamma$  przedłuża się gładko do  $\mathbb{R}$ , co wobec dowolności  $g_0$  (wszak pole  $\mathcal{V}$  jest określone na całej rozmaitości  $G$ ) daje nam postulowaną tezę dla pól lewoniezmiennicznych. Dowód w przypadku pól prawoniezmiennicznych przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

**Stwierdzenie 6.** Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj  $X \in \mathfrak{g}$ . Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów grupy Liego  $G$  stowarzyszone z polami: lewoniezmiennicznym  $L_X$ ,

$$\mathcal{L}_1^X(\cdot_2) \equiv \Phi_{L_X}(\cdot_1, \cdot_2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{L_X}(t, g) \equiv \mathcal{L}_t^X(g),$$

oraz prawoniezmiennicznym  $R_X$ ,

$$\mathcal{R}_1^X(\cdot_2) \equiv \Phi_{R_X}(\cdot_1, \cdot_2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{R_X}(t, g) \equiv \mathcal{R}_t^X(g),$$

przyjmując postać, odpowiednio,

$$(7) \quad \mathcal{L}_t^X = \varrho_{\mathcal{L}_t^X(e)}, \quad \mathcal{R}_t^X = \ell_{\mathcal{R}_t^X(e)}.$$

*Dowód:* To, że potoki zupełnych (i globalnie gładkich) pól lewo- i prawoniezmiennicznych zadają jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów  $G$ , wynika wprost z wiedzy zgromadzonej w trakcie I semestru. Pozostaje sprawdzić słuszność tożsamości (7). Obliczamy, dla dowolnego  $g \in G$ ,

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X(g) = T_e \ell_g(L_X(e)) \equiv T_e \ell_g\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(e)\right) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e),$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z Reguły Łańcuchowej dla pochodnej funkcji złożonej. Ścieżki  $\mathcal{L}_t^X(g)$  i  $\ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e)$ , przecinające się w chwili  $t = 0$ ,

$$\ell_g \circ \mathcal{L}_0^X(e) = \ell_g(e) = g \cdot e = g \equiv \mathcal{L}_0^X(g),$$

są zatem współstyczne w tejże chwili, a wektorem stycznym jest wartość pola lewoniezmiennicznego  $L_X$  w  $g$ . Obie też są krzywymi całkowitymi pola  $L_X$ , oto bowiem dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$  zachodzi – wprost z definicji –

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X \circ \mathcal{L}_t^X(g),$$

a także – wobec lewoniezmienniczności  $L_X$  –

$$\frac{d}{dt} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e) = T_{\mathcal{L}_t^X(e)} \ell_g(L_X \circ \mathcal{L}_t^X(e)) = L_X \circ \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e).$$

Na mocy Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego ścieżki te są tożsame. Analogicznie dowodzimy drugiej równości w Równ. (7).  $\square$

W dalszej części zajmiemy się zatem wyróżnionymi ścieżkami  $\mathcal{L}^X(e)$  oraz  $\mathcal{R}^X(e)$ .

**Stwierdzenie 7.** Przyjmijmy zapis Stw. 6. Gładkie ścieżki

$$\lambda_X \equiv \mathcal{L}^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow G, \quad \rho_X \equiv \mathcal{R}^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

spełniają tożsamości

$$\forall t \in \mathbb{R} : \left( \lambda_{t \triangleright X}(1) = \lambda_X(t) \quad \wedge \quad \rho_{t \triangleright X}(1) = \rho_X(t) \right).$$

*Dowód:* W świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego krzywa  $\lambda_X$  jest jednoznacznie określona przez warunki

$$\lambda_X(0) = e \quad \wedge \quad \forall t \in \mathbb{R} : \frac{d}{dt} \lambda_X(t) = L_X \circ \lambda_X(t) \equiv T_e \ell_{\lambda_X(t)}(X).$$

Z drugiego z nich wyprowadzamy tożsamość

$$\forall_{s,t \in \mathbb{R}} : \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(X) = \frac{d}{d(st)} \lambda_X(st) = \frac{1}{s} \cdot \frac{d}{dt} \lambda_X(st),$$

czyli też równoważną jej (wobec  $\mathbb{R}$ -liniowości  $\mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}$ )

$$\forall_{s,t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \lambda_X(st) = \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(s \triangleright X),$$

Zdefiniujemy rodzinę ścieżek

$$\gamma_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{G} : t \longmapsto \lambda_X(st), \quad s \in \mathbb{R},$$

a wówczas powyższy warunek możemy zapisać w postaci

$$\forall_{s,t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \gamma_s(t) = \mathbb{T}_e \ell_{\gamma_s(t)}(s \triangleright X),$$

przy czym też

$$\gamma_s(0) \equiv \lambda_X(0) = e,$$

stwierdzamy zatem równość

$$\forall_{s \in \mathbb{R}} : \gamma_s = \lambda_{s \triangleright X},$$

skąd ostatecznie wniosek

$$\lambda_{s \triangleright X}(t) = \gamma_s(t) \equiv \lambda_X(st),$$

czyli także – w szczególności

$$\lambda_{s \triangleright X}(1) = \lambda_X(s).$$

Dowód dla ścieżek wykreślanych przez pola prawoniezmiennicze przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

**Stwierdzenie 8.** Przyjmijmy zapis Stw. 7. Gładkie ścieżki  $\lambda_X$  i  $\rho_X$  są homomorfizmami addytywnej grupy Liego  $\mathbb{R}$  (z naturalną strukturą różniczkową) w  $\mathbf{G}$ , spełniającymi warunek początkowy

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_X(t) = X = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \rho_X(t).$$

I odwrotnie, każdy homomorfizm grup Liego

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{G}$$

spełniający warunek początkowy

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) = X \in \mathfrak{g}$$

jest postaci

$$\lambda_X = \chi = \rho_X.$$

W szczególności więc ścieżki  $\lambda_X$  i  $\rho_X$  są tożsame.

*Dowód:* Jedynym, co wymaga sprawdzenia w przypadku ścieżek  $\gamma \in \{\lambda_X, \rho_X\}$ , jest warunek homomorfizmu

$$\forall_{s,t \in \mathbb{R}} : \gamma(s+t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t).$$

Zacniemy od  $\gamma = \lambda_X$ . Ażeby udowodnić powyższą tożsamość, musimy przekonać się o tożsamości ścieżek  $\lambda_X$  i  $\gamma_s := \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s + \cdot)$  przy ustalonym (dowolnie)  $s$ . W tym celu obliczamy – korzystając przy tym wprost z definicji ścieżki  $\gamma$  oraz z lewoniezmienniczości  $L_X$  –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma_s(t) &= \mathbb{T}_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left( \frac{d}{dt} \lambda_X(t+s) \right) \equiv \mathbb{T}_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left( \frac{d}{d(s+t)} \lambda_X(s+t) \right) \\ &= \mathbb{T}_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left( L_X(\lambda_X(s+t)) \right) = L_X(\ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+t)) \\ &\equiv L_X(\gamma_s(t)), \end{aligned}$$

skąd wniosek, że ścieżka  $\gamma_s$  jest krzywą całkową pola  $L_X$  tak jak  $\lambda_X$ , a nadto

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma_s(t) = L_X(\gamma_s(0)) = L_X(e) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma(t)$$

i

$$\gamma_s(0) = e = \gamma(0),$$

zatem są to rozwiązania zagadnienia początkowego (dla tego samego pola wektorowego) przy tych samych warunkach początkowych, co w świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego przesądza o ich postulowanej tożsamości. W przypadku  $\gamma = \rho_X$  powtarzamy rozumowanie dla  $\tilde{\gamma}_s := \wp_{\rho_X(s)^{-1}} \circ \rho_X(s + \cdot)$ .

Niechaj teraz  $\chi$  będzie homomorfizmem spełniającym warunek początkowy (8). Różniczkując relację funkcjonalną wyrażającą homomorficzność  $\chi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \chi(s) &\equiv \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=s} \chi(\xi) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(s+t) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \ell_{\chi(s)} \circ \chi(t) \\ &= T_{\chi(0)} \ell_{\chi(s)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) \right) = T_e \ell_{\chi(s)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) \right) \\ &\equiv L_{\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t)} (\chi(s)), \end{aligned}$$

stwierdzamy, że  $\chi$  jest krzywą całkową przez  $e = \chi(0)$  (równość ta, użyta w powyższym rachunku, jest konsekwencją homomorficzności  $\chi$ ) lewoniemienniczego pola wektorowego będącego obrazem wektora  $\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t)$  względem izomorfizmu  $L$ . ze Stw. 4. Powtarzając to rozumowanie w odniesieniu do relacji

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \chi(t) &\equiv \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=t} \chi(\xi) = \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s+t) = \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \wp_{\chi(t)} \circ \chi(s) \\ &= T_{\chi(0)} \wp_{\chi(t)} \left( \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s) \right) = T_e \wp_{\chi(t)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{s=0} \chi(s) \right) \\ &\equiv R_{\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s)} (\chi(t)), \end{aligned}$$

uzyskujemy ostatnią brakującą część tezy. □

**Stwierdzenie 9.** Przyjmijmy zapis Stw. 7. Odwzorowanie

$$\lambda : \mathfrak{g} \times \mathbb{R} \longrightarrow G : (X, t) \longmapsto \lambda_X(t)$$

jest gładkie.

*Dowód:* Gładkość zależności  $\lambda$  od drugiego argumentu wynika wprost z Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, oto bowiem dla ustalonego  $X$  ścieżka  $\lambda_X$  jest krzywą całkową gładkiego pola  $L_X$ . Pozostaje zatem wykazać gładkość zależności  $\lambda$  od pierwszego argumentu. W tym celu przedstawimy  $\lambda_X$  jako krzywą całkową gładkiego pola wektorowego na  $\mathfrak{g} \times G$  o danych początkowych  $(X, e)$ , co pozwoli nam wywnioskować postulowaną gładkość wprost z tegoż Twierdzenia. Będziemy przy tym – jak zazwyczaj – utożsamiać  $\text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R})$  z  $T_e G$ . Rozważmy zatem pole wektorowe (jawnie gładkie)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &: \mathfrak{g} \times G \longrightarrow T(\mathfrak{g} \times G) \\ &: (X, g) \longmapsto (0_{\mathfrak{g}}, T_e \ell_g(X)) \equiv (0_{\mathfrak{g}}, L_X(g)) \in \mathfrak{g} \oplus T_e \ell_g(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus T_g G \\ &\equiv T_{(X, g)}(\mathfrak{g} \times G). \end{aligned}$$

Jego potok  $\Phi_{\mathcal{V}}$  spełnia równanie

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0)) = \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0))),$$

w którego zapisie  $(X_0, g_0)$  jest warunkiem początkowym (w czasie  $t_0$ ),

$$\Phi_{\mathcal{V}}(t_0; t_0, (X_0, g_0)) = (X_0, g_0).$$

Ustalmy warunek początkowy  $(X_0, g_0) := (X, e)$  dla  $t_0 := 0$ . Rzutując powyższe równanie na drugą składową (tj. na  $G$ ), w której odbywa się nietrywialna ewolucja, otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) &= \text{pr}_2 \circ \frac{d}{dt} \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) = \text{pr}_2 \circ \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ &= L_{\text{pr}_1 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))}(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ &= L_X(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika wprost z konstrukcji  $\mathcal{V}$  (w swej pierwszej składowej warunek początkowy pozostaje niezmienny wobec trywialności tejże składowej pola  $\mathcal{V}$ ). Otrzymana równość pozwala zidentyfikować  $\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e))$  jako (jedyną) krzywą całkową pola  $L_X$  wychodzącą z punktu  $g_0 = e$ , czyli

$$\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e)) = \lambda_X(\cdot),$$

co stanowi właśnie zapowiedzianą wcześniej reinterpretację tejże krzywej całkowej pola  $L_X$ .  $\square$

**Definicja 5.** Przyjmijmy zapis Stw. 9. Odwzorowanie

$$\exp \equiv \exp^G := \lambda.(1) : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

określamy mianem **odwzorowania eksponencjalnego na  $G$** .

**Stwierdzenie 10.** Przyjmijmy zapis Def. 5. Istnieją otoczenia otwarte:  $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$  wektora  $0_{\mathfrak{g}}$  w  $\mathfrak{g}$  oraz  $\mathcal{O}_e$  elementu  $e$  w  $G$  takie, że odwzorowanie  $\exp \upharpoonright_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^\infty$  na  $\mathcal{O}_e$ .

*Dowód:* Obliczymy odwzorowanie styczne do  $\exp$  w  $0_{\mathfrak{g}}$  na dowolnym wektorze  $X \in \mathfrak{g} \equiv T_{0_{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}$ , odwołując się po drodze do Stw. 7. Znajdujemy

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp(X) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright X) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{t \triangleright X}(1) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_X(t) = X,$$

czyli

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp = \text{id}_{\mathfrak{g}}.$$

Teza dowodzonego stwierdzenia wynika teraz wprost z Twierdzenia o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań.  $\square$

**Stwierdzenie 11** (Naturalność odwzorowania eksponencjalnego). Przyjmijmy zapis Def. 5 oraz Tw. 1 i niechaj  $\chi : G_1 \longrightarrow G_2$  będzie homomorfizmem grup Liego między grupami Liego  $G_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Poniższy diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G_1 & \xrightarrow{\text{Lie } \chi} & \text{Lie } G_2 \\ \exp^{G_1} \downarrow & & \downarrow \exp^{G_2} \\ G_1 & \xrightarrow{\chi} & G_2 \end{array} .$$

*Dowód:* Rozważmy ścieżkę gładką

$$\gamma := \chi \circ \lambda_X : \mathbb{R} \longrightarrow G_2$$

przez

$$\gamma(0) \equiv \chi \circ \lambda_X(0) = \chi(e_1) = e_2.$$

Na podstawie bezpośredniego rachunku (wykorzystującego definicję ścieżki  $\lambda_X$  oraz lewniezmienniczość  $L_X$ , jak również Regułę Łańcuchową)

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = T_{\lambda_X(t)} \chi \left( \frac{d}{dt} \lambda_X(t) \right) = T_{\lambda_X(t)} \chi \left( L_X(\lambda_X(t)) \right) = T_{\lambda_X(t)} \chi \circ T_{e_1} \ell_{\lambda_X(t)}^1(X)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{T}_{e_1}(\chi \circ \ell_{\lambda_X(t)}^1)(X) = \mathbb{T}_{e_1}(\ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1 \circ \chi)(X) = \mathbb{T}_{\chi(e_1)} \ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1(\mathbb{T}_{e_1} \chi(X)) \\
 &= \mathbb{T}_{e_2} \ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1(\mathbb{T}_{e_1} \chi(X)) \equiv \mathbb{T}_{e_2} \ell_{\gamma(t)}^1(\text{Lie } \chi(X)) \equiv L_{\text{Lie } \chi(X)}(\gamma(t))
 \end{aligned}$$

i wreszcie

$$\gamma(0) = e_2 \equiv \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(0),$$

konstatujemy na gruncie Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, że dla  $\gamma$  jest spełniona tożsamość

$$\chi \circ \lambda_X \equiv \gamma = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)},$$

co w chwili  $t = 1$  daje pożądaną równość

$$\chi \circ \exp^{\text{G}^1}(X) \equiv \chi \circ \lambda_X(1) = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(1) \equiv \exp^{\text{G}^2} \circ \text{Lie } \chi(X).$$

□

**Stwierdzenie 12.** Przyjmijmy zapis Def. 4 i niech  $((\mathbb{T}_e \text{Ad})_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim \text{G}}}$  o będzie macierzą o wartościach w  $C^\infty(\text{G}, \mathbb{R})$  określoną równaniami

$$\mathbb{T}_e \text{Ad} \cdot (t_A) =: (\mathbb{T}_e \text{Ad})_A^B \triangleright t_B, \quad A \in \overline{1, \dim \text{G}}.$$

Pola wektorowe  $L_A$  i  $R_A$ ,  $A \in \overline{1, \dim \text{G}}$  spełniają relacje (zapisane dla dowolnych  $A, B \in \overline{1, \dim \text{G}}$ )

$$[L_A, L_B] = f_{ABC} \triangleright L_C, \quad [R_A, R_B] = -f_{ABC} \triangleright R_C, \quad [L_A, R_B] = 0.$$

Ponadto prawdziwe są tożsamości:

$$(9) \quad L_A(\cdot) = (\mathbb{T}_e \text{Ad})_A^B \triangleright R_B(\cdot)$$

oraz

$$\text{Inv}_* L_A = -R_A, \quad \text{Inv}_* R_A = -L_A,$$

a także – dla dowolnego elementu  $g \in \text{G}$  –

$$\wp_{g*} L_A = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \triangleright L_B, \quad \ell_{g*} R_A = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B$$

*Dowód:* Pierwsza równość wynika wprost z definicji komutatora w  $\text{Lie } \text{G}$ , oto bowiem wobec lewoniezmienniczności komutatora pól lewoniezmiennicznych zachodzi

$$\begin{aligned}
 f_{ABC} L_C(\cdot) &= f_{ABC} \mathbb{T}_e \ell \cdot (L_C(e)) \equiv f_{ABC} \mathbb{T}_e \ell \cdot (t_C) = \mathbb{T}_e \ell \cdot ([t_A, t_B]) \\
 &\equiv \mathbb{T}_e \ell \cdot ([L_A, L_B](e)) = [L_A, L_B](\cdot).
 \end{aligned}$$

Komutator bazowego pola lewoniezmiennicznego z takimż polem prawoniezmiennicznym obliczamy na dowolnej funkcji  $f \in C^1(\text{G}, \mathbb{R})$  w dowolnym punkcie  $g \in \text{G}$ , korzystając przy tym ze Stw. 6,

$$\begin{aligned}
 [L_A, R_B](f)(g) &\equiv L_A(R_B(f))(g) - R_B(L_A(f))(g) \\
 &\equiv L_A\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\right)(g) - R_B\left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\right)(g) \\
 &\equiv \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\right) \circ \mathcal{L}_s^{t_A}(g) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\right) \circ \mathcal{R}_t^{t_B}(g) \\
 &= \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f(\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot (g \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e))) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f((\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot g) \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e))\right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Wreszcie też wyznaczamy wprost, w dowolnym punkcie  $g \in \text{G}$ ,

$$L_A(g) = \mathbb{T}_e \ell_g(L_A(e)) \equiv \mathbb{T}_e \ell_g(t_A) = \mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(t_A)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_g(t_A) \equiv (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_g(t_B) \\
 &\equiv (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_g(R_B(e)) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(g).
 \end{aligned}$$

Jest też – w świetle Uwagi 1, a dla dowolnego  $g \in G$  –

$$\begin{aligned}
 \text{Inv}_* L_A(g) &\equiv \mathbb{T}_{g^{-1}} \text{Inv}(L_A(g^{-1})) = \mathbb{T}_{g^{-1}} \text{Inv} \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A) \\
 &= -\mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_{g^{-1}} \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A) = -\mathbb{T}_e \wp_g(t_A) \equiv -R_A(g),
 \end{aligned}$$

a stąd już wprost wynika

$$\text{Inv}_* R_A = -\text{Inv}_* \circ \text{Inv}_* L_A = -(\text{Inv} \circ \text{Inv})_* L_A = -L_A.$$

Pierwsza z tych tożsamości pozwala łatwo udowodnić drugą równość wypisaną w tezie stwierdzenia w odwołaniu do podstawowej własności komutatora pól wektorowych, jaką jest jego niezmienniczość względem pchnięć, oraz zweryfikowanej wcześniej równości pierwszej,

$$-f_{ABC} R_C = f_{ABC} \text{Inv}_* L_C = \text{Inv}_*([L_A, L_B]) = [\text{Inv}_* L_A, \text{Inv}_* L_B] \equiv [R_A, R_B].$$

Sprawdzamy także – dla dowolnego  $h \in G$  –

$$\begin{aligned}
 (\wp_g * L_A)(h) &\equiv \mathbb{T}_{\wp_{g^{-1}}(h)} \wp_g(L_A \circ \wp_{g^{-1}}(h)) = \mathbb{T}_{hg^{-1}} \wp_g \circ \mathbb{T}_e \ell_{hg^{-1}}(t_A) \\
 &= \mathbb{T}_e \ell_h \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \ell_h(t_B) \\
 &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \triangleright L_B(h)
 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 (\ell_g * R_A)(h) &\equiv \mathbb{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)} \ell_g(R_A \circ \ell_{g^{-1}}(h)) = \mathbb{T}_{g^{-1}h} \ell_g \circ \mathbb{T}_e \wp_{g^{-1}h}(t_A) \\
 &= \mathbb{T}_e(\ell_g \circ \wp_h \circ \wp_{g^{-1}})(t_A) = \mathbb{T}_e(\wp_h \circ \text{Ad}_g)(t_A) \\
 &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_h(t_B) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(h).
 \end{aligned}$$

□

**Uwaga 4.** Powyższe stwierdzenie orzeka, że algebry pól lewo- i prawoniezmienniczych są wzajemnie antyizomorficznymi komutującymi podalgebrami Liego w algebrze Liego (gładkich) pól wektorowych na  $G$ , przy czym  $((\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim G}}$  w dowolnym punkcie  $g \in G$  jest macierzą przejścia pomiędzy lewo- i prawoniezmienniczną bazą styczną do grupy w tym punkcie. Tożsamości, w których pojawia się pchnięcie wzdłuż  $\text{Inv}$ , stanowią stycznościowy (w  $e$ ) wariant relacji między lewym i prawym działaniem regularnym w grupie i grupie przeciwnej. Ostatnie dwie tożsamości w tezie stwierdzenia określają własności współzmienniczości względem – odpowiednio – prawych i lewych translacji (pchnięć) pól lewo- i prawoniezmienniczych.

**Definicja 6.** Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj  $\{\theta_L^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$  i  $\{\theta_R^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$  będą bazami  $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu  $\Omega^1(G)$  dualnymi do baz – odpowiednio –  $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$  i  $\{R_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$   $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu  $\Gamma(\text{TG})$ ,

$$L_A \lrcorner \theta_L^B = \delta_A^B = R_A \lrcorner \theta_R^B, \quad A, B \in \overline{1, \dim G}.$$

Pole 1-form o wartościach w  $\mathfrak{g}$  postaci

$$\theta_L := \theta_L^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nosi miano **kanonicznego pola 1-form lewoniezmiennicznych** lub **lewoniezmiennicznej formy Maurera–Cartana** na  $G$ . Analogicznie, pole 1-form

$$\theta_R := \theta_R^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nazywamy **kanonicznym polem 1-form prawoniezmiennicznych** lub **prawoniezmienniczną formą Maurera–Cartana** na  $G$ .

**Uwaga 5.** Warto odnotować, że formy Maurera–Cartana wraz z odnośnymi polami niezmiennicznymi na grupie dają nam do ręki wygodną reprezentację operatora różniczki zewnętrznej (de Rhama), oto bowiem dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(G, \mathbb{R})$  i w dowolnym punkcie  $g \in G$  zachodzą tożsamości:

$$df(g) = L_A(f)(g) \triangleright \theta_L^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (f \circ \mathcal{L}_t^{tA})(g) \triangleright \theta_L^A(g)$$

oraz

$$df(g) = R_A(f)(g) \triangleright \theta_R^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (f \circ \mathcal{R}_t^{tA})(g) \triangleright \theta_R^A(g).$$

**Stwierdzenie 13.** Przyjmijmy zapis Def. 6 oraz Stw. 12. Formy Maurera–Cartana są – odpowiednio – lewo- i prawoniezmienniczne,

$$(\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = \theta_L, \quad (\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = \theta_R,$$

a ponadto spełniają tożsamości:

$$(10) \quad \theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad.}) \circ \theta_L$$

i

$$(11) \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = -\theta_R, \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = -\theta_L$$

oraz – dla dowolnego elementu  $g \in G$  –

$$(\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \theta_L, \quad (\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R.$$

*Dowód:* W dowodach wszystkich relacji wykorzystujemy bazowy charakter układów  $\{\theta_H^A\}_{A \in \{L, R\}, \dim G}$ ,  $H \in \{L, R\}$  (w dowolnym punkcie  $G$ ) oraz ich dualność względem odnośnego układu pól niezmiennicznych. I tak z równości, słusznej dla dowolnych  $g, h \in G$ ,

$$(L_A \lrcorner \ell_g^* \theta_L^B)(h) = \theta_L^B(\ell_g(h)) \circ T_h \ell_g(L_A(h)) = \theta_L^B(gh)(L_A(gh)) = \delta_A^B$$

wywdzimy wniosek:

$$\ell_g^* \theta_L^B(h) = \theta_L^B(h),$$

czyli

$$\ell_g^* \theta_L^B = \theta_L^B.$$

Analogicznie dowodzimy prawoniezmienniczności 1-form  $\theta_R^B$ . W następnej kolejności przywołujemy Równ. (9) i na tej podstawie obliczamy

$$L_A \lrcorner \theta_R^B = (T_e \text{Ad.})_A^C \triangleright R_C \lrcorner \theta_R^B = (T_e \text{Ad.})_A^C \delta_C^B = (T_e \text{Ad.})_A^B,$$

skąd odczytujemy Równ. (10). W dowolnym punkcie  $g \in G$  jest też na mocy Uwagi 1 spełniona relacja

$$\begin{aligned} R_A \lrcorner \text{Inv}^* \theta_L^B(g) &= \theta_L^B(g^{-1}) \circ T_g \text{Inv}(R_A(g)) = \theta_L^B(g^{-1}) \circ T_g \text{Inv} \circ T_e \wp_g(t_A) \\ &= -\theta_L^B(g^{-1}) \circ T_e \ell_{g^{-1}}(t_A) \equiv -\theta_L^B(g^{-1})(L_A(g^{-1})) = -\delta_A^B, \end{aligned}$$

zatem

$$\text{Inv}^* \theta_L^B = -\theta_R^B,$$

czyli także

$$\text{Inv}^* \theta_R^B = -\theta_L^B.$$

Wreszcie na koniec obliczamy – dla dowolnych  $g, h \in G$  –

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner (\wp_g^* \theta_L^B)(h) &= \theta_L^B(hg) \circ T_h \wp_g(L_A(h)) = \theta_L^B(hg) \circ T_h \wp_g \circ T_e \ell_h(t_A) \\ &= \theta_L^B(hg) \circ T_e \ell_{hg} \circ T_e \text{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = (T_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \theta_L^B(hg) \circ T_e \ell_{hg}(t_C) \end{aligned}$$

$$= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \theta_L^B(hg)(L_C(hg)) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \delta_C^B = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B$$

i na tej podstawie wnioskujemy, że

$$\wp_g^* \theta_L^B = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \theta_L^A.$$

Dowód ostatniej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. □

**Definicja 7.** Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  będzie rozmaitością gładką,  $G$  zaś – grupą Liego. **Pochodna logarytmiczna lewostronna** na  $C^\infty(M, G)$  to odwzorowanie

$$\delta_L \log : C^\infty(M, G) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

określone wzorem

$$\delta_L \log f(x)(v_x) := \mathbb{T}_{f(x)} \ell_{f(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f(v_x),$$

słusznym dla dowolnych: punktu  $x \in M$ , wektora  $v_x \in \mathbb{T}_x M$  oraz funkcji  $f \in C^\infty(M, G)$ . Podobnie, **pochodna logarytmiczna prawostronna** na  $C^\infty(M, G)$  to odwzorowanie

$$\delta_R \log : C^\infty(M, G) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

zadane w postaci

$$\delta_R \log f(x)(v_x) := \mathbb{T}_{f(x)} \wp_{f(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f(v_x).$$

**Stwierdzenie 14.** Przyjmijmy zapis Def. 7. Dla dowolnych  $f_1, f_2 \in C^\infty(M, G)$  (wymnożonych punktowo) i w każdym punkcie  $x \in M$  prawdziwe są następujące tożsamości

$$\delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_L \log f_2(x) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_2(x)^{-1}})(\delta_L \log f_1(x)),$$

$$\delta_R \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_R \log f_1(x) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1(x)})(\delta_R \log f_2(x)).$$

*Dowód:* Dowodzimy pierwszej tożsamości. Dowód drugiej z nich przebiega analogicznie. Wprost na podstawie definicji, a w odwołaniu do Równ. (2), obliczamy

$$\begin{aligned} & \delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) \\ &= \mathbb{T}_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1} \cdot f_1(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x(f_1 \cdot f_2) \\ &= \mathbb{T}_{f_1(x) \cdot f_2(x)} (\ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \ell_{f_1(x)^{-1}}) \circ \mathbb{T}_x(m \circ (f_1, f_2)) \\ &= \mathbb{T}_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_{(f_1(x), f_2(x))} m \circ \mathbb{T}_x(f_1, f_2) \\ &= \mathbb{T}_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ (\mathbb{T}_{f_2(x)} \ell_{f_1(x)} \circ \mathbb{T}_x f_2 + \mathbb{T}_{f_1(x)} \wp_{f_2(x)} \circ \mathbb{T}_x f_1) \\ &= \mathbb{T}_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f_2 + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_2(x)^{-1}}) \circ \mathbb{T}_{f_1(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f_1. \end{aligned}$$

□

**Stwierdzenie 15.** Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj  $f_1, f_2 \in C^\infty(M, G)$ , a wówczas prawdziwe są zdania:

$$\delta_L \log f_1 = \delta_L \log f_2 \iff \exists_{g \in G} : f_2 = \ell_g \circ f_1$$

oraz

$$\delta_R \log f_1 = \delta_R \log f_2 \iff \exists_{g \in G} : f_2 = \wp_g \circ f_1.$$



*Dowód:* Wynikanie  $\Leftarrow$  jest oczywiste, a już z pewnością staje się takim po przeanalizowaniu dowodu wynikania przeciwnego. To udowodnimy dla pochodnej lewostronnej. Dowód dla pochodnej prawostronnej jest w pełni analogiczny. Oto więc, stosując pierwszą z tożsamości ze Stw. 14, otrzymujemy

$$\delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2,$$

a ponieważ na podstawie tej samej tożsamości stwierdzamy też równość

$$0 \equiv \delta_L \log(f_1 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1,$$

przeto wobec założonej równości obu pochodnych lewostronnych

$$\begin{aligned} \delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) &= -(\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2 \\ &= -(\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Przywołując definicję pochodnej logarytmicznej, przepisujemy powyższe w postaci

$$0 = \delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \mathbb{T}_{f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}} \ell_{f_1(\cdot) \cdot f_2(\cdot)^{-1}} \circ \mathbb{T} \cdot (f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}),$$

albo równoważnej

$$\mathbb{T} \cdot (f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}) = 0,$$

która implikuje równość

$$\forall_{x \in M} \forall_{V \in \mathbb{T}_x M} : V(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}) = 0,$$

czyli

$$\forall_{x \in M} : f_2(x) \cdot f_1(x)^{-1} = \text{const} \in G,$$

co jest właśnie postulowaną tezą.  $\square$

**Stwierdzenie 16.** W zapisie Def. 6 i 7 słuszne są tożsamości

$$\theta_L \equiv \delta_L \log \text{id}_G, \quad \theta_R = \delta_R \log \text{id}_G.$$

*Dowód:* Bez trudu sprawdzamy, dla dowolnego  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner \delta_L \log \text{id}_G(g) &\equiv \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \text{id}_G(L_A(g)) = \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{id}_{\mathbb{T}_g}(L_A(g)) \\ &= \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_g(L_A(e)) = L_A(e) \equiv t_A, \end{aligned}$$

co wobec bazowego charakteru układu  $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$  kończy dowód pierwszej części tezy stwierdzenia. Dowód w przypadku pochodnej prawostronnej przebiega analogicznie.  $\square$

**Stwierdzenie 17.** Przyjmijmy zapis Def. 6. Formy Maurera–Cartana spełniają – dla dowolnych elementów  $g, h \in G$  – tożsamości

$$\begin{aligned} m^* \theta_L(g, h) &= \theta_L(h) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g), \\ m^* \theta_R(g, h) &= \theta_R(g) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R(h). \end{aligned}$$

*Dowód:* Na mocy Stw. 16 (odczytanego w połączeniu z Def. 7), a w odwołaniu do Równ. (2) stwierdzamy, co następuje:

$$\theta_L(g \cdot h) \equiv m^* \theta_L(g, h) = \mathbb{T}_{g \cdot h} \ell_{(g \cdot h)^{-1}} \circ \mathbb{T}_{(g, h)} m = \mathbb{T}_{gh}(\ell_{h^{-1} \cdot g^{-1}}) \circ (\mathbb{T}_g \ell_h \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \text{pr}_2)$$

$$\begin{aligned} &\equiv T_g(\text{Ad}_{h^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}}) \circ \text{pr}_1 + T_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 = T_e \text{Ad}_{h^{-1}} \circ T_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{pr}_1 + T_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 \\ &\equiv (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g) + \theta_L(h). \end{aligned}$$

Dowód drugiej tożsamości przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

**Lemat 2.** Przyjmijmy zapis Stw.7. Niechaj  $H \subset G$  będzie grupą domkniętą grupy Liego  $G$  w topologii podprzestrzeni i niech  $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{g}$  będzie ciągiem wektorów w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$  tejże grupy, o granicy  $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathfrak{g}$ , a nadto niech  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  będzie ciągiem liczbowym zbieżnym do  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ , przy czym  $\lambda_{X_n}(t_n) \in H$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wówczas

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in H.$$

*Dowód:* Dla ustalonego (dowolnie)  $t \in \mathbb{R}$  rozważmy ciąg

$$N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} : n \mapsto E\left(\frac{t}{t_n}\right),$$

gdzie  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest cechą (funkcją *entier*). Jako że  $\frac{t}{t_n} - 1 < N_n \leq \frac{t}{t_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , przeto – na mocy Twierdzenia o trzech ciągach, a wobec założenia poczynionego w odniesieniu do  $t$ . –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n = t,$$

wobec czego także

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n \triangleright X_n = t \triangleright X.$$

Na podstawie Stw.6, 7, 9 oraz 10,, jak również Stw.5 i podstawowych właściwości potoku pola wektorowego wyznaczamy

$$\begin{aligned} \lambda_X(t) &= \lambda_{t \triangleright X}(1) \equiv \lambda_{\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n \triangleright X_n}(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \cdot N_n \triangleright X_n}(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \triangleright X_n}(N_n) \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n; 0, e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(1; N_n - 1, \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 1; 0, e)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 1; 0, e) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(1; N_n - 2, \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 2; 0, e)) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 2; 0, e) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^2 = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^{N_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{X_n}(t_n)^{N_n}, \end{aligned}$$

a ponieważ  $H \ni \lambda_{X_n}(t_n)^{N_n}$  jest domkniętą, przeto – zgodnie z tezą stwierdzenia – także

$$\lambda_X(t) \in \overline{H} \equiv H.$$

$\square$

**Twierdzenie 2** (Cartana o podgrupie domkniętej). Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

*Dowód:* Niechaj  $H \subset G$  będzie podgrupą domkniętą w topologii podprzestrzeni i niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego  $G$ . Skonstruujemy bezpośrednio lokalną mapę podrozmaitości na otoczeniu otwartym punktu  $e \in H \subset G$ , a następnie utworzymy atlas podrozmaitości przesuując ową mapę do każdego z punktów podgrupy. W tym celu rozważmy podzbiór

$$\mathfrak{h} := \{ D\gamma(0) \mid \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, H) \subset C^\infty(\mathbb{R}, G) \wedge \gamma(0) = e \} \subset \mathfrak{g}.$$

Dla dowolnej pary ścieżek  $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{H})$  spełniających warunki  $\gamma_\alpha(0) = e$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i dla dowolnych  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  definiujemy ścieżkę złożoną

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H} : t \longmapsto \gamma_1(t_1 \cdot t) \cdot \gamma_2(t_2 \cdot t),$$

po czym obliczamy

$$D\gamma(0) = t_1 \triangleright D\gamma_1(0) + t_2 \triangleright D\gamma_2(0).$$

Wektor styczny do  $\gamma$  w  $t = 0$  należy do  $\mathfrak{h}$  (wprost z definicji), widzimy zatem, że dowolna  $\mathbb{R}$ -liniowa kombinacja elementów zbioru  $\mathfrak{h}$  jest w nim zawarta, czyli – innymi słowy –  $\mathfrak{h}$  jest podprzestrzenią  $\mathbb{R}$ -liniową przestrzeni  $\mathfrak{g}$ . W następnej kolejności dowodzimy tożsamości

$$(12) \quad \mathfrak{h} = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in \mathbb{H} \}.$$

Zawieranie  $\supseteq$  jest oczywiste, rozważmy przeto dowolny wektor  $X := D\gamma(0) \in \mathfrak{h}$  określony przez pewną ścieżkę  $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{H})$  i zdefiniujemy, dla dostatecznie małego  $\varepsilon > 0$  (na tyle, by ścieżka  $\gamma(\cdot) - \varepsilon, \varepsilon[\cdot]$  była zawarta w dyfeomorficznym obrazie otoczenia  $\mathcal{U}_0$  wektora  $0 \in \mathfrak{g}$  względem odwzorowania  $\exp$ , zgodnie ze Stw. 10), ścieżkę wektorów

$$\xi : ] - \varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow \mathfrak{g} : t \longmapsto \exp \upharpoonright_{\mathcal{U}_0}^{-1} \circ \gamma(t).$$

Otrzymujemy, przywoławszy po drodze Równ. (2),

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} \ni X &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma(t) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp \circ \xi(t) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(\xi(0) + t \triangleright D\xi(0) + \mathcal{O}(t^2)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0) + \mathcal{O}(t^2)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\exp(t \triangleright D\xi(0)) \cdot \exp(\mathcal{O}(t^2))) \\ &= T_{e^{\exp(\mathcal{O}(t^2))}} \upharpoonright_{t=0} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \right) \\ &\quad + T_{e^{\exp(t \triangleright D\xi(0))}} \upharpoonright_{t=0} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(\mathcal{O}(t^2)) \right) \\ &= T_{e^e} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \right) + T_{e^e} l_e(0_{\mathfrak{g}}) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{t \triangleright D\xi(0)}(1), \end{aligned}$$

czyli – w świetle Stw. 7 –

$$\mathfrak{h} \ni X = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{D\xi(0)}(t) = D\xi(0).$$

Możemy zatem zapisać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \triangleright \xi\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathfrak{h}.$$

Zdefiniujmy ciągi

$$X_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{g} : n \longmapsto n \triangleright \xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right), \quad t_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \longmapsto \frac{1}{n},$$

Na mocy Stw. 7 zachodzi relacja

$$\lambda_{X_n}(t_n) = \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \equiv \lambda_{\xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right)}(1) \equiv \exp \circ \xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right) = \gamma\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right) \in \mathbb{H},$$

możemy więc przywołać Lemat 2, aby stwierdzić, że

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \equiv \lambda_{D\xi(0)}(t) = \lambda_{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n}(t) \in \mathbb{H},$$

co dowodzi inkluzji

$$\mathfrak{h} \subseteq \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in \mathbb{H} \}.$$

Tym sposobem zidentyfikowaliśmy algebrę Liego podgrupy  $\mathbb{H}$ . Ta wraz z dowolnym jej dopełnieniem prostym  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ ,

$$(13) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

w przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej  $\mathfrak{g}$  (dopełnienie to nie jest w ogólności podalgebrą Liego algebry  $\mathfrak{g}$ ) stanowi poszukiwany model lokalnej mapy podrozmaitości na otoczeniu  $e$  w  $\mathbb{H} \subset G$ . Ażeby się o tym przekonać, pokażemy najpierw, że istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{M}$  wektora  $0_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{m}$  o własności  $\exp(\mathcal{M}) \cap \mathbb{H} = \{e\}$ . Istotnie, gdyby tak nie było, można byłoby wybrać ciąg wektorów  $Y_n : \mathbb{N} \longrightarrow$

$\mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$  zbieżny do  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0_{\mathfrak{g}}$  i o własności  $\exp(Y_n) \in H$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wtedy jednak – wybrawszy (dowolnie) normę  $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  na  $\mathfrak{m}$  ciągłą w topologii na  $\mathfrak{g}$  (zatem np. wzięwszy normę euklidesową indukującą naturalną topologię na  $\mathfrak{g}$ ) – uzyskalibyśmy ciąg wektorów

$$v : \mathbb{N} \rightarrow \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m} : n \mapsto \|Y_n\|^{-1} \triangleright Y_n,$$

z którego wobec zwartości sfery  $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$  moglibyśmy następnie wybrać podciąg zbieżny  $v_n$  o granicy  $v := \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k} \in \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$ , więc też położywszy

$$\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \mapsto \|Y_n\|_{\mathfrak{g}},$$

i sprawdziliśmy relacje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|0_{\mathfrak{g}}\|_{\mathfrak{g}} = 0,$$

$$\lambda_{v_n}(\tau_n) = \lambda_{\|Y_n\|_{\mathfrak{g}} \triangleright v_n}(1) = \lambda_{Y_n}(1) \in \exp(\mathfrak{h}) = H,$$

moglibyśmy ponownie skorzystać z Lematu 2, dostając

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_v(t) \in H,$$

czyli – w świetle równości (12) –  $v \in \mathfrak{h}$ , a zatem – wobec rozkładu (13) – sprzeczność z wcześniejszym wynikiem  $v \in \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ . Mając pożądane otoczenie  $\mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$ , wybierzmy następnie takie otoczenia otwarte:  $\mathcal{O}_{\mathfrak{h}}$  wektora  $0_{\mathfrak{h}}$  w  $\mathfrak{h}$  oraz  $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$  wektora  $0_{\mathfrak{g}}$  w  $\mathfrak{m}$ , a także  $\mathcal{O}_e$  elementu  $e$  w  $G$ , iżby odwzorowanie

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathcal{O}_e : (X, Y) \mapsto \exp(X) \cdot \exp(Y)$$

było dyfeomorfizmem. O tym, że wybór taki jest możliwy, przesądza analiza rozszerzonego odwzorowania

$$\tilde{\varphi} : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \rightarrow G : (X, Y) \mapsto \exp(X) \cdot \exp(Y).$$

Jego styczna w  $(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$  to

$$D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}}) : T_{(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) \equiv \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \rightarrow T_{\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}G = T_e G \equiv \mathfrak{g} : (x, y) \mapsto x + y,$$

co w świetle Stw. 7 oraz Równ. (2) wynika wprost z rachunku

$$\begin{aligned} D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})(x, y) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright x) \cdot \exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright y)) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\lambda_{t \triangleright x}(1) \cdot \lambda_{t \triangleright y}(1)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\lambda_x(t) \cdot \lambda_y(t)) \\ &= T_e r_{\lambda_y(0)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_x(t) \right) + T_e l_{\lambda_x(0)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_y(t) \right) \\ &= T_e r_e(x) + T_e l_e(y) = x + y \end{aligned}$$

i dowodzi izomorficznego charakteru  $D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$  (wszak  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ ), który pozwala odnieść do  $\tilde{\varphi}$  Twierdzenie o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań. Niechaj teraz  $h \in \mathcal{O}_e \cap H$ , a wtedy  $h = \exp(X) \cdot \exp(Y)$  dla pewnych  $(X, Y) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$ , ale też  $\exp(X) \in \exp(\mathfrak{h}) = H$ , więc  $\exp(Y) = \exp(X)^{-1} \cdot h \in H \cdot (\mathcal{O}_e \cap H) \subset H$ , co wobec założenia  $Y \in \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M}$  oznacza, że  $Y = 0_{\mathfrak{g}}$ , czyli  $h = \exp(X) \in \exp(\mathcal{O}_{\mathfrak{h}})$ . Jest przeto  $\kappa_e \equiv \varphi^{-1}$  mapą na otoczeniu  $\mathcal{O}_e$  elementu neutralnego w  $G$ , a przy tym

$$H \cap \mathcal{O}_e = \kappa^{-1}(\{ (X, 0_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \mid X \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \}).$$

Mapę na otoczeniu punktu  $h \in H$  definiujemy jako

$$\kappa_h := \kappa \circ l_{h^{-1}} : l_h(\mathcal{O}_e) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$$

(podzbiór  $l_h(\mathcal{O}_e)$  jest otwarty jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego  $\mathcal{O}_e$ ). Uzyskujemy tym sposobem atlas podrozmaitości  $\{\kappa_h\}_{h \in H}$  dla  $H \subset G$ , w którym operacje grupowe są gładkie jako ograniczenia operacji z  $G$ .

I odwrotnie, niech  $H \subset G$  będzie podgrupą i podrozmaitością grupy Liego  $G$ . Operacje grupowe na  $H$  są stosownymi złożeniami tychże operacji na  $G$  (z założenia gładkich) z kanonicznymi gładkimi włożeniami  $\iota_H : H \xrightarrow{\cong} \iota_H(H) \subset G$  i ich odwrotnościami  $\iota_H^{-1} : \iota_H(H) \xrightarrow{\cong} H$ ,

$$m_H \equiv \iota_H^{-1} \circ m_G \circ (\iota_H \times \iota_H), \quad \text{Inv}_H = \iota_H^{-1} \circ \text{Inv}_G \circ \iota_H,$$

i jako takie są gładkie. Jest zatem  $H$  podgrupą Liego. Pozostaje pokazać, że jest ona domknięta. W tym celu rozważmy dowolny punkt  $g \in \overline{H}$  z domknięcia  $\overline{H}$  podgrupy  $H$ , wraz z odnośnym ciągiem  $h_n : \mathbb{N} \rightarrow H$  doń zbieżnym,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = g$ . Niechaj  $\mathcal{O}_e \in \mathcal{T}(G)$  będzie dziedziną lokalnej mapy podrozmaitości  $\kappa$  na otoczeniu  $e \in \iota_H(H)$ , a  $\mathcal{U}_e \in \mathcal{T}(G)$  – pewnym podotoczeniem  $\mathcal{O}_e \supset \mathcal{U}_e$  o własności  $\overline{\mathcal{U}_e} \subset \mathcal{O}_e$  (wystarczy wybrać  $\mathcal{U}_e$  jako przeciwobraz względem  $\kappa$  dostatecznie małej kuli w  $\mathbb{R}^{\dim G}$  wokół  $\kappa(e)$ ). Przywoławszy Lemat 1, ustalmy (dowolnie) otoczenie otwarte  $\mathcal{O}$  elementu neutralnego  $e \in G$  o własności  $m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e$ , po czym rozważmy ciąg

$$g_n := g^{-1} \cdot h_n : \mathbb{N} \rightarrow G : n \mapsto g^{-1} \cdot h_n$$

o granicy (obliczonej z wykorzystaniem ciągłości mnożenia)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = e.$$

Prawie wszystkie jego wyrazy są zawarte w  $\mathcal{O}$ , a zatem – dla dostatecznie dużych  $m, n \in \mathbb{N}$  –

$$h_n^{-1} \cdot h_m = g_n^{-1} \cdot g_m \equiv f(g_n, g_m) \in f(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e.$$

Przy tym dla ustalonego  $n$  otrzymujemy – wobec ciągłości mnożenia –

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_n^{-1} \cdot h_m = h_n^{-1} \cdot g,$$

a ponieważ granica ciągu punktów z  $\mathcal{U}_e$  należy do  $\overline{\mathcal{U}_e} \subset \mathcal{O}_e$ , przeto także  $h_n^{-1} \cdot g \in \mathcal{O}_e$ . Przy tym w dziedzinie  $\mathcal{O}_e$  mapy podrozmaitości  $\kappa$  przecięcie  $H \cap \mathcal{O}_e$  jest homeomorficznym przeciwobrazem względem  $\kappa$  dopełnienia (w  $\kappa(\mathcal{O}_e) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\dim G})$ ) sumy mnogościowej pary zbiorów otwartych złożonych z punktów o – odpowiednio – ściśle dodatnich i ściśle ujemnych ostatnich  $\dim G - \dim H$  współrzędnych (opisujących kierunki transwersalne do obrazu  $\kappa(H \cap \mathcal{O}_e) = \mathcal{V} \times \{(0, 0, \dots, 0)\}$ ,  $\mathcal{V} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\dim H})$ ), co oznacza, że podzbiór  $H \cap \mathcal{O}_e$  jest domknięty w  $\mathcal{O}_e$ . Ilekroć zatem mamy do czynienia z ciągiem punktów w  $H \cap \mathcal{O}_e$  zbieżnym w  $\mathcal{O}_e$ , a takim jest  $h_n^{-1} \cdot h_n$ , granica jego leży także w  $H \cap \mathcal{O}_e$ , czyli w szczególności

$$h_n^{-1} \cdot g \in H \cap \mathcal{O}_e \subset H,$$

więc też  $g \in H$ , to zaś przesądza o postulowanej równości

$$\overline{H} = H.$$

□

## Przykłady 2.

- (1) Grupa (pseudo)ortogonalna  $O_{\mathbb{R}}(p, q)$  (1) jest (jako zbiór) przeciwobrazem  $\tau^{-1}(\{\mathbf{0}_n\})$  podzbioru domkniętego  $\{\mathbf{0}_n\} \subset \mathbb{R}(p+q)$  względem odwzorowania (jawnie ciągłego)

$$\tau : \text{GL}_{\mathbb{R}}(p+q) \rightarrow \mathbb{R}(p+q) : A \mapsto A^T \boxplus \mathbf{1}_{p,q} \boxminus A - \mathbf{1}_{p,q},$$

zapisanego przy użyciu macierzy

$$\mathbf{1}_{p,q} = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p \text{ razy}}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q \text{ razy}}),$$

jest przeto podgrupą domkniętą grupy Liego  $\text{GL}_{\mathbb{R}}(p+q)$  z Przykł. 1 (4), czyli też (pod)grupą Liego. Grupa ta ma wyróżnioną podgrupę Liego

$$\text{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \equiv \det_{(p+q)}^{-1}(\{1\}),$$

zwaną grupą specjalną ortogonalną.

W przypadku  $pq = 0$  ta ostatnia podgrupa zadaje rozkład grupy ortogonalnej na składowe spójne

$$\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p, q) = \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \sqcup \mathrm{P}_{e_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q),$$

w którego zapisie

$$\mathrm{P}_{e_1} : \mathbb{R}^{\times p} \curvearrowright : (v^1, v^2, \dots, v^p) \mapsto (-v^1, v^2, \dots, v^p)$$

jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu  $v^1 = 0$ .

W przypadku  $pq \neq 0$  podgrupa  $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q)$  rozkłada się na składowe spójne

$$\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) = \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup \mathrm{P}_{e_1} \cdot \mathrm{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q),$$

przy czym  $\mathrm{P}_{e_{p+1}}$  jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu  $v^{p+1} = 0$ , a (pod)grupę Liego będącą składową spójną jednostki  $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q)$ , zwaną **grupą specjalną ortogonalną ortochroniczną**, tworzą macierze zachowujące zarówno orientację podprzestrzeni  $\mathbb{R}^{\times p} \times \{\mathbf{0}_q\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$ , jak i orientację podprzestrzeni  $\{\mathbf{0}_p\} \times \mathbb{R}^{\times q} \subset \mathbb{R}^{p,q}$  (należy zwrócić uwagę, że przekształcenia ortogonalne zachowują każdą z tych podprzestrzeni, a to z racji określoności formy kwadratowej  $\delta_{\mathbb{E}}^{(p,q)}$  w ograniczeniu do każdej z nich). Ostatecznie otrzymujemy rozkład pełnej grupy ortogonalnej na składowe spójne w postaci

$$\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p, q) = \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup \mathrm{P}_{e_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup \mathrm{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup \mathrm{P}_{e_1} \cdot \mathrm{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q).$$

#### DODATEK A. ODZWOROWANIA

Niechaj  $X_A, Y_A$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą zbiorami,  $f_A : X_A \rightarrow Y_A$  zaś – odwzorowaniami. Definiujemy wówczas **produkt** odwzorowań  $f_A$  jako odwzorowanie

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Mając do dyspozycji zbiory  $X, Z_1, Z_2$  i parę odwzorowań  $F_\alpha : X \rightarrow Z_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , definiujemy także odwzorowanie

$$(F_1, F_2) : X \rightarrow Z_1 \times Z_2 : x \mapsto (F_1(x), F_2(x)).$$

Relację pomiędzy tymi dwoma typami odwzorowań ustalmy wprowadzając odwzorowanie

$$\Delta : X \rightarrow X \times X : x \mapsto (x, x),$$

wkładające zbiór  $X$  w jego kwadrat kartezjański w postaci jego przekątnej. Przy jego pomocy możemy zapisać tożsamość

$$(F_1, F_2) = (F_1 \times F_2) \circ \Delta.$$

Jest oczywiste, że ilekroć wszystkie zbiory objęte definicjami są wyposażone w strukturę rozmaitości różniczkowalnej klasy  $C^\infty$ , względem której odnośne odwzorowania są gładkie, własność ta jest dziedziczona przez  $f_1 \times f_2$  i  $(F_1, F_2)$ .

#### DODATEK B. ILOCZYN PÓŁPROSTY GRUP

Niechaj  $G_A$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą grupami i niech

$$\alpha : G_1 \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(G_2) : g \mapsto \alpha_g$$

będzie homomorfizmem grup przyporządkowującym dowolnemu elementowi  $G_1$  odnośny automorfizm (tj. odwracalny endomorfizm – te tworzą grupę z superpozycją jako operacją binarną, odwrotnością jako operacją unarną i automorfizmem identycznościowym jako elementem neutralnym)  $G_2$ . Wówczas produkt kartezjański  $G_1 \times G_2$  nośników struktury grupy możemy wyposażyć w *odmienną od produktowej* strukturę grupy definiując operację binarną

$$(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \rightarrow G_1 \times G_2 : ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1 \cdot_{G_1} h_1, \alpha_{h_1^{-1}}(g_2) \cdot_{G_2} h_2)$$

oraz odwrotność

$$G_1 \times G_2 \curvearrowright : (g_1, g_2) \mapsto (g_1^{-1}, \alpha_{g_1}(g_2^{-1})),$$

dla których para elementów neutralnych  $(e_{G_1}, e_{G_2})$  jest elementem neutralnym. Tak zadaną strukturę grupy określamy mianem **produktu półprostego grup** i oznaczamy symbolem

$$G_1 \ltimes G_2.$$

Przykładem takiej struktury jest grupa Poincarégo symetrii przestrzeni Minkowskiego  $\mathbb{R}^{3,1}$ , będąca produktem półprostym grupy Lorentza i przemiennej grupy translacji w  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\text{ISO}(3, 1) = \text{SO}(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4,$$

zdefiniowana przez standardową reprezentację wektorową

$$\Lambda : \text{SO}(3, 1) \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{3+1}) \cong \text{GL}(4; \mathbb{R}).$$