Wykład XIV

Uzespolenia algebr Liego i ich reprezentacji

2020/21

W następnej kolejności zbadamy działanie $W(E,R)$ na zbiorze komór Weyla (patrz: obserwacja 2) ze str. 202), co doprowadzi nas do diagramatycznej reprezentacji systemów pierwiastkowych...

Stw. 36. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym.

$$\forall \Delta\text{-baza } (E,R): \ W(E,R) = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle .$$

Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komór Weyla jest przechodnie.

D: Ustalmy bazę Δ i rozważmy podgrupę $W_\Delta \equiv \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \subset W(E,R)$. (211)

Niech C będzie dowolną otwartą komorą Weyla. Wybierzmy $v \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $w \in C$. Pokażemy, że $\exists\, \chi \in W_\Delta : \chi(w) \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$. W tym celu wybierzmy $\chi_* \in W_\Delta$ spełniające warunek

$$\|\chi_*(w) - v\| = \min_{\chi \in W_\Delta} \|\chi(w) - v\|$$

(jest dobrze określone, gdyż $|W_\Delta| \leq |W(E,R)| < \infty$).

Załóżmy, że $\chi_*(w) \notin \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$, a wtedy

212

$\exists\, \alpha \in \Delta : \langle \alpha | \chi_*(w) \rangle < 0$, co jednak oznacza, że

— wobec $\langle v | \alpha \rangle > 0$ —

$$\| \chi_*(w) - v \|^2 - \| w_\alpha \circ \chi_*(w) - v \|^2$$

$$= \big(\chi_*(w) - v \,|\, \chi_*(w) - v \big) - \big(w_\alpha \circ \chi_*(w) - v \,|\, w_\alpha \circ \chi_*(w) - v \big)$$

$$= \cancel{(w|w)} - 2\big(\chi_*(w) | v\big) + \cancel{(v|v)}$$

$$- \cancel{(w|w)} + 2\big(w_\alpha \circ \chi_*(w) | v\big) - \cancel{(v|v)}$$

0

$\wedge$

$$= 2\Big(\cancel{\chi_*(w)} - 2\frac{(\chi_*(w)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \cdot \alpha - \cancel{\chi_*(w)} \,\Big|\, v \Big) = -4\frac{(\chi_*(w)|\alpha)\cdot(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)},$$

czyli $\|w_\alpha \circ X_*(w) - v\| < \min\limits_{X \in W_\Delta} \|X(w) - v\|$ $\lightning$

(wszak $w_\alpha \circ X_* \in W_\Delta$).

Zatem $X_*(w) \in \mathfrak{E}(E,R;\Delta)$, co wobec dowolności w oznacza, że C można odwzorować w $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ używając W_Δ, a ponieważ $X_* \in W_\Delta$ zachowuje kąty, jest jasne, że X_* przeprowadza <u>całą</u> komnatę C w $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$, czyli $X_*(C) = \mathfrak{E}(E,R;\Delta)$.

W takim razie ...

$\forall\, C_1, C_2$ - otwarte komory Weyla

$\exists\, \chi \in W_\Delta : \ \chi(C_1) = C_2$, co oznacza,

że W_Δ - tym bardziej więc W - działa

przechodnio na zbiorze komór.

Pozostaje przekonać się, że $W_\Delta = W$.

Rozważmy $\alpha \in R$. W świetle str. 35

$\exists\, \Delta_{(\alpha)}$ - baza : $\alpha \in \Delta_{(\alpha)}$, więc też - $\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})$.

Ustalmy $\chi \in W_\Delta$: $\chi(\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})) = \mathfrak{C}(E, R; \Delta)$.

Potrzebujemy...

Lemat: $\forall \alpha \in R \ \forall \chi \in W(E,R)$:

215

$$w_{\chi(\alpha)} = \chi \circ w_\alpha \circ \chi^{-1} .$$

DL: $\forall v \in E$: $w_{\chi(\alpha)}(v) \equiv v - 2 \frac{(v|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$

$$= \chi(\chi^{-1}(v)) - 2 \frac{(\chi(\chi^{-1}(v))|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$$

$$= \chi\left(\chi^{-1}(v) - 2 \frac{(\chi^{-1}(v)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right)$$

$\mathbb{R}$-liniowość i izometryczność χ

$$\equiv \chi(w_\alpha(\chi^{-1}(v))) . \quad \square$$

W następnej kolejności dowodzimy (216)

Str. 37. $\forall C$ - otwarta komora Weyla

$$\forall v, w \in \overline{C} \ \forall \chi \in W(E,R) : \left(w = \chi(v) \Rightarrow w = v \right).$$

D: Zaczniemy od

Lemat: Niech Δ będzie bazą R i niech $\chi \in W(E,R) \setminus \{id_E\}$. Ustalmy ROZKŁAD MINIMALNY $\chi = W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_2} \circ \ldots \circ W_{\alpha_M}$, $\alpha_i \in \Delta$, tj. taki, w którym M jest najmniejsze z możliwych. Wówczas $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $\chi(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ leżą po przeciwległych stronach Π_{α_1}.

(indukcyjnie wzgl. M)

Dł: Słowo $X \neq \mathrm{id}_E$, to $M \geq 1$. Jeśli $M=1$, to $X = w_{\alpha_1}$, a wtedy $X(\mathfrak{E}(E,R;\Delta)) \equiv w_{\alpha_1}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ jest odbiciem $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ w hiperpłaszczyźnie Π_{α_1}, zgodnie z tezą.

Załóżmy, że teza jest słuszna dla X o rozkładach minimalnych o długości $< M$. Niech $X = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \ldots \circ w_{\alpha_M}$ i rozważmy $\underline{X} := w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \ldots \circ w_{\alpha_{M-1}}$. Rozkład $\underline{X}$ jest minimalny, gdyby bowiem nie był, rozkład X nie byłby minimalny,

wbrew założeniu. Na mocy założenia indukcyjnego
$\underline{\chi}(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ i $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ leżą po przeciwnych 218
stronach Π_{α_1}. Gdyby zatem $\chi(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$
leżał po tej samej stronie Π_{α_1} co $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$,
to również $\underline{\chi}(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ i $\chi(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ leżałyby
po przeciwnych stronach Π_{α_1}, $\underline{\chi}(w_{\alpha_1}(\mathfrak{C}(E,R;\Delta)))$
czyli też – wobec odwracalności $\underline{\chi}$ –
$\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_1}(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ leżałyby po przeciwnych
stronach $\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$.

Okazuje się jednak, że istnieje dokładnie jedna hiperpłaszczyzna Π_β, $\beta \in R$ o tej własności, że $\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ są po przeciwnych stronach Π_β — jest to Π_{α_M}. Istotnie, $\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ <u>są</u> po przeciwnych stronach Π_{α_M}, a gdy tym $\Pi_{\alpha_M} = \underbrace{\partial\mathcal{E}(E,R;\Delta)}_{\text{rozumiejąc} \dots} \cap \underbrace{\partial w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))}_{w_{\alpha_M}(\Pi_{\alpha_M})}$, weźmy więc $\sigma \in \partial\mathcal{E}(E,R;\Delta) \cap \Pi_{\alpha_M} \setminus \bigcup_{\beta \in R\setminus\{\pm\alpha_M\}} \Pi_\beta$, a wtedy odcinek $\{\sigma + t\triangleright\alpha_M \mid t \in [-\varepsilon,\varepsilon]\}$ dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zawiera pary wektorów z $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ i nie przecina żadnej Π_β, $\beta \in R\setminus\{\pm\alpha_M\}$, czyli wszystkie pary wektorów $(v + t\Delta\alpha_M, v - t\Delta\alpha_M)$ są po tej <u>samej</u> stronie 220 wszystkich Π_β, $\beta \in R\setminus\{\pm\alpha_M\}$.

Wracając do wcześniejszego rozumowania konstatujemy, że gdyby $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ leżały po przeciwnych stronach $\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$, to byłoby $\Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)} \equiv \Pi_{\alpha_M}$, czyli tej – w świetle Lematu ze str. 215 –

$$w_{\alpha_M} \equiv w_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)} = \underline{\chi}^{-1} \circ w_{\alpha_1} \circ \underline{\chi}\,,$$ a to dałoby (221)

$$\chi \equiv \underline{\chi} \circ w_{\alpha_M} = w_{\alpha_1} \circ \underline{\chi} \equiv (w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_1}) \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_{M-1}}$$

$$= w_{\alpha_2} \circ w_{\alpha_3} \circ \dots \circ w_{\alpha_{M-1}}\,,$$ czyli reprezentację

χ krótszą (o 2) od minimalnej. ↯ ☒

Możemy więc przystąpić do dowodu stwierdzenia.

Przeprowadźmy go metodą indukcji wzgl. długości L rozkładu minimalnego χ na odbicia $w_\alpha, \alpha \in \Delta_C$ (2.2).
Jeśli $L = 0$, to $\chi = id_E$ i teza jest spełniona trywialnie. Załóżmy, że jest ona spełniona także, gdy $L < M$. Niech teraz $\chi = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \ldots \circ w_{\alpha_M}$ będzie rozkładem minimalnym. W świetle Lematu $\mathfrak{C}(E, R; \Delta_C) \equiv C$ i $\chi(\mathfrak{C}(E, R; \Delta_C))$ leżą po przeciwnych stronach Π_{α_1} i

$$\chi(\overline{\mathfrak{C}(E, R; \Delta_C)}) \cap \overline{\mathfrak{C}(E, R; \Delta_C)} \subset \Pi_{\alpha_1},$$

co oznacza, że $\chi(v) \equiv w \in \Pi_{\alpha_1}$, skąd dalej

$$W_{\alpha_1}\circ\chi(v) = W_{\alpha_1}(w) = w$$

$$\overset{L}{=} \underbrace{W_{\alpha_2}\circ W_{\alpha_3}\circ\dots\circ W_{\alpha_M}}_{\underline{\chi}}(v) \quad \text{, czyli}$$

$$\underline{\chi}(v) = w \quad \text{dla} \quad v, w \in \mathcal{E}(E, R; \Delta_c) \equiv C ,$$

ale rozkład $\underline{\chi}$ ma długość $M-1$, więc możemy zastosować założenie indukcyjne, aby stwierdzić, że w istocie zajdzie $v = w$.

$\square$

Dotychczasowe ustalenia dostarczają narzędzi do łatwej weryfikacji wielu następujących twierdzeń. 224

<u>Stw. 38.</u> Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komór Weyla jest <u>swobodne</u>. Ponadto $\forall C$ – otwartej komory Weyla $\forall v \in C$ $\forall \chi \in W(E,R)$:

$$\chi(v) = v \implies \chi = \mathrm{id}_E .$$

<u>D</u>: Niechaj C będzie otwartą komorą Weyla i niech $\chi \in W(E,R)$ takie, że $\chi(C) = C$, a wtedy $\forall v \in C$: $\chi(v) \in C$, więc na mocy

Stw. 37 zachodzi $\forall v \in C : \chi(v) = v$, stąd też $\chi|_C = \mathrm{id}_C$, ale to oznacza, że $\chi \equiv \mathrm{id}_E$, 225 bo w świetle Stw. 34 C zawiera bazę Δ_C przestrzeni E.

Ponadto, gdy dla pewnego $v \in C$ jest $\chi(v) = v$, to w świetle Obserwacji 2) ze str. 202 jest $\chi(C) = C$, a to na mocy wcześniej udowodnionej tezy implikuje $\chi = \mathrm{id}_E$. $\square$

Mamy też

str. 39. $\forall \Delta_1, \Delta_2$ - bazy R $\exists!\, X \in W(E,R)$: (226)

$$\Delta_2 = X(\Delta_1).$$

D: Baza Δ_A, $A \in \{1,2\}$ wyznacza obszar komory Weyla — $\mathfrak{E}(E,R;\Delta_A)$. Wobec swobodnego i przechodniego działania grupy $W(E,R)$ na zbiorze obszarów komór Weyla (str. 38 i 36, odpowiednio) $\exists!\, X \in W(E,R)$:
$\mathfrak{E}(E,R;\Delta_2) = X(\mathfrak{E}(E,R;\Delta_1))$. Ale X przeprowadza

$\chi(\partial\mathfrak{E}(E,R;\Delta_1)) = \partial\mathfrak{E}(E,R;\Delta_2)$, więc

też $\chi(\Delta_1) = \Delta_2$. $\square$ (227)

Doprecyzowujemy

Str. 40. Niech C – otwarta komora Weyla i niech $v \in E$. $\exists!\, \alpha \in \overline{C} \cap W(E,R)(v)$.
orbita

D: Niech $v \in E$, więc też $v \in \overline{C_v}$, gdzie C_v jest pewną otwartą komorą Weyla.

Na mocy str. 36 $\exists\, \chi \in W(E,R): C = \chi(C_v)$, a wtedy także $\chi(\overline{C_v}) = \overline{C}$, zatem $\chi(v) \in \overline{C}$, czyli $W(E,R)(v) \cap \bar{C} \neq \emptyset$.

Przy tym jeśli takie $w \in W(E,R)(v) \cap \bar{C}$ (228)

to $X(v)$ i w są w tej samej odchicie v,

czyli $\exists\, \tilde{X} \in W(E,R)$: $w = \tilde{X}(X(v))$,

a to oznacza — w świetle Str. 37 —

$w \equiv X(v)$. $\square$

Na zakończenie tej części wszystkich rozważań!

Dowodzimy ...

Str. 41. Niechaj Δ będzie bazą R i niech $\alpha \in \Delta$. $\forall \beta \in R_+^{\Delta} : \left(\beta \neq \alpha \Rightarrow w_\alpha(\beta) \in R_+^{\Delta}\right)$, 229

czyli w_α jest permutacją pierwiastków dodatnich różnych od α.

D: Niech $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} n^\gamma \triangleright \gamma$, przy czym $\beta \neq \alpha$

implikuje $\exists\, \gamma_* \in \Delta \setminus \{\alpha\} : n^{\gamma_*} > 0$.

Na mocy aksjomatu (SP3) $w_\alpha(\beta) = \beta - N \triangleright \alpha$

dla pewnej liczby $N \in \mathbb{Z}$, a wobec tego

$$w_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma\in\Delta} \tilde{n}^\gamma \gamma \quad , \text{ gdzie } \tilde{n}^\gamma = \begin{cases} n^\alpha - N & \text{dla } \gamma=\alpha \\ n^\gamma & \text{w p.p.} \end{cases}$$

W szczególności $\tilde{n}^{\gamma_*} = n^{\gamma_*}$.

Ale $R = R_+^\Delta \cup R_-^\Delta$, skoro więc $\tilde{n}^{\gamma_*} > 0$, to także pozostałe $\tilde{n}^{\gamma\neq\gamma_*} \geq 0$,

zatem $w_\alpha(\beta) \in R_+^\Delta$. $\square$

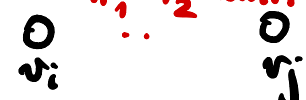
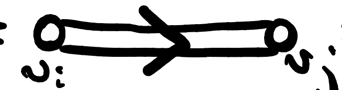
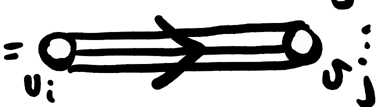
Dotychczasowe rozważania przygotowały nas do podjęcia wyzwania klasyfikacji systemów pierwiastkowych...

Def. 26. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym o bazie $\Delta = \{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$. (231)

DIAGRAM DYNKINA s.p. (E,R) to graf o r wierzchołkach $\{v_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ połączonych krawędziami $e_{ij} = (\overrightarrow{v_i, v_j})$, $i,j\in\overline{1,r}$ wedle przepisu: (patrz: str. 176)

(patrz: str. 29. i 31.)

$n_1 \cdot n_2$ linii

- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{\pi}{2} \implies e_{ij} =$ 
- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{2\pi}{3} \implies e_{ij} =$  : $\|v_i\| = \|v_j\|$
- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{3\pi}{4} \implies e_{ij} =$  : $\|v_i\| = \sqrt{2}\|v_j\|$
- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{5\pi}{6} \implies e_{ij} =$  : $\|v_i\| = \sqrt{3}\|v_j\|$

Dwa diagramy Dynkina nazwiemy RÓWNOWAŻNYMI jeśli istnieje bijekcja między zbiorami ich wierzchołków zachowująca łączące je krawędzie (walencję i „zwrot"). 232

OBSERWACJA: W świetle str. 39. i w konsekwencji zachowywania przez $W(E,R)$ kątów i długości dowolne dwie bazy (E,R) dają równoważne diagramy Dynkina, w tym zatem sensie diagram Dynkina jest stowarzyszony z systemem pierwiastkowym, nie zaś — z konkretną bazą.

Pojęcia kluczowe

§33

Tw. 12. System pierwiastkowy jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jego diagram Dynkina jest spójny.

Ponadto diagramy Dynkina dwóch systemów pierwiastkowych są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy te systemy są izomorficzne.

D: Jeżeli $\boxed{\Rightarrow}$ system pierwiastkowy (E,R) rozkłada się na podsystemy:

$$(E,R) = (E_1,R_1) \oplus (E_2,R_2),$$

wybieramy bazę (E,R) w postaci $\Delta_1 \oplus \Delta_2$, gdzie Δ_A jest bazą (E_A,R_A), $A \in \{1,2\}$. Wtedy jednak krawędzie między wierzchołkami należącymi do dwóch różnych podbaz: Δ_1 i Δ_2 są puste, zatem diagram jest niespójny.

$\boxed{\Leftarrow}$ I odwrotnie, jeśli diagram Dynkina (E,R) jest niespójny, baza Δ rozpada się na podzbiory

wzajem ortogonalne, $\Delta_1 \oplus \Delta_2 = \Delta$.
W takim jednak razie $E = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}} \cong \underset{E_1}{\underset{\shortparallel}{\langle \Delta_1 \rangle_{\mathbb{R}}}} \oplus \underset{E_2}{\underset{\shortparallel}{\langle \Delta_2 \rangle_{\mathbb{R}}}}$. Oznaczymy $R_A := R \cap E_A$.

Łatwo widać, że (E_A, R_A), $A \in \{1,2\}$ są systemami pierwiastkowymi. Jedyna własność wymagająca sprawdzenia to (SP3), a ściślej: Musimy pokazać, że $\forall \alpha, \beta \in R_A : \overset{w_\alpha(\beta)}{\overset{\shortparallel}{\beta - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha}} \in R_A$. Oczywiście $w_\alpha(\beta) \in R$, pozostaje zatem upewnić się, że

$w_\alpha(\beta) \perp R_{A'}$, gdzie A' jest indeksem dopełniającym.

Ale $\forall \gamma \in R_{A'}$: $\left(w_\alpha(\beta)\,|\,\gamma\right) = \underbrace{(\beta|\gamma)}_{=0,\ \text{bo } \beta\perp\gamma} - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\cdot \underbrace{(\alpha|\gamma)}_{=0,\ \text{bo } \alpha\perp\gamma}$

$\equiv 0$. ✓

Jest przy tym oczywiste, że Δ_A jest bazą (E_A, R_A).

Pozostaje pokazać, że $\forall \alpha \in R: \alpha \in R_1 \ \underline{\vee}\ \alpha \in R_2$.

W świetle str. 36: $W(E,R) = \langle w_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta_1 \oplus \Delta_2 \rangle$,

a ponieważ $\forall \alpha \in \Delta_A: w_\alpha\restriction_{E_{A'}} = id_{E_{A'}}$, przeto

$W(E,R) = W(E_1,R_1) \times W(E_2,R_2)$, przy czym $W(E_A,R_A) = \langle w_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta_A \rangle$ działa trywialnie na $E_{A'}$.

Skoro jednak $\forall \alpha \in R$ jest – na mocy Stw. 35 – elementem pewnej bazy, a $W(E,R)$ działa – w świetle Stw. 34 i 35 – przechodnio na zbiorze baz R, to jest pewne, że $\exists\, X = (X_1, X_2) \in W(E,R)$:

$\alpha \in X(\Delta_1 \oplus \Delta_2) \equiv X_1(\Delta_1) \oplus X_2(\Delta_2)$ (wszak X jest izometrią),

czyli $\alpha \in X_A(\Delta_A) < R_A$. $\boxtimes$

Przechodząc do drugiej części tezy Twierdzenia, konstatujemy trywialność wynikania $\boxed{\Leftarrow}$, po czym w przypadku $\boxed{\Rightarrow}$ ograniczamy się

Do sytuacji, w której oba diagramy
Dynkina są spójne, więc tej – w świetle
wcześniejszych ustaleń – oba systemy pierwiastkowe
są nieprzywiedlne.

Rozważmy zatem systemy (E_A, R_A)
o odnośnych bazach $\mathcal{A}_A = \{\alpha_i^A\}_{i\in\overline{1,r}}$ uporządkowanych
tak, że izomorfizm diagramów Dynkina
przyporządkowuje $v_i^1 \longleftrightarrow v_i^2$, $i\in\overline{1,r}$.
Na (E_2, R_2) skalujemy iloczyn skalarny

wedle schematu: $\langle\cdot|\cdot\rangle_2 \longmapsto \frac{\langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2}\cdot\langle\cdot|\cdot\rangle_2 \equiv \langle\cdot|\cdot\rangle_2^{\sim}$,

uzyskując tym sposobem równość

(*) $\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2^{\sim} = \langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1$. Jako że kwadraty

$e^1_{1j\neq1}$ są identyczne z odnośnymi kwadratami

$e^2_{1j\neq1}$, przeto

$$(!)\quad \frac{\langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^{2}}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2\cdot\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2} = \frac{\langle\alpha_1^1|\alpha_j^1\rangle_1^{2}}{\langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1\cdot\langle\alpha_j^1|\alpha_j^1\rangle_1}$$

(*) $\longleftrightarrow$

$$\langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim 2} = \frac{\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim}}{\langle\alpha_j^1|\alpha_j^1\rangle_1}\cdot\langle\alpha_1^1|\alpha_j^1\rangle_1^{2} \quad \Bigg| \quad = \frac{\langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim 2}}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2^{\sim}\cdot\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim}}$$

: równość kątów $\measuredangle(\alpha_1^2,\alpha_j^2) = \measuredangle(\alpha_1^1,\alpha_j^1)$

(2) $$\frac{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2} = \frac{\langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1}{\langle \alpha_1^1 | \alpha_1^1 \rangle_1} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \underline{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1} \qquad (240)$$

$$\equiv \quad \frac{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim}}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2^{\sim}}$$

: równość stosunków odpowiedni dla <u>iloczynów</u> <u>połączonych</u> (*)

Z koniunkcji powyższych warunków otrzymujemy:

$$\begin{cases} \langle \alpha_1^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_1^1 | \alpha_j^1 \rangle_1 \\ \langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1 \quad (\text{dla } j \neq 1) \end{cases}$$

Powtarzając to rozumowanie w odpowiedni

do każdego z wierzchołków $\neq 1$
wstawiamy - wobec spójności obu diagramów - tożsamość wszystkich (odnośnych) wektorów i długości w bazach obu systemów, stwierdzając tym samym, że jedyne $\mathbb{R}$-liniowe rozszerzenie przyporządkowania

$$\alpha_i^1 \longmapsto \alpha_i^2$$

jest izometrią: $(E_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_1) \underset{L}{\cong} (E_2, \langle\cdot|\cdot\rangle_2^{\sim})$, a zatem — w szczególności —

(242)

$$\forall i \in \overline{1,r} : \iota \circ W_{\alpha_i^1} = W_{\alpha_i^2} \circ \iota$$

Istotnie, $\forall \beta \in E_1$: $\iota \circ W_{\alpha_i^1}(\beta) = \iota\left(\beta - 2\frac{\langle \beta | \alpha_i^1 \rangle_1}{\langle \alpha_i^1 | \alpha_i^1 \rangle_1} \triangleright \alpha_i^1\right)$

$$= \iota(\beta) - 2\frac{\langle \beta | \alpha_i^1 \rangle_1}{\langle \alpha_i^1 | \alpha_i^1 \rangle_1} \triangleright \iota(\alpha_i^1) = \iota(\beta) - 2\frac{\langle \iota^{-1} \circ \iota(\beta) | \iota^{-1}(\alpha_i^2) \rangle_1}{\langle \iota^{-1}(\alpha_i^2) | \iota^{-1}(\alpha_i^2) \rangle_1} \triangleright \alpha_i^2$$

$$= \iota(\beta) - 2\frac{\widetilde{\langle \iota(\beta) | \alpha_i^2 \rangle_2}}{\widetilde{\langle \alpha_i^2 | \alpha_i^2 \rangle_2}} \triangleright \alpha_i^2 \equiv W_{\alpha_i^2} \circ \iota(\beta) .$$

W tabeli str. 34 i 35 dowolny pierwiastek $\alpha \in R_1$

możemy zapisać w postaci

(243)

$$\alpha = W_{\alpha^1_{i_1}} \circ W_{\alpha^1_{i_2}} \circ \ldots \circ W_{\alpha^1_{i_N}}(\alpha^1_j)$$

dla pewnych $j, i_1, i_2, \ldots, i_N \in \overline{1,r}$. W takim razie

jednak $$\varphi(\alpha) = W_{\alpha^2_{i_1}} \circ W_{\alpha^2_{i_2}} \circ \ldots \circ W_{\alpha^2_{i_N}}(\alpha^2_j) \in R_2$$

(bo $W(E_2, R_2)$ zachowuje R_2). Analogicznie

pokazujemy, że $\varphi^{-1}(R_2) \subset R_1$, zatem otrzymujemy

izomorfizm $$\varphi\big|_{R_1} : R_1 \simeq R_2,$$ który kończy

dowód. $\square$

Z połączenia Thr. 10 i 12. wyprowadzamy istotne dla nas (244)

<u>Corollarium</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą a.L. o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{h}$ będzie jej podalgebrą Cartana odpowiadającą wyborowi $\mathfrak{t}$ maksymalnej podalgebry przemiennej w $\mathfrak{k}$. Wówczas $\mathfrak{g}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy diagram Dynkina $(\mathfrak{t}\otimes i, Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}))$ jest spójny.