Wykład XII

Homomorfizmy algebr Liego i ich reprezentacji

2020/21

Abstrakcja:

Def. 22. SYSTEM PIERWIASTKOWY

to para $((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R)$ złożona z:

- $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)\in \mathrm{Ob}\,\square\mathrm{Vect}^{<\infty}_{\mathbb{R}}$, niezerowymiarowa
- $R\subset E$ – podzbiór PIERWIASTKÓW

o własnościach: (SP1) $E=\langle R\rangle_{\mathbb{R}}$

(SP2) $\forall_{\alpha\in R}\ \forall_{\lambda\in\mathbb{R}}:\left(\lambda\triangleright\alpha\in R\Rightarrow\lambda\in\{-1,1\}\right)$

(SP3) $\forall_{\alpha,\beta\in R}: \ W_\alpha(\beta):=\beta-2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\triangleright\alpha\in R$ ODBICIE WEYLA

(SP4) $\forall_{\alpha,\beta\in R}: \ A_{\alpha\beta}:=2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\in\mathbb{Z}$.

Przy tym $\dim_{\mathbb{R}}E$ nazywamy RZĘDEM SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO

Podgrupę skończoną $W((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R) := \langle w_\alpha \mid \alpha\in R\rangle \subset O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ (151) określamy mianem GRUPY WEYLA SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO. $\curvearrowright G_R$

MORFIZM SYSTEMÓW PIERWIASTKOWYCH $((E_A,\langle\cdot|\cdot\rangle_A),R_A)$, $A\in\{1,2\}$ to $\chi\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1,E_2)$ o własnościach

(MSP1) $\chi(R_1)\subset R_2$

(MSP2) $\forall_{\alpha\in R_1} : \chi\circ\hat{w}^1_\alpha = \hat{w}^2_{\chi(\alpha)}\circ\chi$

dla rozszerzeń $\hat{w}^A_\alpha$ odbić Weyla do E_A.

System pierwiastkowy nazywamy PRZYWIEDLNYM, (152)
ilekroć

$$\exists\, \underset{\neq 0}{E_1}, \underset{\neq 0}{E_2} \subset E : \left(E \simeq E_1 \oplus E_2 \wedge \forall \alpha \in R : \alpha \in E_1 \veebar \alpha \in E_2 \right)$$

W przeciwnym razie mówimy o NIEPRZYWIEDLNYM SYSTEMIE PIERWIASTKOWYM.

X

W dalszej części będziemy analizować anatomię systemów pierwiastkowych. Przedtem jednak zbadamy dokładnie relacje między algebrami półprostymi i prostymi:

W ramach przypomnień terminologicznych

<u>Str. 27.</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą a.L.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} - \text{prosta} \Longrightarrow \mathfrak{g} - \text{prosta}.$$

<u>D</u>: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ - prosta $\overset{ex}{\underset{def}{\Longrightarrow}} \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \geqslant 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \geqslant 2$. ✓

Ponadto jeśli $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest nietrywialnym ideałem $\Longrightarrow \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ —〃—

—〃— ↯

□

Mamy długowe

Tw. 9. Niechaj K będzie zwartą grupą Liego o algebrze Liego $\mathrm{Lie}\,K \equiv \mathfrak{k}$. Jeśli $\mathfrak{k}$ jest prosta, to $\underbrace{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}_{\equiv \mathfrak{g}}$ jest prosta (jako $\mathbb{C}$-algebra).

D: W pierwszej kolejności musimy przeformułować pojęcie struktury $\mathbb{C}$-liniowej.

Lemat 1. Niechaj V będzie grupą przemienną. Wówczas poniższe zdania są równoważne:

(C1) Na V jest określone działanie $\mathbb{C}$, które czyni z niej przestrzeń $\mathbb{C}$-liniową

(C2) — " — — " — $\mathbb{R}$ — " — " — $\mathbb{C}$-liniową, $\mathbb{R}$-liniową, a warto $\exists\, I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \ : \ I \circ I = -\mathrm{id}_V$.

Endomorfizm taki określony mianem

STRUKTURY ZESPOLONEJ na V.

Dl 1: (C1) $\Rightarrow$ (C2) Działanie $\mathbb{C}$ indukuje działanie $\mathbb{R}$ poprzez $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r,0)$.

Mamy też $I = (0,1) \triangleright$.

(C2) $\Rightarrow$ (C1) Działanie $\mathbb{R}$ wraz z I indukuje

$$\mathbb{C} \times V \to V : ((x,y),v) \mapsto x \triangleright v + I(y \triangleright v).$$

□

Powyższy wynik uogólnia się prosto (456) do kategorii algebr Liego:

Lemat 2. Algebra Liego nad $\mathbb{R}$ $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ jest algebrą Liego nad $\mathbb{C}$ $\Longleftrightarrow$

$$\exists \underbrace{I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})}_{\text{STRUKTURA ZESPOLONA}} : \Big(I \circ I = -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \ \wedge\ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (I \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) = I \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \Big)$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \mathfrak{h} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{C}},\ \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) : \Big(\exists\, \chi^{-1} \ \wedge\ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}} \Big).$$

Dd 2: Proste ćwiczenie.

Możemy już teraz wrócić do dowodu zasadniczego.

<u>Lemat 3.</u> Niechaj K będzie zwartą grupą Liego o <u>nieprzemiennej</u> algebrze Liego $\mathfrak{k}$. Wówczas na $\mathfrak{k}$ <u>nie istnieje</u> struktura zespolona.

<u>DL3</u>: Załóżmy, przeciwnie, że $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$ jest strukturą zespoloną. Wówczas ad_X, $X \in \mathfrak{k}$ jest $\mathbb{C}$-liniowe. Istotnie,

$$\forall Y \in \mathfrak{k}: \ \mathrm{ad}_X \circ I(Y) \equiv [X, I(Y)]$$ 158

$$= -[I(Y), X] = -I([Y, X]) = I([X, Y]) \equiv I \circ \mathrm{ad}_X(Y).$$

Ale w świetle konstruktywnego dowodu Str. 18. na $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ istnieje niezmiennicza struktura hermitowska, względem której $\mathrm{ad}_X^{\mathbb{C}}$ jest skośnie hermitowski, zatem diagonalizowalny z $\mathrm{Sp}\, \mathrm{ad}_X^{\mathbb{C}} \subset i\mathbb{R}$, o ile więc wybierzemy $X \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$, dostaniemy

$\operatorname{Sp} \operatorname{ad}_X^{\mathbb{C}} \neq \{0\}$, czyli $\operatorname{ad}_X^{\mathbb{C}}$ NIE jest nilpotentny, co oznacza, że ad_X nie jest nilpotentny. 159

Przechodząc do $(\mathfrak{k}, I)$, stwierdzamy, że $\operatorname{ad}_X \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{k})$ jako operator NIE-nilpotentny ma niezerową wartość własną $\lambda = (a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Jeżeli zatem $V \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$:

$$[X, V] \equiv \mathrm{ad}_X(V) = \lambda \triangleright V \equiv a \triangleright V + b \triangleright \mathbb{I}(V)$$

Rozważmy $\tilde{X} := \bar{\lambda} \triangleright X \equiv a \triangleright X - b \triangleright \mathbb{I}(X)$.

Zachodzi $[\tilde{X}, V] \equiv [\bar{\lambda} \triangleright X, V] = \bar{\lambda} \triangleright [X, V]$

$$= \bar{\lambda} \triangleright (\lambda \triangleright V) = |\lambda|^2 \triangleright V .$$

Ale $\mathrm{ad}_{\tilde{X}}$ jest skośnie symetryczny względem struktury hermitowskiej (rzeczywistej) na $\mathbb{K}$, zatem

$$|\lambda|^2(V|V) = (\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V)|V) = -(V|\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V)) \quad 161$$

$$= -|\lambda|^2(V|V) \Longrightarrow (V=0 \vee \lambda=0) \;\lightning \;\square$$

Możemy już teraz przystąpić do dowodu

Twierdzenie...

Załóżmy, przeciwnie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ NIE jest proste, tj. istnieją przynajmniej dwie podalgebry proste $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}$, $j \in \overline{1,N}$, $N \geq 2$ o własności

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{j=1}^{N} \mathfrak{g}_j .$$

W świetle Tw. 3 rozkład powyższy jest jedyny z dokładnością do permutacji składników. Ale też $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą podalgebr $\bar{\mathfrak{g}}_j$, gdzie $\overline{X_1\otimes 1 + X_2\otimes i} = X_1\otimes 1 - X_2\otimes i$. Istotnie, „sprzężenie" (rzeczywiście $\mathbb{C}$-liniowe)

$\bar{\cdot} : \mathfrak{g} \circlearrowleft$ zachowuje nawias Liego,

$$\overline{[X,Y]_{\mathfrak{g}}} = \overline{[X_1\otimes 1, Y]_{\mathfrak{g}} + i\triangleright [X_2\otimes 1, Y]_{\mathfrak{g}}}$$

$$= [X_1\otimes 1, \bar{Y}]_{\mathfrak{g}} - i\triangleright [X_2\otimes 1, \bar{Y}]_{\mathfrak{g}} = [\bar{X}, \bar{Y}]_{\mathfrak{g}},$$

162

potem $\bar{g}_j$ spełniają te same relacje co g_j. Wobec powyższego

$\forall j\in\overline{1,N}\ \exists k\in\overline{1,N}: \ \bar{g}_j = g_k$.

Przypuśćmy, że $\exists j\in\overline{1,N}: \ \bar{g}_j = g_j$.

Wówczas $\forall x\in g_j: \ x+\bar{x}\in g_j\cap \mathfrak{k}$ i $g_j\cap\mathfrak{k}$ jest $\neq 0$ ideałem w $\mathfrak{k}$. Ale $g_j\cap\mathfrak{k}\neq\mathfrak{k}$, bo w p.p. $g_j = (g_j\cap\mathfrak{k})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = g$.

W takim razie $\mathfrak{g}_j \cap \mathbb{K}$ jest <u>nietrywialnym</u> ideałem w $\mathbb{K}$. ↯ (164)

(wszak $\mathbb{K}$ – proste)

Wniosek: $\neg\exists\, j \in \overline{1,N} : \overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_j$.

Niechaj $\underset{j \neq k}{j,k \in \overline{1,N}}$: $\overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_k$, a wtedy $(\mathfrak{g}_j \oplus \mathfrak{g}_k) \cap \mathbb{K} \subset \mathbb{K}$ jest niezerowym ideałem, który wobec prostoty $\mathbb{K}$ jest tożsamy z $\mathbb{K}$.

Stąd jedyny wniosek: $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_j \oplus \overline{\mathfrak{g}_j}$.

Mamy zatem <u>dwa</u> podideały proste, (165)
wzajem „sprzężone", $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_2 = \overline{\mathfrak{g}_1}$.
Zdefiniujmy następnie odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe:

$$\chi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{k} : X \mapsto X + \overline{X} .$$

Wobec $\overline{X} \in \overline{\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{g}_2$ jest $[Y, \overline{X}]_{\mathfrak{g}} = 0 \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}_1$, przeto

$$[\chi(X), \chi(Y)]_{\mathfrak{g}} = [X + \overline{X}, Y + \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{g}} + [\overline{X}, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}}$$

$$= [X,Y]_{\mathfrak{g}} + \overline{[X,Y]_{\mathfrak{g}}} = \chi([X,Y]_{\mathfrak{g}}) .$$

Dzięki temu X jest mono, gdyż

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_1}}{X} + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_2}}{\overline{X}} = 0 \iff X = 0 \quad \text{wobec } \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}.$$

Rachunek wymiarów (rzeczywistych)

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}$$

pokazuje, że X jest izo, zatem w świetle Lematu 2. $\mathfrak{k}$ ma strukturę zespoloną, co stoi w sprzeczności z Lematem 3. $\square$

Możemy wreszcie sformułować

<u>Tw. 10.</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą a.L. o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ będzie podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$ stowarzyszoną z maksymalną podalgebrą przemienną $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$. Wówczas $\mathfrak{g}$ <u>nie</u> jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{h}$ rozkłada się na ortogonalną sumę prostą podprzestrzeni

$$\mathfrak{h} = \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_1} \oplus \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_2} \quad \text{o własności}$$

$$\forall \alpha \in R(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) : \left(\alpha \in \mathfrak{h}_1 \ \underline{\vee}\ \alpha \in \mathfrak{h}_2\right).$$

D $\boxed{\Rightarrow}$: Załóżmy najpierw, że $\mathfrak{g}$ nie jest prosta, więc też – w świetle Tw. 9 – $\mathfrak{k}$ nie jest prosta. Istnieje zatem nietrywialny ideał $\mathfrak{k}_1 \subsetneq \mathfrak{k}$. W świetle Stw. 14 i przy dotychczasowym wyborze iloczynu skalarnego na $\mathfrak{k}$ (Ad_K-niezmienniczego) stwierdzamy, że także $\mathfrak{k}_1^\perp$ jest ideałem w $\mathfrak{k}$, czyli

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \,, \quad \mathfrak{k}_2 \equiv \mathfrak{k}_1^\perp ,$$

a zatem $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{k}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 .$

Niechaj $\mathfrak{t}$ będzie maksymalną podalgebrą przemienną w $\mathfrak{k}$. Pokażemy, że $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$, gdzie $\mathfrak{t}_A \subset \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$. Przypuśćmy, że $H = X_1 + X_2$, $\widetilde{H} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \in \mathfrak{t}$, gdzie $X_A, \widetilde{X}_A \in \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$.

Wówczas $$0 = [H, \widetilde{H}]_{\mathfrak{k}} = \underbrace{[X_1, \widetilde{X}_1]_{\mathfrak{k}}}_{\in\, \mathfrak{k}_1} + \underbrace{[X_2, \widetilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}}_{\in\, \mathfrak{k}_2}$$
(wszak $[\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2]_{\mathfrak{k}} = 0$),

zatem $[X_1, \widetilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}} = [X_2, \widetilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}$, a w takim razie
$[X_1, \widetilde{H}]_{\mathfrak{k}} = [X_1, \widetilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$, czyli $[X_1, \mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$,

co wobec maksymalności $\mathfrak{t}$ oznacza, że $X_1 \in \mathfrak{t}$. Analogicznie pokazujemy, że $X_2 \in \mathfrak{t}$.

To zaś oznacza, że $\mathfrak{t} = \underbrace{(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{k}_1)}_{=\,\mathfrak{t}_1} \oplus \underbrace{(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{k}_2)}_{=\,\mathfrak{t}_2}$, a zatem także $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$.

Dla dowolnych $\alpha \in Q(\underset{=\,\mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}}}{\mathfrak{g}_1}; \underset{=\,\mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}}{\mathfrak{h}_1})$ i $X \in \mathfrak{g}_{1\alpha}$ oraz $\underset{\in\,\mathfrak{h}}{H} = \underset{\in\,\mathfrak{h}_1}{H_1} + \underset{\in\,\mathfrak{h}_2}{H_2}$ obliczamy

$$[H,X]_{\mathfrak{g}} = [H_1,X]_{\mathfrak{g}} + \overbrace{[\underset{\in\,\mathfrak{h}_2\,\subset\,\mathfrak{g}_2}{H_2},\underset{\in\,\mathfrak{g}_1}{X}]_{\mathfrak{g}}}^{=0} = [H_1,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_1)\triangleright X$$

$$\equiv (\alpha|H)\triangleright X \quad \left(\begin{matrix}\text{wszak}\\ \alpha\perp\mathfrak{h}_2\end{matrix}\right),$$

a stąd wniosek, że także $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$.

Analogicznie dowodzimy, że każdy $\beta \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{h}_2)$ jest też w $\mathcal{Q}(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$. 171

Pokażemy, że każdy $\alpha \in \mathcal{Q}(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$ jest albo w $\mathcal{Q}(\mathfrak{g}_1;\mathfrak{h}_1)$, albo w $\mathcal{Q}(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{h}_2)$. Niechaj $X = \underset{\mathfrak{g}_1}{X_1} + \underset{\mathfrak{g}_2}{X_2} \in \mathfrak{g}_\alpha$ i niech $H_1 \in \mathfrak{h}_1$, a wtedy

$$\underset{\mathfrak{g}_1}{[H_1, X_1]_{\mathfrak{g}}} \equiv [H_1, X_1]_{\mathfrak{g}} + \underbrace{[H_1, X_2]_{\mathfrak{g}}}_{0} = [H_1, X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_1) \triangleright X$$

$$\equiv \underset{\mathfrak{g}_1}{(\alpha|H_1) \triangleright X_1} + \underset{\mathfrak{g}_2}{(\alpha|H_1) \triangleright X_2},$$

przeto albo $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, albo $(\alpha|H_1) = 0$, co wobec dowolności H_1 oznacza $\alpha \perp \mathfrak{h}_1$. Jeśli $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, to $\forall H_2 \in \mathfrak{h}_2 : 0_{\mathfrak{g}} = [H_2, X_1]_{\mathfrak{g}} \equiv [H_2, X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_2) \triangleright X$, czyli $\alpha \perp \mathfrak{h}_2$,

czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_1$, wtedy jednak $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_1; \mathfrak{t}_1)$.
W przeciwnym razie $\alpha \perp \mathfrak{t}_1$, czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_2$,
co implikuje $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_2; \mathfrak{t}_2)$. $\square$

$\boxed{\Leftarrow}$ Przyjmijmy teraz, że $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1^{\times 0} \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{t}_2^{\times 0}$ $\quad A \in \{1,2\}$
i $\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) : (\alpha \in \mathfrak{t}_1 \veebar \alpha \in \mathfrak{t}_2)$. Oznaczmy $R_A = Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) \cap \mathfrak{t}_A$,
i zdefiniujmy $\mathfrak{g}_A := \mathfrak{t}_A \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_A} \mathfrak{g}_\alpha$, $A \in \{1,2\}$, a wtedy

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako przestrzeni $\mathbb{C}$-lin., ale też $\begin{cases} \forall \alpha \in R_2 : [\mathfrak{t}_1, \mathfrak{g}_\alpha]_\mathfrak{g} = (\alpha | \mathfrak{t}_1) \triangleright \mathfrak{g}_\alpha = 0_\mathfrak{g} \\ \forall \alpha \in R_1 : [\mathfrak{t}_2, \mathfrak{g}_\alpha]_\mathfrak{g} = 0_\mathfrak{g} \end{cases}$

i oczywiście $[\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2]_\mathfrak{g} = 0_\mathfrak{g}$. Ponadto $\forall \alpha_A \in R_A : [\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}]_\mathfrak{g} = 0_\mathfrak{g}$, albowiem
$\alpha_1 + \alpha_2 \notin R_1 \cup R_2 \equiv Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t})$. Ostatecznie więc $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako algebry Liego. $\square$

Przeprowadzimy obecnie studium abstrakcyjnego systemu pierwiastkowego... Zaczniemy od elementarnego

Stw. 28. Niechaj (E_A, R_A), $A \in \{1,2\}$ będą systemami pierwiastkowymi. Wówczas $(E_1 \oplus E_2, R_1 \cup R_2)$,
suma prosta przestrzeni $\mathbb{R}$!
gdzie $R_A \equiv j_{R_A}(R_A)$, $j_{R_A} : R_A \hookrightarrow E_A$, jest systemem pierwiastkowym, zwanym SUMĄ PROSTĄ systemów pierwiastkowych (E_A, R_A).

D: Jako że $E_A = \langle R_A \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto

$\langle R_1 \cup R_2 \rangle_{\mathbb{R}} = E_1 \oplus E_2$, czyli (SP1) ✓.

(SP2) jest spełniony, gdyż R_A jest SP dla E_A.

Jeśli $\alpha, \beta \in R_A$, to $w_\alpha(\beta) \in R_A \subset R_1 \cup R_2$.

Jeśli natomiast $\alpha_A \in R_A$, to $w_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2$ i $w_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1$, bo $(\alpha_1 | \alpha_2) = 0$ w $E_1 \oplus E_2$.

W sumie więc (SP3) ✓.

Prawdziwość (SP4) wynika z łączności (175)

$$A^{E_1\oplus E_2}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} A^{E_A}_{\alpha,\beta}\in\mathbb{Z} & \text{dla } \alpha,\beta\in R_A \\ 0 & \text{dla } \alpha\in R_1,\ \beta\in R_2 . \end{cases} \quad \square$$

Uwagi wstępne dla rozważań klasyfikacyjnych:

Stw. 29. Niechaj $\alpha,\beta\in R$, przy czym $\beta\notin\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$, a nadto $\langle\alpha|\alpha\rangle\geq\langle\beta|\beta\rangle$. Wówczas zachodzi dysjunkcja

$$(1)\ \langle\alpha|\beta\rangle = 0$$

$\veebar$

$$(2)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \measuredangle(\alpha,\beta)\in\left\{\tfrac{\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3}\right\}$$

$\veebar$

$$(3)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 2\langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \measuredangle(\alpha,\beta)\in\left\{\tfrac{\pi}{4},\tfrac{3\pi}{4}\right\}$$

$\veebar$

$$(4)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 3\langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \measuredangle(\alpha,\beta)\in\left\{\tfrac{\pi}{6},\tfrac{5\pi}{6}\right\}$$

D: Oznaczmy $n_1 := 2\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$, $n_2 := 2\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$. 176

Wiemy, że $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Jest

$$n_1 \cdot n_2 = 4\frac{\langle\alpha|\beta\rangle^2}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle} \equiv 4\langle\underbrace{\hat\alpha|\hat\beta}_{\text{wersory}}\rangle^2 \equiv 4\cos^2\underbrace{\sphericalangle(\alpha,\beta)}_{\equiv\,\Theta}$$

oraz

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \geq 1,$$ o ile $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$ (założenie).

W takim razie $0 \leq \overset{\mathbb{Z}}{\overbrace{n_1 \cdot n_2}} \leq 4$, czyli $n_1 \cdot n_2 \in \{0,1,2,3,4\}$.

Przy tym jeśli $n_1 \cdot n_2 = 0$, to $\cos\Theta = 0$, czyli $\alpha \perp \beta$, a jeśli $n_1 \cdot n_2 = 4$, to $\cos^2\Theta = 1$, czyli $\beta \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$.

Rozważymy pozostałe przypadki: $\int 77$

$(*)$ $n_1 \cdot n_2 = 1 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{4} \iff \theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$,

ale $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, więc $(n_1, n_2) \in \{(1,1), (-1,-1)\}$.

$(n_1, n_2) = (1,1) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle > 0$, zatem $\theta = \frac{\pi}{3}$

$(n_1, n_2) = (-1,-1) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle < 0$, zatem $\theta = \frac{2\pi}{3}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1} = 1$, czyli $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle$.

$(**)$ $n_1 \cdot n_2 = 2 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{2} \iff \theta \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$, ale

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ i $|n_2| \geq |n_1|$ (bo $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\beta|\beta\rangle$), zatem

$(n_1, n_2) \in \{(1,2), (-1,-2)\}$, [...] tzn

$(n_1, n_2) = (1,2) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle > 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$(n_1, n_2) = (-1,-2) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle < 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1} = 2 \Leftrightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle = 2\langle\beta|\beta\rangle$.

(***) Analogicznie jak w przypadku (**).

Corollarium: Niech $\alpha, \beta \in R$.

(i) $\measuredangle(\alpha,\beta) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ (rozwarty) $\Rightarrow \alpha+\beta \in R$

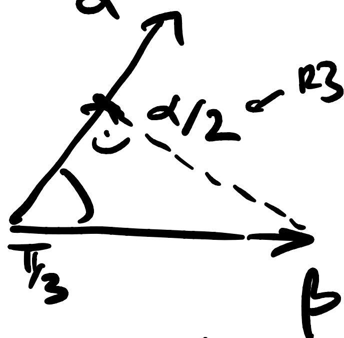
(ii) $\measuredangle(\alpha,\beta) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (ostry) $\Longrightarrow \alpha-\beta, \beta-\alpha \in R$.

DC: Rozważamy po kolei możliwości (1)-(4) ze str. 29, zakładając $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\beta|\beta\rangle$.

$\langle \alpha | \beta \rangle \neq 0 \implies$

179

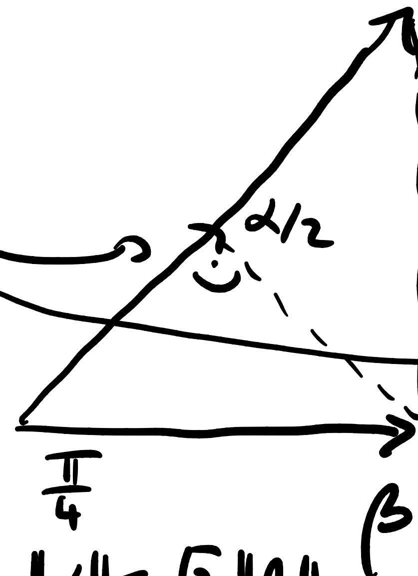
KĄT OSTRY



$\|\alpha\| = \|\beta\|$

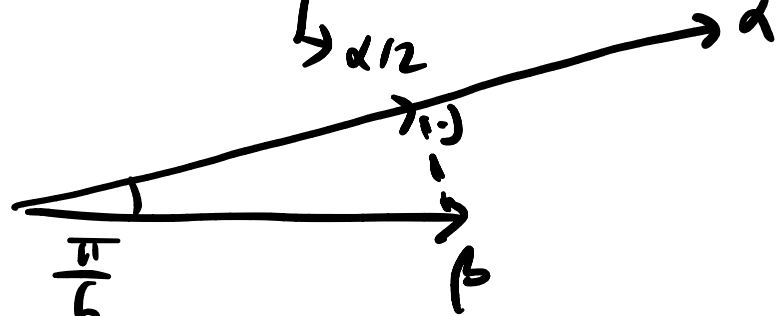
$\frac{\alpha}{2}$ ← RZUT β na α

$\vee$



$\|\alpha\| = \sqrt{2}\,\|\beta\|$

$\vee$



$\implies w_\alpha(\beta) = \beta - 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$

$\equiv \beta - \alpha \in R,$

a stąd także

$-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in R.$

Ponieważ $K(\alpha,\beta)$ rozwarty, jest $K(-\alpha,\beta)$ jest ostry i równy poprzednim warunkom, przeto (180)

$$P^{\langle\alpha\rangle^\perp}_{\langle\alpha\rangle}(\beta) = -\frac{\alpha}{2}, \text{ a stąd } w_\alpha(\beta) = \beta - 2\cdot\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha+\beta \in R.$$

$\square$

W wszystkich studiach systemów pierwiastkowych półprostych algebr Liego natrafiliśmy na obiekty „dualne", tj. kopierwiastki. Te wpisują w nasze obecne rozważania

<u>Stw. 30</u> Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym. Wówczas $(E,R^\vee)$, gdzie $R^\vee = \{\alpha^\vee = \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle}\triangleright\alpha \mid \alpha\in R\}$

takiże jest systemem pierwiastkowym, gdyż czym $W(E, R^\vee) = W(E, R)$ i $(R^\vee)^\vee = R$. System

181

ten określamy mianem DUALNEGO SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO, a jego elementy nazywamy KOPIERWIASTKAMI.

D: obliczamy $\langle \alpha^\vee | \alpha^\vee \rangle = 4 \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle^2} = \frac{4}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$,

zatem $(\alpha^\vee)^\vee \equiv \frac{2}{\langle \alpha^\vee | \alpha^\vee \rangle} \triangleright \alpha^\vee = \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{2} \cdot \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \triangleright \alpha = \alpha$.

Ponadto $A_{\alpha^\vee, \beta^\vee} \equiv 2 \frac{\langle \alpha^\vee | \beta^\vee \rangle}{\langle \alpha^\vee | \alpha^\vee \rangle} = \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{2} \cdot \langle \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \triangleright \alpha \,|\, \frac{2}{\langle \beta | \beta \rangle} \triangleright \beta \rangle$

$$= \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \equiv A_{\beta|\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

(182)

transpozycja w macierzy Cartana

Wobec $\alpha^\vee \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$ mamy też $w_{\alpha^\vee} \equiv w_\alpha$, a przy tym

$$w_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) \equiv w_\alpha\left(\frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright \beta\right) = \frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright w_\alpha(\beta)$$

$$= \frac{2}{\langle w_\alpha(\beta)|w_\alpha(\beta)\rangle} \triangleright w_\alpha(\beta) \equiv w_\alpha(\beta)^\vee,$$ co ma sens,

$w_\alpha \in O(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$

bo R jest zachowywana przez $W(E,R)$.

W takim razie $\forall\, w \in W(E, R^\vee) \equiv W(E,R)$:

$$w(R^\vee) \subset R^\vee .$$

Przy tym $\langle \alpha^\vee \mid \alpha^\vee \in R^\vee \rangle \equiv \langle \alpha \mid \alpha \in R \rangle = E$.

Wreszcie też jedyne krotności $\alpha^\vee$ to te, które pochodzą od krotności α, czyli

$$(\pm\alpha)^\vee = \pm\alpha^\vee . \qquad \square$$

N.B. $\forall\, \alpha, \beta \in R : \|\alpha\| = \|\beta\| \Rightarrow R^\vee \cong R$.

Izomorfizm taki może mieć miejsce nawet gdy warunek jednakiej długości pierwiastków nie jest spełniony (morfizmy nie muszą być izometriami).