Wykład XI

Kompleksyfikacje algebr Liego i ich reprezentacji

2020/21

Jest także

Stw. 24. Rzeczywiście zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : X \in \mathfrak{g}_\alpha \Rightarrow X^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

zatem $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Longleftrightarrow -\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$.

Ponadto $\langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}$.

D: Niech $H\otimes 1 \in \mathfrak{t}\otimes 1$ i $X \in \underset{X_1\otimes 1 + X_2\otimes i}{\mathfrak{g}}$, a wtedy

$$[H\otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^* = \left([H,X_1]_{\mathfrak{k}}\otimes 1 + [H,X_2]_{\mathfrak{k}}\otimes i\right)^*$$

$$= -[H,X_1]_{\mathfrak{k}}\otimes 1 + [H,X_2]_{\mathfrak{k}}\otimes i \equiv [H\otimes 1, X^*]_{\mathfrak{g}}.$$

Wobec anty-$\mathbb{C}$-liniowości $*$ i Str. 23.

mamy – dla $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ –

$$\underbrace{[H\otimes 1, X^*]_{\mathfrak{g}}}_{\overset{\shortparallel}{\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_H(X^*)}} = [H\otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^* = \big((\alpha|H)\triangleright X\big)^* = \overline{(\alpha|H)}\triangleright X^*$$

$$= -(\alpha|H)\triangleright X^*.$$

Stąd też dla $H = H_1\otimes 1 + H_2\otimes i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ i $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ zachodzi

$$[H, X^*]_{\mathfrak{g}} \doteq \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_H(X^*) = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}(X^*) + i\,\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}(X^*)$$

$$= -(\alpha|H_1)\triangleright X^* - i\cdot(\alpha|H_2)\triangleright X^*$$

$$= -(\alpha|H_1\otimes 1 + H_2\otimes i)\triangleright X^* \equiv (-\alpha|H)\triangleright X^*.$$

Niech teraz $H \in \mathfrak{h} \setminus \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}}$. Mamy (122)

$(\mathfrak{h}, (\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}})$ – niezdegenerowane (wszak $(\cdot|\cdot)$ ma tę

własność i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$), przeto

$\mathfrak{h} = \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$, czyli

$H \in \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$, tj. $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) : (\alpha|H)=0$,

ale wtedy $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\ \forall X\in\mathfrak{g}_\alpha : [H,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H)\triangleright X = 0$,

co w połączeniu z $\forall \tilde{H}\in\mathfrak{h} : [H,\tilde{H}]_{\mathfrak{g}} = 0$

i rozkładem $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$ daje $[H,\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} = 0$, czyli $H \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ↯ □

Mamy kluczowe

Tw. 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\ \exists\ (F_\alpha, H_\alpha, E_\alpha) \in (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha) \setminus \{0_\mathfrak{g}\} :$$

$$[H_\alpha, E_\alpha]_\mathfrak{g} = 2E_\alpha \qquad \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} = \langle E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha \rangle_\mathbb{C}$$

$$[H_\alpha, F_\alpha]_\mathfrak{g} = -2F_\alpha \qquad \wedge \qquad H_\alpha \in \langle \alpha \rangle_\mathbb{C} .$$

$$[E_\alpha, F_\alpha]_\mathfrak{g} = H_\alpha$$

Przy tym możemy wybrać $F_\alpha = E_\alpha^*$.

D: zacznijmy od

Lemat: $\forall (X,H,Y) \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha}$:

$$\left([Y,X]_{\mathfrak{g}} \,\middle|\, H \right) = (\alpha|H) \cdot (X|Y^*) .$$

Dowód Lematu: Korzystając ze Stw. 18., liczymy

$$\left([Y,X]_{\mathfrak{g}} \,\middle|\, H \right) \equiv \left(\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{Y}(X) \,\middle|\, H \right) = \left(X \,\middle|\, \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{Y^*}(H) \right)$$

$$= -\left(X \,\middle|\, \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{H}(Y^*) \right) ,$$ ale $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha}$

oznacza, że $Y^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ na mocy Stw. 24, przeto $\left([Y,X]_{\mathfrak{g}} \,\middle|\, H \right) = -\left(X \,\middle|\, (-\alpha|H) \cdot Y^* \right) = (\alpha|H) \cdot (X,Y^*)$. $\square$

Zastosujmy powyższy Lemat do pary (125)
$(Y, X \equiv Y^*) \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, a wówczas dostaniemy

$$\left([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \middle| H\right) = (\alpha|H) \cdot (Y^*|Y^*),$$ zatem

$$\forall H \in \mathfrak{h} : \begin{cases} H \perp \alpha & \Longrightarrow \quad [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \perp H \\ \underset{\neq 0}{H} \not\perp \alpha & \Longrightarrow \quad \left([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \middle| H\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \neq 0$$

Jest $\mathfrak{h} = \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp_{\mathfrak{h}}}$, widać więc, że $[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$.

Niechaj teraz $H = [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}$, a wtedy i $(\alpha | [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}) \neq 0$

$$\underbrace{([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} | [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}})}_{\neq 0} = (\alpha | [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}) \cdot \underbrace{(Y^* | Y^*)}_{\neq 0},$$

przeto $$(\alpha | [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}) = \frac{([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} | [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}})^{\in \mathbb{R}_{\geq 0}}}{(Y^* | Y^*)_{\in \mathbb{R}_{>0}}} > 0$$

Możemy zatem zdefiniować

- dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ i $N_{\alpha, Y} := \frac{(\alpha | [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}})}{2} \in \mathbb{R}$ –

$$E_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha, Y}}} \triangleright Y^{\in \mathfrak{g}_\alpha}; \quad F_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha, Y}}} \triangleright Y^{* \in \mathfrak{g}_{-\alpha}}; \quad H_\alpha := \frac{1}{N_{\alpha, Y}} \triangleright [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}},$$

a wtedy $(\alpha|H) = \frac{2}{(\alpha|H)} \Rightarrow (\alpha|H) = 2$

i stąd $[H_\alpha, E_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 2E_\alpha$, $[H_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = -2F_\alpha$

oraz $[E_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{N_{\alpha,Y}} [Y, Y^*] \equiv H_\alpha$,

zatem – w istocie – spełnione są relacje z tezy Twierdzenia. $\square$

NB. Zauważmy przy okazji, że z równości $(\alpha|H_\alpha) = 2$ w połączeniu z ustaloną przynależnością $H_\alpha \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, czyli $H_\alpha = h_\alpha \triangleright \alpha$, wynika $2 = (\alpha| h_\alpha \triangleright \alpha) = h_\alpha \cdot (\alpha|\alpha)$, Tj.

$$\boxed{H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha}$$

Def. 20 Niech $\alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t})$. Wówczas

$$H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha \in \mathfrak{t}$$

określamy mianem KOPIERWIASTKA stowarzyszonego z pierwiastkiem α.

Zajmiemy się obecnie reprezentacją podalgebry $sl(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} \subset \mathfrak{g}$ otrzymaną przez ograniczenie reprezentacji dołączonej ad.

Mamy kluczowe

<u>Tw. 6.</u> W dotychczasowym zapisie

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : (1)\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \left(\lambda \triangleright \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Rightarrow \lambda \in \{-1,1\} \right)$$

$$(2)\ \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1 .$$

D: W ramach przygotowań do dowodu (BO) tezy zasadniczej wygodnie będzie rozpatrzeć najpierw

Lemat: W powyższych oznaczeniach

$$|\lambda| > 1 \implies \lambda \in \{-2, 2\}.$$

Dowód Lematu: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_{\lambda \triangleright \alpha} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy $[H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} = (\lambda \triangleright \alpha | H_\alpha) \triangleright X = \overline{\lambda} \cdot (\alpha | H_\alpha) \triangleright X$

$$\equiv \overline{\lambda} \cdot \left(\alpha \middle| \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright X = 2\overline{\lambda} \triangleright X,$$

czyli $2\bar{\lambda} \in \operatorname{Sp} H_\alpha$. Tymczasem (13)

Tw. [ćwiczenie] W dowolnej ($\propto$ ∞-wym.) reprezentacji (V, ϱ) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ zachodzi

(i) $\operatorname{Sp} \varrho(H) \subset \mathbb{Z}$

(ii) $n \in \operatorname{Sp} \varrho(H) \Rightarrow \{-|n|, -|n|+2, -|n|+4, \ldots, |n|\} \subset \operatorname{Sp} \varrho(H)$.

zatem $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, czyli $\exists N \in \mathbb{Z} : \lambda = \frac{N}{2}$. Ale też dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ dostajemy

$$[H_{\lambda \triangleright \alpha}, Y] = (\alpha | H_{\lambda \triangleright \alpha}) \triangleright Y = \left(\alpha \middle| \frac{2\lambda}{\lambda^2 (\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright Y = \frac{2}{\alpha} \triangleright Y,$$

wzięto także $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{N} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, tj. 132

$N \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$, a skoro $|\lambda| > 1$,
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv \frac{|N|}{2}$

to w istocie $N \in \{-4, 4\}$, czyli $\lambda \in \{-2, 2\}$. $\square$

Wracamy do dowodu tezy pomocniczej...

Wykorzystując skończoność wymiaru $\mathfrak{g}$, konstatujemy istnienie najmniejszej (niezerowej) krotności α w $Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t})$ a następnie odnosimy do tego pierwiastka tego lematu, by wywnioskować, że (B3) jedyne skalarne krotności (tego minimalnego) α w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to $\pm\alpha$ i ewentualnie $\pm 2\alpha$.

Rozważmy następnie

$$\mathfrak{s}_\alpha := \langle E_\alpha, F_\alpha \overset{\text{wybór}}{\equiv} E_\alpha^*, H_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

i niech $V_\alpha := \langle H_\alpha \rangle \oplus \bigoplus_{\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}$

Łatwo przekonujemy się, że V_α jest podalgebrą Liego $\mathfrak{g}$. Istotnie, po pierwsze

$\forall\, \beta_1, \beta_2 \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}} : [\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\beta_1+\beta_2}$, (134)
$\beta_2 \neq -\beta_1$

ale $\beta_1+\beta_2 \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, a ponadto na mocy Lematu ze str. 123 $\exists\, \beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ wynika, że dowolny element $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{t}$ jest prostopadły do każdego elementu $\mathfrak{t}$ prostopadłego do β, czyli sam jest skalarną krotnością β, więc też α, zatem – koniec końców – H_α. Wreszcie też

$\forall X \in \mathfrak{g}_\beta : [H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} \in \langle X \rangle_{\mathbb{C}}$, co przeczy o słuszności naszej konkluzji.

Skoro jednak $V_\alpha \,(\supset \mathfrak{s}_\alpha)$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$, to $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(V_\alpha) \subset V_\alpha$. Jest też $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(\mathfrak{s}_\alpha) \subset \mathfrak{s}_\alpha$. Zważywszy, że $(E_\alpha^*, F_\alpha^*, H_\alpha^*) = (F_\alpha, E_\alpha, -H_\alpha)$ (wszak $H_\alpha = \overbrace{\frac{2}{(\alpha|\alpha)}}^{\in \mathbb{R}_{>0}} \triangleright \alpha$, $\alpha \in \mathrm{I} \otimes i$), czyli $\mathfrak{s}_\alpha^* \subset \mathfrak{s}_\alpha$, stwierdzamy w świetle str. 18, (36)

że w rozkładzie
$$V_\alpha = s_\alpha \oplus s_\alpha^\perp$$
jest $ad_{s_\alpha}(s_\alpha) \subset s_\alpha$ oraz $ad_{s_\alpha}(s_\alpha^\perp) \subset s_\alpha^\perp$,

gdyż $X \in s_\alpha^\perp$ implikuje
$$(ad_{s_\alpha}(X) | s_\alpha) = (X | ad_{s_\alpha}^*(s_\alpha)) \subset (X | ad_{s_\alpha}(s_\alpha))$$
$$\subset (X | s_\alpha) = 0.$$

Pierwiastki jednak $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$ są postaci $\beta \in \{\mp\alpha, \mp 2\cdot\alpha\}$, przeto

$$\mathrm{Sp}\left(\mathrm{ad}_{H_\alpha}\restriction_{V_\alpha}\right) \subset \{0, \mp(\alpha|H_\alpha), \mp 2(\alpha|H_\alpha)\}$$

$$\equiv \{0, \pm 2, \pm 4\} \subset 2\mathbb{Z} \; !$$

Załóżmy, że $\mathfrak{s}_\alpha^\perp \neq \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

$$\mathfrak{s}_\alpha^\perp \ni X \; : \; \mathrm{ad}_{H_\alpha}(X) = \lambda \cdot X, \quad \lambda \in \{0, \pm 2, \pm 4\},$$

więc jako przestrzeń $\mathfrak{s}_\alpha$-niezmiennicza, koniecznie wektor $\boxed{\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_\alpha}$ stowarzyszony z wartością własną 0. Jednakowoż jedynym takim wektorem jest $H_\alpha \in s_\alpha \perp s_\alpha^\perp$, zatem $s_\alpha^\perp = \{0_g\}$, to zaś oznacza, że $V_\alpha = s_\alpha$, skąd teza. $\square$

Przyjrzyjmy się teraz geometrii $Q(g;T_c)$ (w duchu Kleina). W tym celu wprowadźmy ...

Def. 21. Przyjmijmy dotychczasowy język. (139)
Z dowolnym pierwiastkiem $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ stowarzyszony endomorfizm

$$w_\alpha : \mathfrak{t} \circlearrowleft : H \longmapsto H - 2 \cdot \frac{(\alpha|H)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha .$$

GRUPA WEYLA $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to grupa wolna generowana przez w_α,

$$W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) := \langle w_\alpha \mid \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \rangle .$$

Zauważmy, że element $H \in \mathfrak{t}\otimes i$, zadaje – w świetle Stw. 23 (str. 119) i rzeczywistości $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{k}$ (str. 79) – relacja

$$w_\alpha(H) = \underset{\mathfrak{t}\otimes i}{H} - 2\,\underset{\in\mathbb{R}}{\frac{(\alpha|H)^{\in\mathbb{R}}}{(\alpha|\alpha)}} \triangleright \underset{\mathfrak{t}\otimes i}{\alpha} \in \mathfrak{t}\otimes i.$$

Jako endomorfizm $\mathfrak{t}\otimes i$ odwzorowanie to jest odbiciem w hiperpłaszczyźnie ortogonalnej do α, tj.

$$w_\alpha(H) = \begin{cases} H & \text{dla } H \perp \alpha \\ -H & \text{dla } H \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Odbicie to określamy mianem **ODBICIA WEYLA**. Rzecz jasna odbicie jest izometrią $(\cdot|\cdot)$, tj.:

$$W \subset O\left(\mathfrak{t}\otimes i, (\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{t}\otimes i \times \mathfrak{t}\otimes i}\right)$$

Bez trudu dowodzimy

Tw. 7 $\forall w \in W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : w(Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})) \subset Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$

D: Zdefiniujmy automorfizm $\mathfrak{g}$ (142)
wzorem (dla dowolnego $\alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$):

$$S_\alpha := \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha})$$

(z którego odczytujemy $S_\alpha^{-1} = \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha})$).

Dla dowolnego $H \in \mathfrak{h}$ o własności $H \perp \alpha$ zachodzi $[X_\alpha, H] = 0 = [Y_\alpha, H]$, a zatem także $[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_H] = 0 = [\mathrm{ad}_{Y_\alpha}, \mathrm{ad}_H]$, przeto – w tym przypadku –

$$S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1} = \mathrm{ad}_H .$$

W bezpośrednim rachunku (ćwiczenie!) sprawdzamy dalej, że

$$S_\alpha \circ \mathrm{ad}_{H_\alpha} \circ S_\alpha^{-1} = -\mathrm{ad}_{H_\alpha} ,$$ zatem w sumie

$$\forall H \in \mathfrak{h} : S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1} = \mathrm{ad}_{w_\alpha(H)} .$$

Wiedząc teraz $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$ i $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_\mathfrak{g}\}$, a wtedy

$$[H, S_\alpha^{-1}(X)]_{\mathfrak{g}} \equiv ad_H \circ S_\alpha^{-1}(X) = S_\alpha^{-1} \circ \left(S_\alpha \circ ad_H \circ S_\alpha^{-1}\right)(X)$$

$$= S_\alpha^{-1} \circ ad_{w_\alpha(H)}(X) \equiv S_\alpha^{-1}\Big(\big[\underset{\hat{\mathfrak{t}}}{w_\alpha(H)}, \underset{\mathfrak{g}_\beta}{X}\big]_{\mathfrak{g}}\Big)$$

$$= \big(\beta \,|\, w_\alpha(H)\big) \triangleright S_\alpha^{-1}(X) \equiv \Big(w_\alpha\big(w_\alpha^{-1}(\beta)\big) \,\Big|\, w_\alpha(H)\Big) \triangleright S_\alpha^{-1}(X)$$

Ale w_α jest $\mathbb{C}$-liniowe, zatem jest izometrią na całym $\mathfrak{t} = \mathfrak{T}^{\mathbb{C}}$, przeto $[H, S_\alpha^{-1}(X)] = \big(w_\alpha^{-1}(\beta) \,|\, H\big) \triangleright S_\alpha^{-1}(X)$, skąd wniosek, 145

je $w_\alpha^{-1}(\beta) = w_\alpha(\beta) \in Q(\mathfrak{g};T)$ jest pierwiastkiem o wektorze pierwiastkowym $S_\alpha^{-1}(X)$ $(\neq 0)$.
Skoro zaś generatory zachowują $Q(\mathfrak{g};T)$, to $W(\mathfrak{g};T)$ – także. $\square$

W istocie – wobec odwracalności w_α –

$$W(\mathfrak{g};T) \subset G_{Q(\mathfrak{g};T)},$$ co wprowadza

Stw. 25. $|W(\mathfrak{g};T)| < \infty$ (grupa skończona)

D: Wynika to wprost z $|Q(\mathfrak{g};T)| < \infty$ $(\Leftarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} < \infty)$. $\square$

Zanim poddamy dotychczasowe rozważania przydatnej abstrakcji, udowodnimy jeszcze

<u>Stw. 26.</u>

$$\forall \alpha,\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \equiv (\beta|H_\alpha) \in \mathbb{Z}.$$

Liczby $A_{\alpha,\beta} := 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$ nazywamy <u>LICZBAMI CARTANA</u>.

D: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_\mathfrak{g}\}$ (wektor pierwiastkowy), a wówczas
$$[H_\alpha, X]_\mathfrak{g} = (\beta | H_\alpha) \triangleright X,$$
zatem $A_{\alpha,\beta}$ jest wartością własną H_α w reprezentacji (dołączonej) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)}$ na $\mathfrak{g}$.

Teza jest teraz konsekwencją Tw. [dmigenia] (i) (str. 131). □

Powyższy wynik ma prostą geometryczną (148)
interpretację:

Rzut prostopadły $\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \cdot \alpha$ pierwiastka
β na $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ jest $\frac{\mathbb{Z}}{2}$-krotnością α.

$$\Updownarrow$$

$$W_\alpha(\beta) - \beta \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Podsumujemy obecnie dotychczasowe ustalenia dotyczące $Q(g;\mathfrak{k})$ ...

<u>Tw. 8.</u> $R \equiv Q(g;\mathfrak{k})$ to skończony podzbiór nieznikającej $\mathbb{R}$-liniowej przestrzeni kwadratowej $(E \equiv \mathfrak{k}\otimes i\,,\,(\cdot|\cdot)|_{E\times E})$ o własnościach

(1) $E = \langle R\rangle_{\mathbb{R}}$

(2) $\forall_{\alpha\in R}\,\forall_{\lambda\in\mathbb{R}} : (\lambda\triangleright\alpha\in R \Longrightarrow \lambda\in\{-1,1\})$

(3) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : W_\alpha(\beta)\in R$

(4) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : A_{\alpha,\beta}\in\mathbb{Z}$

Abstrakcja :

Def. 22. SYSTEM PIERWIASTKÓW

to para $((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R)$ złożona z:

- $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)\in \mathrm{Ob}\,\square\mathrm{Vect}^{<\infty}_{\mathbb{R}}$, niezerowymiarowa
- $R\subset E$ - podzbiór PIERWIASTKÓW

o własnościach: (SP1) $E=\langle R\rangle_{\mathbb{R}}$

(SP2) $\forall_{\alpha\in R}\,\forall_{\lambda\in\mathbb{R}}:\ (\lambda\triangleright\alpha\in R \Rightarrow \lambda\in\{-1,1\})$

(SP3) $\forall_{\alpha,\beta\in R}:\ W_\alpha(\beta):=\beta-2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\triangleright\alpha\in R$ ODBICIE WEYLA

(SP4) $\forall_{\alpha,\beta\in R}:\ A_{\alpha\beta}:=2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\in\mathbb{Z}$.

Przy tym $\dim_{\mathbb{R}}E$ nazywamy RZĘDEM SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO

Podgrupa skończona $W((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R) := \langle w_\alpha \mid \alpha\in R\rangle \subset O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle) \circlearrowleft G_R$ (151)

określony mianem GRUPY WEYLA SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO.

MORFIZM SYSTEMÓW PIERWIASTKOWYCH $((E_A,\langle\cdot|\cdot\rangle_A),R_A)$, $A\in\{1,2\}$

to $\chi\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1,E_2)$ o własności

(MSP1) $\chi(R_1)\subset R_2$

(MSP2) $\forall_{\alpha\in R_1} : \chi\circ\hat{w}^1_\alpha = \hat{w}^2_{\chi(\alpha)}\circ\chi$

dla rozszerzenia $\hat{w}^A_\alpha$ odbicia Weyla do E_A.

System pierwiastkowy nazywamy PRZYWIEDLNYM, ilekroć (152)

$$\exists\, E_1, E_2 \subset E : \left(E \simeq E_1 \oplus E_2 \ \wedge\ \forall \alpha \in R : \ \alpha \in E_1 \ \underline{\vee}\ \alpha \in E_2 \right)$$

$E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0$

W przeciwnym razie mówimy o NIEPRZYWIEDLNYM SYSTEMIE PIERWIASTKOWYM.

X

W dalszej części będziemy analizować anatomię systemów pierwiastkowych. Przedtem jednak zbadamy dokładnie relację między algebrami podprostymi i prostymi: