Wykłady X

Uogólnienia algebr Liego
i ich reprezentacje

2020/21

Str. 19. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$.
Niech $(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ będzie jak w Str. 18.
Jeśli $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ jest ideałem, to także $\mathfrak{h}^{\perp}$ jest ideałem i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^{\perp}$ jako algebra Liego.

D: Bycie ideałem oznacza, że

$$ad^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h},$$

w szczególności więc $ad^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}) \equiv ad^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{k}\otimes 1}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$.

W dowolnym jednak razie

$$\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}^{\perp}) \,\middle|\, \mathfrak{h}\right) = -\left(\mathfrak{h}^{\perp} \,\middle|\, \underbrace{\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})}_{\subset\,\mathfrak{h}}\right) = 0,$$

czyli $\mathfrak{h}^{\perp}$ jest $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$-niezmiennicze,

a zatem także $\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}} + i\cdot \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$ -niezmiennicze.

Jako przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$, a ponieważ

$\Rightarrow \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$

zarówno $\mathfrak{r}$, jak i $\mathfrak{r}^{\perp}$ są ideałami w $\mathfrak{g}$, zatem $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}^{\perp}] \subset \mathfrak{r}\cap\mathfrak{r}^{\perp} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$, co oznacza właśnie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}\oplus\mathfrak{r}^{\perp}$ jako algebra Liego. □

Relacje między algebrami redukcyjnymi i półprostymi przyjrzyjmy się ...

Str. 20. Niech $\mathfrak{g}$ będzie reduktywną (89)
zespoloną algebrą Liego o centrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.
Wówczas istnieje półprosta algebra Liego
$\delta\mathfrak{g}$ o własności $\mathfrak{g} \simeq \delta\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (jako algebry Liego).
D: Jako że $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, przeto także $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$ (wzgl. struktury hermitowskiej i/w) jest ideałem w $\mathfrak{g}$
na mocy str. 19, a przy tym $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Pokażemy, że $\delta\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$ jest półprosta. (90)

Oczywiście $\mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) = 0$, albowiem

$\forall Z \in \mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) : Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (wobec $[Z, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0$, a $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$)

czyli $Z \in \delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Pozostaje wykazać zwartość formy zabijającej algebry Liego $\delta\mathfrak{g}$.

W tym celu zauważamy, że $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$\Longleftrightarrow Z \in \ker \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{g})} \Longleftrightarrow Z \in \ker \mathrm{ad}^{c}_{K}$, a zatem

$Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \iff Z^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. (91)

Istotnie $Z = X \otimes 1 + Y \otimes i \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$$\iff \forall u \in \mathfrak{k} : \ 0 = \mathrm{ad}_u^{\mathbb{C}}(X \otimes 1 + Y \otimes i)$$

$$= \mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i$$

$$\iff \forall u \in \mathfrak{k} : \ \mathrm{ad}_u(X) = 0 = \mathrm{ad}_u(Y)$$

$$\iff \mathrm{ad}_u^{\mathbb{C}}(Z^*) \equiv \mathrm{ad}_u^{\mathbb{C}}(-X \otimes 1 + Y \otimes i) =$$

$$\equiv -\mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i = 0.$$

Ponieważ zaś $*$ jest inwolucją, przeto także $\delta\mathfrak{g}^* = \delta\mathfrak{g}$, to pociąga implikuje

$$\delta\mathfrak{g} = (\delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k})^{\mathbb{C}}$$

elementy rzeczywiste

podobnie pole $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k})^{\mathbb{C}}$.

Wystarczy zatem okazać, że $\delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}$ jest algebrą Liego zwartej grupy Liego. Niech K będzie zwartą grupą Liego o algebrze

Liego $\mathfrak{k} \equiv \mathrm{Lie}\,K$. Otrzymujemy

$$\delta K := T_e \mathrm{Ad}(K) \subset GL(\mathfrak{k}).$$

Jako ciągły obraz grupy zwartej δK jest zwarta, zatem domknięta. Na mocy Tw. Cartana 2-3-4-7.2 jest ona podgrupą Liego grupy Liego $GL(\mathfrak{k})$, więc w szczególności – grupą Liego.

Mouy pattern

$$
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[rrr, "T_e Ad"] \arrow[dr, two heads, "T_e Ad^*"'] & & & GL(k) \\
 & & \delta K \arrow[urr] & & \\
 & & \delta g \cap k \arrow[u, "\exp^{\delta K}"'] \arrow[r] \arrow[drr] & 0 & \\
 z(g) \cap k \arrow[r] & k \arrow[uuu, "\exp^K"] \arrow[ur, two heads, "ad^*"] \arrow[rrr, "ad"'] & & & gl(k) \arrow[uuu, "\exp^{GL(k)}"'] \\
 0 \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}
$$

give $\delta g \cap k \simeq k / z(g) \cap k$

bez pojedynczy wniosek

$$\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \equiv \mathrm{Lie}\,\delta K$$

δK – zwarte. $\square$

Przechodząc do dyskusji algebr półprostych, zauważmy

<u>Tw. 3.</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego. Istnieją podalgebry $\{\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{g}\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N<\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ będące prostymi algebrami Liego

i jedyny rozkład prosty (96)

$$\mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i \quad (\text{jako algebry Liego}).$$

Podalgebry $\mathfrak{h}$ są określone jednoznacznie z dokładnością do permutacji.

D: Ponieważ $\mathfrak{g}$ ma nietrywialny ideał $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ rozkłada się jako algebra Liego na sumę prostą $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ na mocy str. 19, przy czym $\mathfrak{h}^{\perp}$ także jest ideałem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{k}$ zawiera nietrywialny ideał $\mathfrak{k}' \subsetneq \mathfrak{k}$ (w $\mathfrak{k}$!), to oczywiście $[\mathfrak{k}^{\perp}, \mathfrak{k}']_{\mathfrak{g}} = \underset{\mathfrak{k}'}{\underset{\wedge}{0}}$ oraz $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}']_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{k}'$, przeto $\mathfrak{k}'$ jest też ideałem w $\mathfrak{g}$. W takim razie

$$\mathfrak{k}'' := (\mathfrak{k}')^{\perp} \cap \mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{g}$$

jest ideałem w $\mathfrak{g}$ i otrzymujemy – ponownie na mocy str. 19 –

$$\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{k}'') \oplus \mathfrak{k}^{\perp}.$$

Po skończonej liczbie kroków uzyskujemy tym sposobem rozkład prosty algebry Liego $\mathfrak{k}$ na sumę prostą algebr nieposiadających nietrywialnych ideałów, a następnie ten sam algorytm stosujemy do ideału $\mathfrak{k}^\perp$, otrzymując ostatecznie rozkład prosty $\mathfrak{g}$ na sumę prostą

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i$$

takiej algebry. Pozostaje pokazać, że każdy z ideałów ma wymiar liniowy co najmniej 2.

<u>Ad a.</u> Niech $\mathfrak{g}_i$ będzie jednym z ideałów i załóżmy, że $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_i = 1$. Wówczas $\mathfrak{g}_i$ jest komutatywna, a zatem $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (wobec $\forall j \in \overline{1,N} \setminus \{i\} : [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_i]_{\mathfrak{g}} = 0$). Ale $\mathfrak{g}$ półprosta, zatem $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. $\lightning$

Niechaj teraz $\bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)} \cong \mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_2} \mathfrak{g}_i^{(2)}$

będą dwoma takimi rozkładami.

Każda podalgebra $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$,

a zatem podreprezentacją reprezentacji $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.

Jako taka $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest nieprzywiedlna,

bo w p.p. zawierałaby podprzestrzeń!,

która byłaby $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ - niezmienniczą, a zatem

w szczególności $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i^{(A)}}$ - niezmienniczą, czyli - nietrywialnym ideałem w $\mathfrak{g}_i^{(A)}$, w sprzeczności z prostotą $\mathfrak{g}_i^{(A)}$. Przy tym

$$i \neq j \Longrightarrow \left(\mathfrak{g}_i^{(A)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right) \not\cong \left(\mathfrak{g}_j^{(A)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right),$$

bo $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ działa na $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ nietrywialnie (wszak $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest niekomutatywna), a na $\mathfrak{g}_j^{(A)}$ — trywialnie ($\Leftarrow \mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_A} \mathfrak{g}_i^{(A)}$ jako algebra Liego)

Rozważmy teraz ideał $\mathfrak{g}_i^{(2)} \subset \mathfrak{g}$. Jako że rzut kanoniczny $pr_j : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_j^{(1)}$

jest splataczem między $ad_{\mathfrak{g}}$ i $ad_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_j^{(1)}}$

(wszak $\mathfrak{g}_j^{(1)}$ jest ideałem), zatem

$\pi_{j;i} = pr_j\restriction_{\mathfrak{g}_i^{(2)}}$ jest albo 0, albo $\cong$ na mocy

I Lematu Schura (Tw. 2.1°). Skoro jednak

$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)}$, to istnieje $j \in \overline{1,N_1}$: $\pi_{j;i}$ jest $\cong$.

Wtedy też jednak $\pi_{k\neq j;i} = 0$, bo reprezentacje

$$(\mathfrak{g}^{(1)}_k, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}^{(1)}_k}) \not\simeq (\mathfrak{g}^{(1)}_j, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}^{(1)}_j}) \quad \text{dla } k \neq j.$$

Jest zatem $\mathfrak{g}^{(2)}_i = \mathfrak{g}^{(1)}_j$ (równość, a nie tylko $\simeq$!).

$\square$

Uzyskawszy nietrywialny wgląd w „anatomię" półprostych algebr Liego, przejdziemy obecnie do ich analizy pod kątem klasyfikacji ich reprezentacji. W tym celu wyróżnimy

w $\mathfrak{g}$ (półprostej) elementy (współ-) 105
diagonalizowalne w każdej reprezentacji,
więc w szczególności – w reprezentacji
dołączonej $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.

Def. 17. PODALGEBRA CARTANA

(półprostej) algebry Liego $\mathfrak{g}$ (nad $\mathbb{C}$) to podprzestrzeń (zespolona) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o własnościach:

(C1) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ (KOMUTATYWNOŚĆ)

(C2) $\forall X \in \mathfrak{g} : \left([\mathfrak{h}, X]_{\mathfrak{g}} = 0 \Rightarrow X \in \mathfrak{h} \right)$ (MAKSYMALNOŚĆ)

(C3) $\forall H \in \mathfrak{h} :$ ad_H jest diagonalizowalny (WSPÓŁDIAGONALIZOWALNOŚĆ).

mamy współrzędne

<u>Tw. 4</u> [O istnieniu podalgebry Cartana]

Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ będzie (dowolną) maksymalną podalgebrą komutatywną. Wówczas podalgebra

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$$

jest podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$. W szczególności podalgebra Cartana istnieje.

D: Rozważmy dowolną 1-wym. podprzestrzeń $\mathfrak{k}_0 \subset K$ ($\neq K$, bo $z(K)=0$). To jest podalgebra komutatywna. Niech teraz $S_{\mathfrak{k}_0}$ będzie zbiorem podalgebr komutatywnych w K zawierających $\mathfrak{k}_0$. Wówczas maksymalny element tego zbioru, $\mathfrak{k} := \bigcup_{s \in S_{\mathfrak{k}_0}} s \subset K$ jest przykładem maksymalnej podalgebry komutatywnej.

Niech teraz $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ dla $\mathfrak{t}$ j.w.

Wówczas $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ i musimy pokazać, że jest maksymalna.

Niech $X \in \mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ spełnia $[X,\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$

$\equiv X_1 \otimes 1 + X_2 \otimes i$, a wtedy także

$[X, \mathfrak{t} \otimes 1]_{\mathfrak{g}} = 0$, więc $[X_1, \mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}} = 0 = [X_2, \mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}}$!

ponieważ jednak $\mathfrak{t}$ maksymalna, przeto nieodzownie $X_1, X_2 \in \mathfrak{t}$, czyli $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}$.

Jeśli teraz $(\cdot|\cdot)$ jest formą hermitowską, (110)
o której mowa w Str. 18, to

$$\forall H \in \mathfrak{t} \left(\subset \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \right) : \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H} \text{ jest ściśle}$$

hermitowski, więc też diagonalizowalny, a ponieważ dla dowolnych dwóch $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}$ zachodzi

$$\left[\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2} \right]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{[H_1, H_2]_{\mathfrak{t}}} = 0,$$

przeto operatory $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}$ i $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}$ są <u>współ</u>-diagonalizowalne. W takim przypadku wobec tego dowolny element

$$H = H_1 \otimes 1 + H_2 \otimes i \quad \text{ma} \quad \mathrm{ad}_H \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1} + i \triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}$$

diagonalizowalny i – znów –

$$\forall H, \tilde{H} \in \mathfrak{t} : [\mathrm{ad}_H, \mathrm{ad}_{\tilde{H}}]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}_{[H,\tilde{H}]_{\mathfrak{g}}} = 0,$$

więc $\{\mathrm{ad}_H\}_{H \in \mathfrak{t}}$ są współdiagonalizowalne.

<u>NB</u>: Dowodzi się, że dowolne dwie □
podalgebry Cartana są izomorficzne,
przy czym izomorfizm taki rozszerza się
do automorfizmu $\mathfrak{g}$.

To uprawomocnia

Def. 18. RZĄD półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$ to wymiar jej (dowolnej) podalgebry Cartana.

W dalszej części wykładu zbadamy rozkład $\mathfrak{g}$ na podprzestrzenie własne $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ ...

Wobec $\mathbb{C}$-liniowego charakteru odwzorowania $\mathrm{ad}_\cdot : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ zależność wartości własnej operatora ad_H, $H \in \mathfrak{h}$ od H jest $\mathbb{C}$-liniowa. Ma zatem sens

Przyjmijmy dotychczasowe założ.

<u>Def. 19</u> Jeżeli istnieje niezerowy wektor $X \in \mathfrak{g}$ o własności

$$\mathrm{ad}_H(X) = \alpha(H) \triangleright X, \quad H \in \mathfrak{h},$$

funkcjonał $\mathbb{C}$-liniowy $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ określony mianem <u>PIERWIASTKA</u> $\mathfrak{g}$ dla $\mathfrak{h}$.

Istnienie niezwyrodniałej formy hermitowskiej na $\mathfrak{g}$, o której mowa w str. 18, wyznacza izomorfizm $\mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$, który pozwala równoważnie zdefiniować pierwiastek jako taki $\alpha \in \mathfrak{h} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, dla którego istnieje $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ o własności

$$\forall H \in \mathfrak{h} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X .$$

Zbiór wszystkich pierwiastków będziemy oznaczać symbolem $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$. ||

Dla dowolnego pierwiastka $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$ (115)

określony PRZESTRZEŃ PIERWIASTKOWA

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{h} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \}.$$

Dowolny jej element $X \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ nazywany WEKTOREM PIERWIASTKOWYM α.

Ozn.: Ogólniej ogranicamy – dla dowolnego $\alpha \in \mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{h} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \},$$

przy czym $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{h}$ oraz $\alpha \notin Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \Rightarrow \mathfrak{g}_\alpha = 0$.

Mamy oczywiście (116)

Przyjmujemy teraz definicję.

Str. 21. Dowolna półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ o podalgebrze Cartana $\mathfrak{h}$ ma jako przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa rozkład

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Przyjrzyjmy się fikcji przyjętej pierwotnie ...

<u>Str. 22.</u> Przypomnijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha, \beta \in T : \quad [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} .$$

W szczególności, jeżeli $\alpha+\beta \notin Q(\mathfrak{g}; T)$,

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_{\mathfrak{g}} = 0 .$$

<u>D</u>: Tożsamość Jacobiego może być zinterpretowana jako stwierdzenie:

$\forall X \in \mathfrak{g}$: ad_X jest różniczkowaniem

iloczynu

algebry $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$,

$$\mathrm{ad}_X([Y,Z]_{\mathfrak{g}}) = [\mathrm{ad}_X(Y), Z]_{\mathfrak{g}} + [Y, \mathrm{ad}_X(Z)]_{\mathfrak{g}} .$$

W szczególności $\forall (X,Y) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_H([X,Y]_{\mathfrak{g}}) &= [\mathrm{ad}_H(X), Y]_{\mathfrak{g}} + [X, \mathrm{ad}_H(Y)]_{\mathfrak{g}} \\
&= [(\alpha|H) \triangleright X, Y]_{\mathfrak{g}} + [X, (\beta|H) \triangleright Y]_{\mathfrak{g}} \\
&= (\alpha+\beta|H) \triangleright [X,Y]_{\mathfrak{g}} \quad . \qquad \square
\end{aligned}$$

Mamy dalej

Str. 23. Przyjmijmy dotychczasową notację:

$$Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{t}\otimes i .$$

D: Jako że ad_H, $H\in\mathfrak{t}$ jest skośnie hermitowski, przeto $\mathrm{Sp}\,\mathrm{ad}_H \subset i\mathbb{R} \,(\subset \mathbb{C})$, ale to oznacza, że $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}):\ (\alpha|H)\in i\mathbb{R}$.

Niech $\alpha = \alpha_1\otimes 1 + \alpha_2\otimes i$, $\alpha_1,\alpha_2\in F$, a wtedy – w świetle str. 18. –

$$\underbrace{(\alpha|H)}_{\in i\mathbb{R}} = \underbrace{(\alpha_1|H)}_{\in\mathbb{R}} - i\cdot\underbrace{(\alpha_2|H)}_{\in\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha_1 = 0 .$$

□