TEORIA GRUP II

WYKŁAD I

GRUPY i ALGEBRY LIEGO

– ALEŻ SKĄD ?!

Γ OGÓLNIKI

POZNANIE FIZYCZNE / MATEMATYCZNE :

MUSIMY USTALIĆ :

OBIEKTY
OBDARZONE
STRUKTURĄ ,

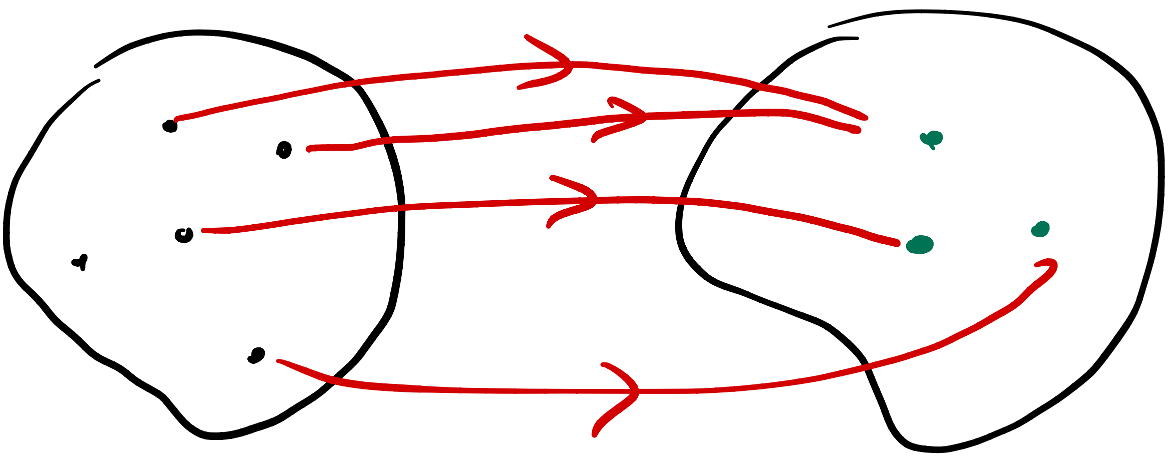
np. PUNKTY ,
FERMIONY ,
ATOMY , GWIAZDY

i

RELACJE
MIĘDZY NIMI
TRANSPORTUJĄCE
STRUKTURĘ

OKREŚLA
„ROZDZIELCZOŚĆ"
NASZYCH ROZWAŻAŃ

WIELE ROZWAŻAŃ PROWADZIMY W KATEGORII **Set** : ZBIORY (ew. z dod. struktury) i ODWZOROWANIA



POŚRÓD RELACJI WYRÓŻNIAMY TE WEWNĘTRZNE, $R \subset X \times X$

A DALEJ TE, KTÓRE ③

- ZACHOWUJĄ „STRUKTURĘ" / INFO LOKALNĄ,
  (JAKĄŚ)

np.

(⇑ W TYM PRZYP)

- ZACHOWUJĄ „STRUKTURĘ"/INFO GLOBALNĄ

$$|f(X)| = |X|$$

, albo lepiej

$$\exists f^{-1}$$

- ZACHOWUJĄ „STRUKTURĘ"/INFO MIĘDZY-LOK., O ILE TA ISTNIEJE . . .

TAK OKREŚLONE AUTORELACJE (4)

TO **SYMETRIE** (W NAJOG. MOŻLIWYM ZNACZENIU)

$\mathcal{S}_X \subset \mathrm{Hom}(X,X)$

OBSERWACJE:

$\rightarrow \ id_X \in \mathcal{S}_X$

$\rightarrow \ f, g \in \mathcal{S}_X \Rightarrow f \circ g \in \mathcal{S}$

$\rightarrow \ f \in \mathcal{S}_X \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{S}$

WŁASNOŚCI $\bullet$; id_X CZYNIĄ Z $\left(\mathcal{S}_X, \circ, (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto id_X\right)$

GRUPĘ (SYMETRII)

E.g. 1 DLA X - ZBIÓR ZE STRUKTURĄ GLOBALNĄ $|X|$ (5)

MAMY $\mathcal{S} \equiv G_X = \{ \sigma \in \mathrm{Map}(X,X) \mid \exists\, \sigma^{-1} \}$

GRUPA SYMETRYCZNA X

USTALIWSZY (DOW.) MODEL $\mu : X_0 \xrightarrow{\cong} X$,

OTRZYMUJEMY PREZENTACJĘ WSPÓŁRZĘDNIOWĄ

$$\mu^{-1} \circ \sigma \circ \mu \in G_{X_0}$$

$$\underline{\leftarrow} : \sigma_\mu \quad , \text{np. } |X| = N < \infty$$

$$G_{\overline{1,N}} \cong G_X$$

POJĘCIE SYMETRII MOŻEMY TEŻ WYNIEŚĆ NA WYŻSZY POZIOM: **DUALNOŚĆ**

$$\exists\, \delta : X_1 \xrightarrow{\simeq} X_2 \iff X_1 \underset{\text{DUAL}}{\sim} X_2$$

POPRZEZ PREZENTACJE WSP. ...

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, shift left, "\mu_1^{-1}"] \arrow[rr, bend left=40, "\delta"] & X_0 \arrow[l, shift left, "\mu_1"] \arrow[r, shift left, "\mu_2"] & X_2 \arrow[l, shift left, "\mu_2^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

INTERPRETACJA **CZYNNA**:

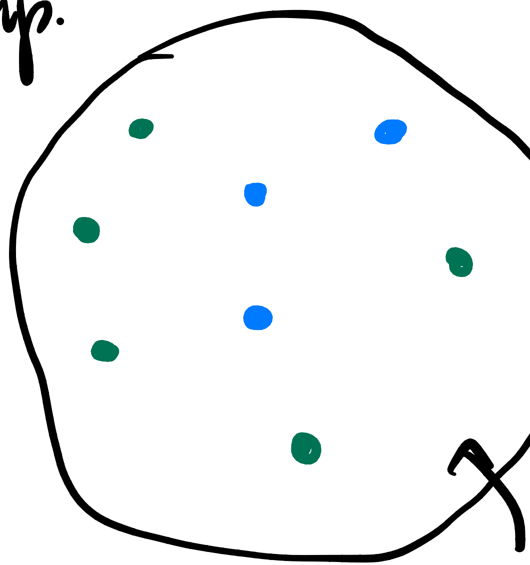
$\delta : X_1 \simeq X_2$ **DUALNOŚĆ**

INTERPRETACJA **BIERNA**:

$$\mu_1^{-1} \circ (\mu_1 \circ \mu_2^{-1} \circ \delta) \circ \mu_1 = \mu_2^{-1} \circ \delta \circ \mu_1$$

TRANSFORMACJA WSPÓŁRZĘDNYCH

WPROWADZENIE STRUKTURY ZNAJDUJE ODZWIERCIEDLENIE W REDUKCJI GRUPY SYMETRII (TZ. GRUPA SYMETRII „KODUJE" STRUKTURĘ), NP.



X

$$G_X$$
$$\cup$$
$$G_{\bullet} \times G_{\bullet} \ni \sigma$$

WARUNEK: $\boxed{g \circ \sigma \overset{!}{=} g}$

STRUKTURA LOKALNA (RELACYJNA)

$\bullet$ ALBO $\bullet$

$g(\bullet) = 0$, $g(\bullet) = 1$

ALE MOŻEMY TEŻ WPROWADZIĆ STRUKTURĘ MIĘDZY-LOKALNĄ

$$d_c({\color{green}\bullet},{\color{green}\bullet}) = 0 = d_c({\color{blue}\bullet},{\color{blue}\bullet})$$

$$d_c({\color{green}\bullet},{\color{blue}\bullet}) = 1 = d_c({\color{blue}\bullet},{\color{green}\bullet})$$

I ZAŻĄDAĆ <u>TYLKO</u>

$$\boxed{d_c\circ(\sigma\times\sigma) \overset{!}{=} d_c},$$

A WTEDY — O ILE $|\#{\color{green}\bullet}| = |\#{\color{blue}\bullet}|$ **!** —

MAMY $\mathcal{S} = \langle G_{\color{green}\bullet} \times G_{\color{blue}\bullet}, \tau_{{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}} \rangle$ DOW. BIJEKCJA $\{{\color{green}\bullet}\} \leftrightarrow \{{\color{blue}\bullet}\}$

WNIOSEK: TEN WYBÓR NIESIE INFORMACJĘ **GLOBALNĄ** !

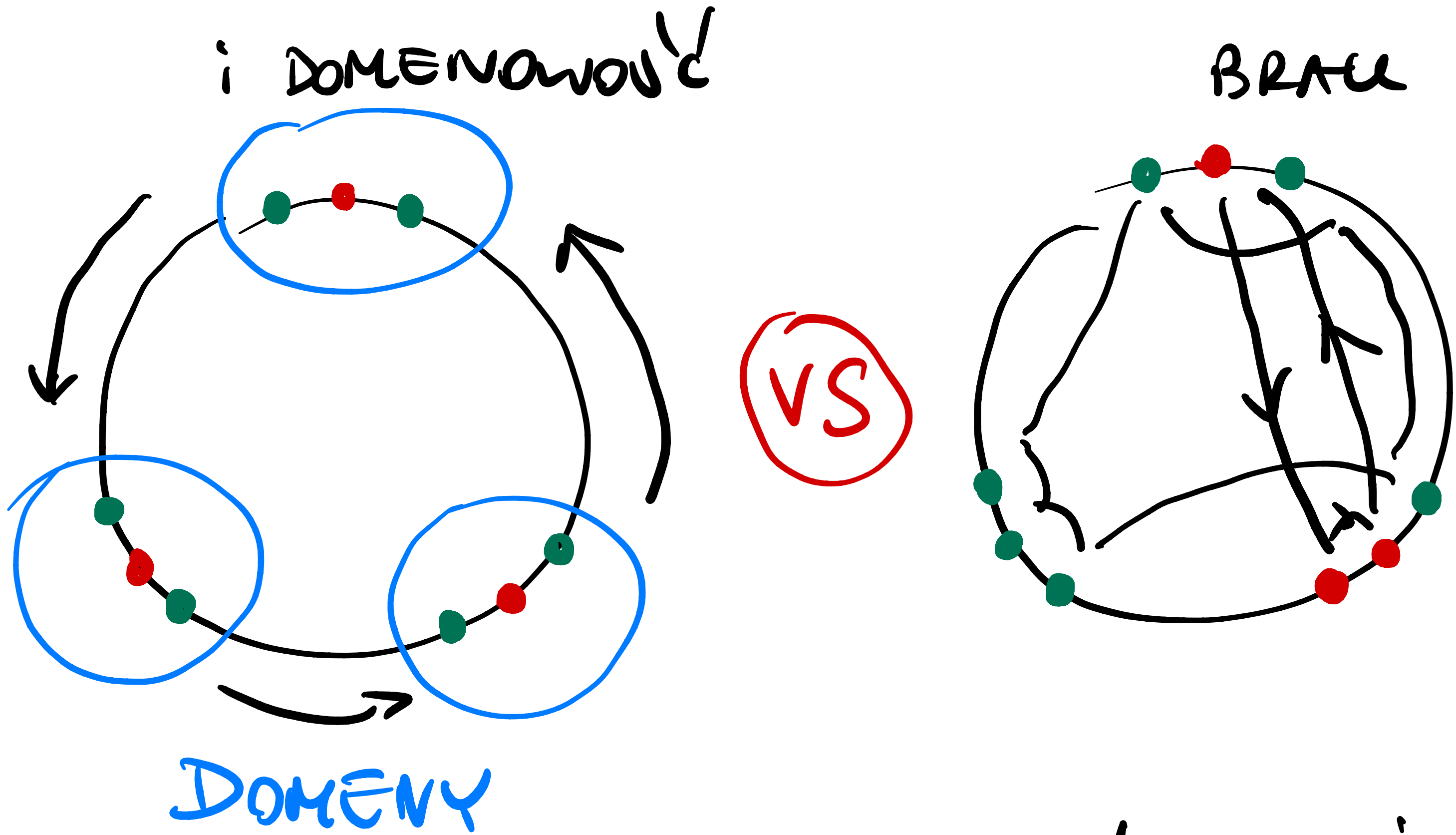
IDĄC W KIERUNKU „ZWYCZAJOWYCH" i FIZYCZNYCH! INTERPRETACJI SYMETRII . . .

- SYMETRIA ~ ESTETYKA REGULARNOŚCI i PRAGMATYKA :

OBSERWACJE PROWADZIMY ZAZWYCZAJ „DOMENOWO" => INTERESUJE NAS / NASZ MÓZG ← ZALEŻNOŚĆ OBSERWACJI OD WYBORU DOMENY

↳ TRYWIALNA => MAMY „SYMETRIĘ" W ZADANEJ SKALI (DOMENY)

ZACHOWANIE KOLORU



JEŚLI DOMENY SĄ <u>ARENAMI</u> ZJAWISK, TO TAKA DOMENOWOŚĆ SYMETRII IMPLIKUJE NIEZMIENNICZOŚĆ PRAW!

FORMALIZACJA: NA DOTYCHCZASOWE ROZWIĄZANIA NAKŁADAMY **WIĘZY** METRYKALNE / TOPOLOGICZNE (11)

DLA METRYKI $d_X : X \times X \to [0, \infty[$

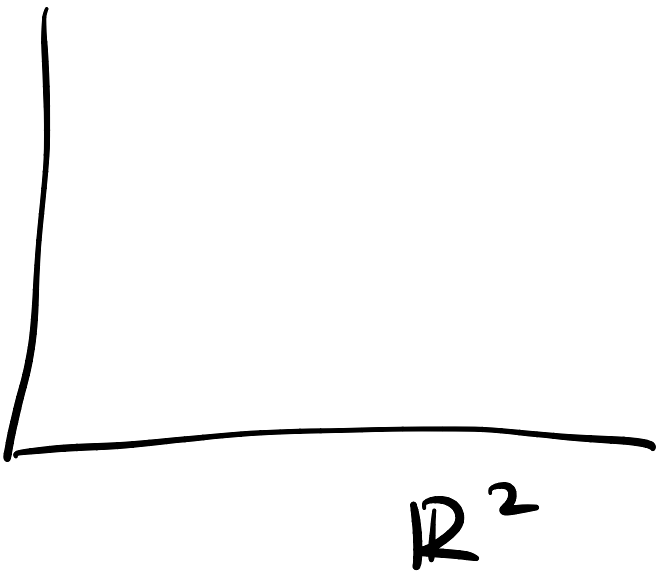
MOŻEMY NARZUCIĆ SZTYWNY WARUNEK $d_X \circ (\sigma \times \sigma) \overset{!}{=} d_X$

IZOMETRII

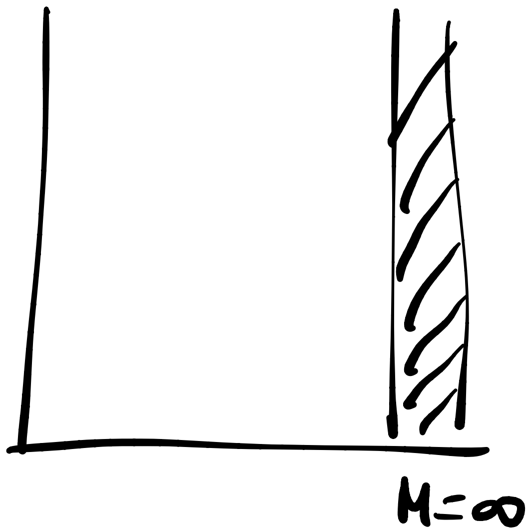
W KATEGORII TOPOLOGICZNEJ (BARDZIEJ) NATURALNY JEST WARUNEK CIĄGŁOŚCI

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : d_X(x,y) < \delta \implies d_X(\sigma(x), \sigma(y)) < \varepsilon$$

CIĄGŁOŚĆ SYMETRII POZWALA NA DOMENOWE OBSERWACJE, ALE...



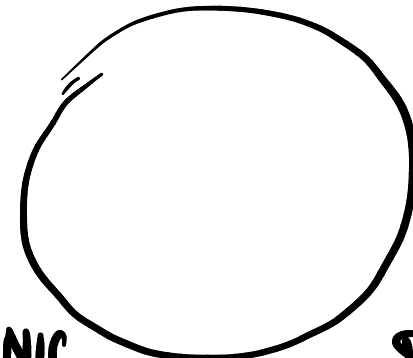
VS



WAŻNA JEST TEŻ STRUKTURA GLOBALNA!

NIERZADKO SAMA GRUPA SYMETRII PODDAJE SIĘ NATURALNEJ TOPOLOGIZACJI,

NP.

$SO(2) \simeq$  $\mathbb{S}^1$

OBROTY W $\mathbb{R}^2$

id_X - NIE ROBI NIC

$\uparrow$ $\Rightarrow$ OTOCZENIE ROBI NIEWIELE...

A WTEDY NATURALNIE JEST OGRANICZYĆ ROZWAŻANIA DO

$$\lambda : \mathcal{G} \times X \longrightarrow X$$

CIĄGŁYCH (WZGL. TOPOLOGII PRODUKTOWEJ!)

DZIAŁAŃ

W TEJ SYTUACJI

$$\lambda : \mathcal{S} \times X \longrightarrow X : (\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$$

SPEŁNIA

$$\hat{\lambda} : \mathcal{S} \longrightarrow G_X : \sigma \mapsto \lambda_\sigma = \sigma(\cdot)$$

JEST HOMO GRUP, tj.

$$\hat{\lambda}_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = \hat{\lambda}_{\sigma_1} \circ \hat{\lambda}_{\sigma_2} \quad \text{(TRYWIALNE)}$$

TO JEST AKSJOMAT DZIAŁANIA

ODNOSZĄC POWYŻSZE DO SAMEJ GRUPY $\mathcal{S}$ JAKO $\mathcal{S}$-ZBIORU UZGL.

$$m : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$(\sigma, \tilde{\sigma}) \longmapsto \sigma \circ \tilde{\sigma}$$

DOCHODZIMY DO (NAT.) WARUNKU

m – CIĄGŁE!, KTÓRY UZUPEŁNIAMY

o $\mathrm{Inv} : \mathcal{S} \circlearrowleft : \sigma \longmapsto \sigma^{-1}$ CIĄGŁE!

OTRZYMUJEMY GRUPĘ TOPOLOGICZNĄ!

WYNIK: LĄDUJEMY W TOP

16

ZANIM PÓJDZIEMY W KIERUNKU AKSJOMATYKI I STUDIUM WŁASNOŚCI TAKICH I PODOBNYCH GRUP, ZATRZYMAMY SIĘ NAD ICH EMANACJAMI I FIZYKALNYMI ZASTOSOWANIAMI

- - -

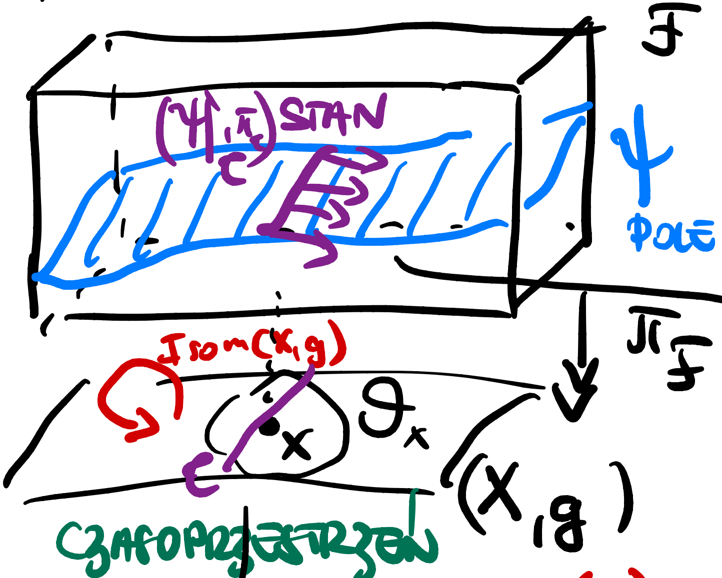
II SYMETRIE (CIĄGŁE) W FIZYCE

(*) CZYM JEST X ?

(**) JAKIE SĄ NATURALNE $\mathcal{S}$?

AŻEBY TO USTALIĆ, MUSIMY ZDEFINIOWAĆ PARADYGMAT, W KTÓRY WPISZEMY „FIZYKĘ" ...

PARADYGMAT gLFT



(X, g)

$\mathrm{Aut}(F)$ (WEWN.)

F - STOPNIE SWOBODY POLA, skalary np. wektory spinory

Θ_x

KLASYCZNE: $\delta S[\psi_*] = 0$

S FUNKCJONAŁ DZIAŁANIA

$$\int_{(X,g)} \mathrm{vol}(X,g)\, \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$$

$$\cap$$

$$S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\hbar\mathbb{Z}$$

$$\left(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \{\cdot,\cdot\}_{PB}\right)$$

PRZESTRZEŃ STANÓW

$\{\cdot,\cdot\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot]$

$$\Big(\mathcal{P}_{\mathcal{F}},\ \overbrace{\{\cdot\,,\cdot\}_{P.B.}}^{\text{nawias Liego}}\Big) \overset{g}{\underset{\text{ART}}{\rightsquigarrow}} \Big(\mathcal{H}_{F},\ \overset{\text{KOMUTATOR}}{\underbrace{[\cdot\,,\cdot]}_{\text{nawias Liego}}}\Big)$$

NAWIAS POISSONA

$|\psi\rangle$ PRZESTRZEŃ HILBERTA TEORII

TRANSFORMACJE KANONICZNE

Operatory Unitarne i Antyunitarne

POMIARY $\in \mathbb{R}$

$$\Big|\langle\psi'|\,\hat{O}\,|\psi\rangle\Big|^2$$

SAMOSPRZĘŻONE

IDEA OGÓLNA / SUROWA :

$$X = \{ \text{STANY TEORII } (\psi|_\Sigma, \pi) \}$$

$$\mathcal{P}_F \qquad \gamma \in G_{\Gamma(F)}$$

$$\mathcal{G} = \{ \gamma|_{\mathcal{P}_F} \in G_{\mathcal{P}_F} \mid \text{"}\gamma \text{ ZACHOWUJE DYNAMIKĘ"} \}$$

$\cup$ ZE SKŁADANIEM

$id_{\mathcal{P}_F}$

$\Rightarrow$ GRUPA SYMETRII TEORII

MUSIMY DOPRECYZOWAĆ...

(i) OBRAZEK LAGRANŻOWSKI :

E.g. $$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(q,\dot q)$$

$q : \mathcal{P}_{aram} \to (M, g)$

TRAJEKTORIE KLASYCZNE :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad (E-L)$$

ROZWAŻAMY

$$(q,\dot q) \xmapsto[s\in]-\varepsilon,\varepsilon[]{\gamma_s \in Map(M,M)} \left(\gamma_s(q), \frac{\partial\gamma_s}{\partial q}(q)\,\dot q\right)$$

INDUK.!

1-PARAMETROWE GRUPY SYMETRII

$\boxed{\text{NIEZMIENNICZOŚĆ DZIAŁANIA}}$:

$$L\left(\gamma_s(q), \frac{\partial\gamma_s}{\partial q}(q)\,\dot q\right) = L(q,\dot q)$$

DOWOLNA! $\rightsquigarrow + \frac{d}{dt}F_s(q,\dot q,t)$

$\Rightarrow$ POPRAWKI BRZEGOWE DO S
(KLASYCZNIE ~ BEZ ZNACZENIA!)
$\Downarrow$
TE SAME (E–L) W NOWYCH ZMIENNYCH

$$g_s(t) := \gamma_s \cdot g(t)$$

KONSEKWENCJE RÓŻNICZKOWALNEJ ZALEŻNOŚCI SYMETRII OD PARAMETRU s:

$\rightarrow$ γ_s INDUKUJE ODWZOROWANIE $\mathcal{P}_{\mathcal{J}} \circlearrowleft$
(WSZAK ZACHOWUJE S $\rightarrow$ $g_* \mapsto \gamma_s \cdot g_*$)

$\rightarrow$ POJAWIAJĄ SIĘ CAŁKI RUCHU ŁADUNKI
$\equiv$ WIELKOŚCI ZACHOWANE

Ozn. : $\Phi(s,t) := \gamma_s \circ g(t)$ (23)

Liczymy – na trajektorii klasycznej

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(L(\Phi,\dot\Phi) - \frac{d}{dt}F_s\right) = \frac{\partial}{\partial s} L(g,\dot g) = 0$$

! zachowane na trajektorii

$$\llcorner\!=\ \frac{\partial L}{\partial g}\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s\,\partial t} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_s}{\partial s}$$

$$\underset{(E-L)}{=} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot g}\right)^{\bullet}\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s\,\partial t} - \left(\frac{\partial F_s}{\partial s}\right)^{\bullet}$$

ładunek Noether

$$= \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot g}\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial F_s}{\partial s}\right)}_{=:\,Q} \iff \boxed{\frac{d}{dt}Q = 0}$$

OGÓLNIE:

SYMETRIE GLOBALNE

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}} \equiv \{ \gamma \in \mathrm{Aut}(F) \mid \gamma^{*} S = S \ (\mathrm{mod}\ 2\pi\hbar\mathbb{Z}) \}$$

1-PARAMETROWE PODGRUPY

INDUKUJĄ ŁADUNKI NOETHEROWSKIE

(ii) OBRAZEK HAMILTONOWSKI

PRZESTRZEŃ STANÓW $\mathcal{P}_F \ni (\phi|_C, \pi)$

ROZWAŻAMY F-CJE GŁADKIE NA NIEJ („OBSERWABLE") A NA NICH

HAMILTONIAN H ($\equiv p\dot{q} - L$ W PRZYP. REG.)

$$\{\cdot,\cdot\}_{P.B.} : C^\infty(\mathcal{P}_F, \mathbb{R})^{\times 2} \longrightarrow C^\infty(\mathcal{P}_F, \mathbb{R})$$

$$(f,g) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

NAWIAS POISSONA

NATURALNOŚĆ:

$$\frac{dq}{dt} = \{H, q\}_{P.B.}^{\,!} \quad \frac{dp}{dt} = \{H, p\}_{P.B.} \qquad (H)$$

1 OGÓLNIE

$$\frac{d}{dt} f(q,p) = \{H, f\}_{P.B.}$$

WŁASNOŚCI : ALGEBRA LIEGO !!!

(1) $\forall f,g \in C^\infty$: $\{g,f\} = -\{f,g\}$

~~ANTYSYMETRIA~~

(2) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $f,g,h \in C^\infty$: $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f,h\} + \mu\{g,h\}$

R-LINIOWOŚĆ

(3) $\forall f,g,h \in C^\infty$: $\{f, g\cdot h\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$

LEIBNIZ

(4) $\forall f,g,h \in C^\infty$: $\mathrm{Jac}(f,g,h) = 0$

JACOBI

SYMETRIE ~ ŁADUNKI :

$$\dot{Q} = 0 \iff \{H, Q\}_{P.B.} = 0$$

tj. ŁADUNKI SYMETRII W INWOLUCJI Z HAMILTONIANEM

$$\Downarrow$$

$\forall Q_1, Q_2$ - ŁADUNKI : $\{Q_1, Q_2\}_{P.B.}$ - ŁADUNEK,

bo $\{H, \{Q_1, Q_2\}\} \underset{Jac}{=} -\{Q_2, \overbrace{\{H, Q_1\}}^{0}\} + \{Q_1, \overbrace{\{H, Q_2\}}^{0}\}$

<u>WNIOSEK</u>: ŁADUNKI ROZPINAJĄ POD-ALGEBRĘ (LEGO) W C^∞

TYM RAZEM ŁADUNKI „POCHODZĄ" (28)

Z WIĘKSZEJ GRUPY ...

ZAPISZMY $\{f, g\}_{P.P.} = \Pi(df, dg)$

Π – biwektor Poissona, niezwyrodniały!

$\Downarrow$

MAMY $\Omega := \Pi^{-1} \in \Omega^2(\mathcal{P}_F)$

Jac $\iff$ $d\Omega = 0$

ORAZ $Q \longmapsto V_Q \in \mathfrak{X}(\mathcal{P}_F)$:

$$V_Q \lrcorner\, \Omega = -dQ$$

POLE HAMILTONOWSKIE

$\Downarrow$

$$\mathcal{L}_{V_Q} \Omega = 0$$

JEGO POTOKI ZACHOWUJĄ Ω,

$$\Phi_{V_Q}(t, \cdot)^* \Omega = \Omega$$

WNIOSEK: SYMETRIE GENERUJĄ 1-PARAMETROWE PODGRUPY W GRUPIE SYMPLEKTOMORFIZMÓW (P_γ, Ω)

(PRAWIDŁOWY
OGÓLNA)

TRAFO KAN. $\sim$ SYMETRIE SKALOWANE

(iii) OBRAZEK KWANTOWY (KAN.)

KWANTOWANIE KANONICZNE

$$\left(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \{\cdot,\cdot\}_{P.B.}\right) \longmapsto \left(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]\right)$$

$C^\infty(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \mathbb{R})$ OPERATORY SAMOSPRZĘŻONE

$$f \longmapsto \hat{f}$$

(NIE DBAMY O DZIEDZINY!)

$$[\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar\, \widehat{\{f,g\}_{P.B.}}$$

$$\text{const} \longmapsto \text{const}\, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

(+ EKWIWARIANTNOŚĆ)

OBRAZEK HEISENBERGA:

(32)

$$\frac{d}{dt}\hat{f} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{f}]$$

(R-NIE HEISENBERGA)

WŁASNOŚCI KOMUTATORA

ALGEBRA LIEGO!

(1) $[B, A] = -[A, B]$

(2) $[\lambda A + \mu B, C] = \lambda[A, C] + \mu[B, C]$

(3) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

(4) $\mathrm{Jac}(A, B, C) = 0$

ZNOWU WIĘC SYMETRIE ~
ŁADUNKI DANE PRZEZ

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$$

$$\Downarrow$$

W INWOLUCJI $\Rightarrow$ POD-ALGEBRA
CIEGO!

(TO SAMO W OBRAZIE SCHRÖDINGERA
BO: $A_H(t) = e^{\frac{it}{\hbar}\hat{H}} A_S e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}$)

OBECNOŚĆ $\hat{Q}$ NARZUCA (OBSERWOWALNE) WPŁYW NA DYNAMIKĘ

$\Downarrow$

REGUŁY WYBORU, np. ELEKTRON W ATOMIE H (ZANIEDBUJEMY SPIN)

$\Leftrightarrow$ ZACHOWANY MOMENT PĘDU,

$$[\hat{H}, \hat{\vec{J}}] = 0$$

$\Downarrow$

gł. liczba kwantowa

całk. moment pędu

$$0 = \langle n', l', m' | [\hat{H}, \hat{J}_z] | n, l, m \rangle$$

rzut na z

$$= (m - m') \langle n', l', m' | \hat{H} | n, l, m \rangle$$

<u>Wniosek:</u> $\hat{H}$ ma $\neq 0$ elementy macierzowe tylko między stanami o $\underline{m' = m}$ ⊥

ŁADUNKI SYMETRII GENERUJĄ 1-PARAMETROWE PODGRUPY

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) : \hat{Q} \longmapsto e^{it\hat{Q}} = U_{\hat{Q}}$$

ZACHOWUJĄCE AMPLITUDY PRZEJŚCIA

$$\langle U_{\hat{Q}} \psi_1 | U_{\hat{Q}} \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

$\Rightarrow$ PRAWDOPODOBIEŃSTWA, ale ...

TE ZACHOWYWANE TAKŻE PRZEZ OPERATORY ANTY-UNITARNE:

$$
\begin{cases}
\Theta(\lambda \psi_1 + \mu \psi_2) = \bar{\lambda}\, \Theta(\psi_1) + \bar{\mu}\, \Theta(\psi_2) \\
\langle \Theta \psi_1 | \Theta \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle
\end{cases}
$$

in $\overset{S}{\rightsquigarrow}$ out,

czyli związek z T odwrócenia czasu!

INNE ZASTOSOWANIA I UOGÓLNIENIA STRUKTUR (37)
LIE-GRUPOWYCH I -ALGEBRAICZNYCH W FIZYCE:

-> KLASYFIKACJA TYPÓW CZĄSTEK ELEM.
WG TEORII REPR. $ISO(\mathbb{R}^{3,1})$ [Wigner]

-> CECHOWANIE SYMETRII GLOBALNYCH
(WIĄZKI GRUP I GRUPOIDÓW NAD (X, g))
ORAZ ICH TORSORÓW

-> PROLONGACJE TYCHŻE W MODELOWANIU
FERMIONÓW ↘ wydłuż KCDG

→ SUPER-SYMETRIA
(supergrupy i superalgebry Liego)

→ MECHANIKA PĘTLI / TEORIA STRUN
(grupy i algebry pętlowe, algebry prętowe, grupy, algebry Hopfa, kwantowe, kategorie ...)

... algebry obwiedniowe, algebroidy etc.

III PRZEDMIOT WYKŁADU:

Def^{n} 1. GRUPA LIEGO TO CZWÓRKA

$(G, m, Inv, \cdot \mapsto e)$ ZŁOŻONA Z

(1) G - ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWALNEJ KLASY C^{∞}

(2) $m : G \times G \to G$ GŁADKIEGO MNOŻENIA

(3) $Inv : G \to G$ (——— ODWROTNOŚCI)

(4) $e \in G$ - ELEMENTU NEUTRALNEGO

SPEŁNIAJĄCYCH AKSJOMATY GRUPY.

PRZYKŁADY :

(1) $V \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}^{(<\infty)}_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Wówczas : V – GRUPA LIEGO z $m = +_V$, $\mathrm{Inv} = P_V$

$$GL(V;\mathbb{K}) \; - \; \text{———}$$

$$\equiv \{ X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid \exists\, X^{-1} \}$$

(2) $SL(n;\mathbb{K}) = \{ A \in GL(n;\mathbb{K}) \mid \det A = 1 \}$

(3) $O(n;\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n;\mathbb{R}) \mid A^{T}A = 1 \}$

(4) $SO(n;\mathbb{K}) = O(n;\mathbb{K}) \cap SL(n;\mathbb{K})$

(5) $U(n) = \{ A \in Gl(n;\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = 1 \}$

(6) $SU(n) = U(n) \cap SL(n;\mathbb{C})$

(7) $Sp(n;\mathbb{K}) = \{ A \in SL(2n;\mathbb{K}) \mid A^T J_n A = J_n \}$

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

etc.

(8) $ISO(3,1) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(3,1)$ 42

$$SO(3,1) = \left\{ A \in GL(m+n;\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} A^T I_{m,n} A = I_{m,n} \\ \det A = 1 \end{array} \right\}$$

$$I_{m,n} = \begin{pmatrix} I_m & \\ & -I_n \end{pmatrix}$$

43

Def$^{\underline{n}}$ 2. Niech G – grupa

Lieg. rozmaitość i dyfeom.

G to PARA (M, λ)

ZŁOŻONA Z

→ M – ROZMAITOŚĆ C^∞

→ $\lambda : G \times M \longrightarrow M$
GŁADKIE

$\lambda : G \to \mathrm{Diff}(M)$
HOMEO

PRZYKŁAD:

(1) (G, m) JEST ROZMAITOŚCIĄ Z DZIAŁANIEM G

(2) S^2 — " — Z DZIAŁANIEM $SO(3)$

(3) $Mink(3,1)$ — " — — " — $ISO(3,1)$