ALGEBROIDY LIEGO (I COURANTA) SĄ WŚRÓD NAS

(NOTATKI DO ĆWICZEŃ DO WYKŁADU Z GEOMETRII RÓŻNICZKOWEJ 2024/25)

[22∫]

W DYSKUSJI WŁASNOŚCI OPERACJI RÓŻNICZKOWANIA JEDNORODNEGO ZADANEJ PRZEZ FORMUŁĘ CARTANA ISTOTNĄ ROLĘ ODEGRAŁA **UOGÓLNIONA REGUŁA LEIBNIZA**

$$\forall\, V,W \in \Gamma(TM)\ \forall\, f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) :$$

PIERŚCIEŃ

WYRAŻA STRUKTURALNĄ RELACJĘ POMIĘDZY NAWIASEM LIEGO $[\cdot,\cdot]_{TM}$ I STRUKTURĄ MODUŁU NAD PIERŚCIENIEM NA GRUPIE PRZEMIENNEJ $\Gamma(TM)$

$$[V, f \triangleright W]_{TM} = f \triangleright [V,W]_{TM} + D_V f \triangleright W\,,$$

DZIAŁANIE (PUNKTOWE NAD M)

WYPROWADZONA WPROST Z DEFINICJI KOMUTATORA PÓL WEKTOROWYCH $[\cdot,\cdot]_{\Gamma(TM)}$. W JEJ ZAPISIE D_V JEST RÓŻNICZKOWANIEM $\mathbb{R}$-ALGEBRY $C^\infty(M,\mathbb{R})$ ZADAWANYM PRZEZ V : $D_V f = V \lrcorner\, df$.

ANALIZA „TYPÓW" (W SENSIE MATEMATYCZNYM) W POWYŻSZEJ SYTUACJI PROWADZI DO NASTĘPUJĄCEJ IDENTYFIKACJI:

* TM - WIĄZKA WEKTOROWA NAD M

** $D_\cdot : \Gamma(TM) \longrightarrow \mathrm{Der}\, C^\infty(M, \mathbb{R})$ REALIZACJA CIĘĆ WIĄZKI NA $\mathbb{R}$-ALGEBRZE PRZEZ JEJ RÓŻNICZKOWANIA

*** $[\cdot,\cdot]_{TM}$ - NAWIAS LIEGO NA CIĘCIACH

DOKONAMY ABSTRAKCJI ZAOBSERWOWANEJ STRUKTURY RÓŻNICZKOWO-GEOMETRYCZNEJ, WYKORZYSTUJĄC NATURALNĄ REALIZACJĘ $D_\cdot$.

DEF.: **ALGEBROID LIEGO** (rzędu r nad M) TO TRÓJKA

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^{\times r} \hookrightarrow E \\ \pi_E \big\downarrow \\ M \end{array} \quad ; \quad [\cdot,\cdot]_E : \Gamma(E)\times\Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(E) \quad ; \quad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha_E"] \arrow[d, "\pi_E"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & TM \arrow[d, "\pi_{TM}"] \\ M \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_M"'] & M \end{tikzcd}$$

DIAGRAM PRZEMIENNY

ZŁOŻONA Z

WIĄZKI WEKTOROWEJ NAD M RZĘDU r (TJ. WYMIAR $\mathbb{R}$-LINIOWY WŁÓKNA $= r$) ;

NAWIASU LIEGO NA $\mathbb{R}$-ALGEBRZE CIĘĆ GLOBALNYCH (TJ. GŁADKICH PRAWOSTRONNYCH ODWROTNOŚCI SURJEKTYWNEJ SUBMERSJI π_E) ;

KOTWICY $\equiv$ MORFIZMU WIĄZEK WEKTOROWYCH (TJ. GŁADKIEGO ODWZOROWANIA PRZEPROWADZAJĄCEGO WŁÓKNA LINIOWO WE WŁÓKNA)

SPEŁNIAJĄCA **REGUŁĘ LEIBNIZA**: $\forall\, X,Y\in\Gamma(E),\ f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$:

$$\boxed{[X, f\triangleright Y]_E = f\triangleright[X,Y]_E + D^{(E)}_X f\triangleright Y}$$

DLA $\boxed{D^{(E)}_X = D_{\alpha_E\circ X}}$

WYJAŚNIENIE: PRZEMIENNOŚĆ DIAGRAMU DLA α_E GWARANTUJE, ŻE

$$\forall\, X \in \Gamma(E) : \quad \alpha_E \circ X \in \Gamma(TM).$$

ISTOTNIE,
$$\pi_{TM} \circ (\alpha_E \circ X) = (\pi_{TM} \circ \alpha_E) \circ X = (id_M \circ \pi_E) \circ X$$
$$= \pi_E \circ X = id_M$$

X JEST CIĘCIEM E

TO INDUKOWANE PRZEZ α_E PRZYPORZĄDKOWANIE $\Gamma(E) \to \Gamma(TM)$ ZWYKLE OZNACZAMY SYMBOLEM

$$\alpha_{E*} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(TM), \quad X \longmapsto \alpha_E \circ X.$$

STW. α_{E*} JEST HOMOMORFIZMEM ALGEBR LIEGO,

$$\alpha_{E*} : \left(\Gamma(E), [\cdot,\cdot]_E\right) \longrightarrow \left(\Gamma(TM), [\cdot,\cdot]_{TM}\right).$$

D: WYKORZYSTUJĄC REGUŁĘ LEIBNIZA (L) i TOŻSAMOŚĆ JACOBIEGO (J) DLA NAWIASU LIEGO $[\cdot,\cdot]_E$, LICZYMY

– DLA DOWOLNYCH $X, Y, Z \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$:

$$[[X,Y]_E, f \triangleright Z]_E \overset{(L)}{=} f \triangleright [[X,Y]_E, Z]_E + D^{(E)}_{[X,Y]_E} f \triangleright Z$$

$$\overset{(J)}{=}$$

$$[[X, f\triangleright Z]_E, Y]_E - [[Y, f\triangleright Z]_E, X]_E$$

$$\overset{(L)}{=}$$

$$[f\triangleright [X,Z]_E + D^{(E)}_X f \triangleright Z, Y]_E - [f \triangleright [Y,Z]_E + D^{(E)}_Y f \triangleright Z, X]_E = *$$

$$* \overset{(L)}{=} f \triangleright [[X,Z]_E, Y]_E - D^{(E)}_Y f \triangleright [X,Z]_E + D^{(E)}_X f \triangleright [Z,Y]_E - (D^{(E)}_Y \circ D^{(E)}_X) f \triangleright Z$$

$$- f \triangleright [[Y,Z]_E, X]_E + D^{(E)}_X f \triangleright [Y,Z]_E - D^{(E)}_Y f \triangleright [Z,X]_E + (D^{(E)}_X \circ D^{(E)}_Y) f \triangleright Z$$

$$= f \triangleright [[X,Z]_E, Y]_E - f \triangleright [[Y,Z]_E, X]_E + \underset{\text{KOMUTATOR RÓŻNICZKOWAŃ}}{[D^{(E)}_X, D^{(E)}_Y]} f \triangleright Z$$

PO UWZGLĘDNIENIU (J) DLA $[\cdot,\cdot]_E$ RAZ JESZCZE OTRZYMUJEMY TOŻSAMOŚĆ

$$\forall_{\substack{X,Y,Z \in \Gamma(E) \\ f \in C^\infty(M,\mathbb{R})}} : \left(D^{(E)}_{[X,Y]_E} - [D^{(E)}_X, D^{(E)}_Y] \right) f \triangleright Z = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall_{X,Y \in \Gamma(E)} : D^{(E)}_{[X,Y]_E} - [D^{(E)}_X, D^{(E)}_Y] = 0.$$

WIEMY WSZAKŻE, IŻ

$$D_\cdot : (\Gamma(TM), [\cdot,\cdot]_{TM}) \longrightarrow (Der(C^\infty(M,\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])) \quad (D)$$

JEST IZOMORFIZMEM ALGEBR LIEGO (PATRZ: WYKŁAD), PRZETO POWYŻSZE DAJE NAM OCZEKIWANY REZULTAT:

$$\forall X,Y \in \Gamma(E): \quad \begin{aligned} 0 &= (D_\cdot \circ \alpha_{E*})([X,Y]_E) - [(D_\cdot \circ \alpha_{E*})(X), (D_\cdot \circ \alpha_{E*})(Y)] \\ &= D_\cdot\big(\alpha_{E*}([X,Y]_E) - [\alpha_{E*}(X), \alpha_{E*}(Y)]_{TM}\big) \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall X,Y \in \Gamma(E): \quad \alpha_{E*}([X,Y]_E) = [\alpha_{E*}(X), \alpha_{E*}(Y)]_{TM} . \quad \square$$

PRZYKŁADY:

1° ALGEBROID STYCZNY nad M (MOTYWACYJNY)

$$\begin{tikzcd} E=TM \arrow[r, "\alpha_{TM}=id_{TM}"] \arrow[d, "\pi_E=\pi_{TM}"'] & TM \arrow[d, "\pi_{TM}"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd} \quad , \quad [\cdot,\cdot]_E \equiv [\cdot,\cdot]_{TM}$$

$$\Gamma(E) \equiv \Gamma(TM)$$

2° ALGEBROID (PRE)SYMPLEKTYCZNY nad $(M, \omega \in \Omega^2(M) \cap \operatorname{Ker} d)$

$d\omega = 0$

$$\begin{tikzcd} E=TM\times\mathbb{R} \arrow[r, "\alpha_E=pr_1"] \arrow[d, "\pi_E=\pi_{TM}\circ pr_1"'] & TM \arrow[d, "\pi_{TM}"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd} \quad ,$$

$$[\cdot,\cdot]_E : \Gamma(E)\times\Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

$$|||$$

$$[\![\cdot,\cdot]\!]^{\omega}_{Vin} : ((V_1,f_1),(V_2,f_2)) \longmapsto ([V_1,V_2]_{TM}, D_{V_1}f_2 - D_{V_2}f_1 - V_2 \lrcorner V_1 \lrcorner \omega)$$

NAWIAS VINOGRADOVA ZWICHROWANY PRZEZ ω

$$\Gamma(E) = \left\{ (V,f) : \begin{array}{l} M \to TM\times\mathbb{R} \\ m \mapsto (V(m), f(m)) \end{array} \;\middle|\; id_M = \pi_E\circ(V,f) \equiv \pi_{TM}\circ V \right\} \equiv \Gamma(TM)\times C^\infty(M,\mathbb{R})$$

SPRAWDZENIE SENSOWNOŚCI DEFINICJI $[\![\cdot,\cdot]\!]^{\omega}_{\mathrm{Vin}}$:

(J): $\forall\, (X,f),(Y,g),(Z,h)\in\Gamma(E)$:

$$[\![\, [\![(X,f),(Y,g)]\!]^{\omega}_{\mathrm{Vin}},(Z,h)]\!]^{\omega}_{\mathrm{Vin}} + \text{cykl.} \equiv \mathrm{Jac}_E\big((X,f),(Y,g),(Z,h)\big)$$

$$= [\![\big([X,Y]_{TM}, D_X g - D_Y f - \omega(X,Y)\big),(Z,h)]\!]^{\omega}_{\mathrm{Vin}} + \text{cykl.}$$

$$= \Big([[X,Y]_{TM},Z]_{TM},\ D_{[X,Y]_{TM}}h - D_Z\big(D_X g - D_Y f - \omega(X,Y)\big) - \omega\big([X,Y]_{TM},Z\big)\Big) + \underline{\underline{\text{cykl.}}}$$

$$= \Big(\mathrm{Jac}_{TM}(X,Y,Z),\ \big(D_{[X,Y]_{TM}} - [D_X,D_Y]\big)h + \big(D_{[Z,X]_{TM}} - [D_Z,D_X]\big)g$$
$$+ \big(D_{[Y,Z]_{TM}} - [D_Y,D_Z]\big)f + \big(D_Z\big(\omega(X,Y)\big) - \omega\big([X,Y]_{TM},Z\big) + \text{cykl.}\big)\Big)$$

PRZYWOŁAWSZY FORMUŁĘ CARTANA (na d) ORAZ STWIERDZENIE (D) ZE STR. 7., WNIOSKUJEMY:

$$\mathrm{Jac}_E((X,f),(Y,g),(Z,h)) = \left(\mathrm{Jac}_{TM}(X,Y,Z),\, d\omega(X,Y,Z)\right) = 0. \blacksquare$$

(L): $\forall (X,f),(Y,g)\in\Gamma(E),\ h\in C^\infty(M,\mathbb{R})$

STRUKTURA $C^\infty(M,\mathbb{R})$-MODUŁU $\left(h \triangleright (X,f) \equiv (h\triangleright X, h\cdot f)\right)$

$$[\![(X,f), h\triangleright(Y,g)]\!]^\omega_{Vir} \equiv [\![(X,f),(h\triangleright Y, h\cdot g)]\!]^\omega_{Vir}$$

$$\equiv \left([X,h\triangleright Y]_{TM},\, D_X(h\cdot g) - D_{h\triangleright Y} f - \omega(X,h\triangleright Y)\right)$$

$$= \left(h\triangleright[X,Y]_{TM} + D_X h\triangleright Y,\, D_X h\cdot g + h\cdot D_X g - h\cdot D_Y f - h\cdot\omega(X,Y)\right) = *$$

(L) DLA ALGEBROIDU STYCZNEGO i DLA $\mathrm{Der}\, C^\infty(M,\mathbb{R})$ ORAZ $C^\infty(M,\mathbb{R})$-LINIOWOŚĆ D i ω

$$* = \left(h \triangleright [X,Y]_{TM},\ h\cdot\left(D_X g - D_Y f - \omega(X,Y)\right)\right) + \left(D_X h \triangleright Y,\ D_X h \cdot g\right)$$

$$\equiv h \triangleright \left([X,Y]_{TM},\ D_X g - D_Y f - \omega(X,Y)\right) + D_X h \triangleright (Y,g)$$

$$\equiv h \triangleright [\![(X,f),(Y,g)]\!]^{\omega}_{\mathrm{Vin}} + D_{\alpha_E(X,f)} h \triangleright (Y,g) \qquad \blacksquare\ ,$$

CO KOŃCZY DOWÓD SENSOWNOŚCI. $\square$

2.1° SPRAWDŹ, ŻE NAWIAS VINOGRADOVA OGRANICZA SIĘ DO CIĘĆ HAMILTONOWSKICH

$$\mathrm{Ham}(M,\omega) := \left\{ (\mathcal{V},H) \in \Gamma(TM \times \mathbb{R}) \mid \mathcal{V} \lrcorner\, \omega = -dH \right\}$$

JAKĄ ZNANĄ CI STRUKTURĘ WÓWCZAS KODUJE?

PRZEJDZIEMY OBECNIE DO DWÓCH PRZYKŁADÓW „Z WYŻSZEJ PÓŁKI", O KTÓRE WSZELAKO POTYKAMY SIĘ W (COKOLWIEK ZAAWANSOWANYCH) STUDIACH FIZYKO-MATEMATYCZNYCH...

3° ALGEBROID POISSONOWSKI nad $(M, \Pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM))$

W LOKALNEJ BAZIE WSPÓŁRZĘDNIOWEJ na OTOCZENIU $\mathcal{O}_m \ni x$, $m \in M$

$$\Pi(x) = \Pi^{ij}(x)\,\partial_i \wedge \partial_j \qquad \text{BIWEKTOR POISSONA}$$

$\Big($ DLA $\eta_1, \eta_2 \in \Omega^1(M)$: $\partial_i \wedge \partial_j(\eta_1, \eta_2) = \eta_1(\partial_i)\,\eta_2(\partial_j) - \eta_2(\partial_i)\,\eta_1(\partial_j)$

TAK JAK DLA $V_1, V_2 \in \Gamma(TM)$: $dx^i \wedge dx^j(V_1, V_2) = dx^i(V_1)\,dx^j(V_2) - dx^i(V_2)\,dx^j(V_1)$ $\Big)$,

PRZY CZYM WSPÓŁCZYNNIKI FUNKCJONALNE $\Pi^{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_m, \mathbb{R})$ SĄ TAK DOBRANE, ŻE

$$\{\cdot,\cdot\}_\Pi : C^\infty(M,\mathbb{R}) \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$$

$$: (f, g) \longmapsto \Pi(df, dg)$$

JEST NAWIASEM (POISSONA-)LIEGO.

3.1° WYPROWADŹ TOŻSAMOŚCI: (Sch-N)

$$\Pi^{li}\partial_l \Pi^{jk} + \Pi^{lk}\partial_l \Pi^{ij} + \Pi^{lj}\partial_l \Pi^{ki} = 0 \quad \forall_{i,j,k \in \overline{1,\dim M}}$$

3.2° NA PODSTAWIE (Sch-N) SPRAWDŹ, ŻE

$$\begin{tikzcd}
E = T^*M \arrow[r, "\alpha_E = \Pi_\#"] \arrow[d, "\pi_E = \pi_{T^*M}"'] & TM \arrow[d, "\pi_{TM}"] \\
M \arrow[r, equal] & M
\end{tikzcd}$$

, GDZIE $\Pi_\#(p) := \Pi(p,\cdot)$

(Π TRAKTUJEMY – RÓWNOWAŻNIE – JAKO MORFIZM WIĄZEK WEKTOROWYCH $T^*M \to TM$)

$\Gamma(E) \equiv \Gamma(T^*M) \equiv \Omega^1(M)$ ORAZ

$$[\cdot,\cdot]_{T^*M} : \Gamma(T^*M) \times \Gamma(T^*M) \longrightarrow \Gamma(T^*M)$$

$$(\eta_1,\eta_2) \longmapsto \mathcal{L}_{\Pi_\#(\eta_1)}\eta_2 - \mathcal{L}_{\Pi_\#(\eta_2)}\eta_1 - d\big(\Pi(\eta_1,\eta_2)\big)$$

JEST ALGEBROIDEM LIEGO NAD M.

4° ALGEBROID COURANTA (NIE LIEGO!) nad $(M, H \in \Omega^3(M) \cap \operatorname{Ker} d, \lambda)$,

GDZIE $\lambda : G \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ (LEWE) DZIAŁANIE GRUPY LIEGO G

HOMOMORFIZM GRUP

$$\underline{\lambda} : G \times M \longrightarrow M, \ (g,m) \longmapsto \lambda_g(m)$$

ZACHOWUJĄCE H : $\forall g \in G : \lambda_g^* H = H$

FAKT: $TG \simeq G \times T_e G$ (GLOBALNA TRYWIALIZACJA)

ELEMENT NEUTRALNY

POZWALA ROZWAŻAĆ ZACHOWANIE H WZDŁUŻ KRZYWYCH CAŁKOWYCH WYRÓŻNIONYCH PÓL WEKTOROWYCH na M INDUKOWANYCH PRZEZ ELEMENTY GLOBALNEJ BAZY $\Gamma(TG) \ni L_A : G \ni g \longmapsto T_e \ell_g (t_A) \in T_g G$, GDZIE $\{t_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$

POLA LEWO-NIEZMIENNICZE na G DOWOLNA BAZA $T_e G$

$$K_A : M \ni m \longmapsto T_{(e,m)} \underline{\lambda} \left(-L_A(e) \equiv -t_A, \ 0_{TM}(m)\right) \in T_{\lambda_e(m)} M \equiv T_m M$$

POLA FUNDAMENTALNE

FAKT: $\exists\, f_{AB}{}^{C} \in \mathbb{R}: \quad [L_A, L_B]_{TG} = f_{AB}{}^{C} L_C \quad$ i $\quad [\kappa_A, \kappa_B]_{TM} = f_{AB}{}^{C} \kappa_C$

STAŁE STRUKTURY LIEGO na T_eG

DOSTAJEMY $\quad 0 = \mathcal{L}_{\kappa_A} H = \kappa_A \lrcorner \underset{0}{\underset{\parallel}{dH}} + d(\kappa_A \lrcorner H) \equiv \underset{(gH)}{d(\kappa_A \lrcorner H)}$

$\times$

ROZWAŻ **UOGÓLNIONĄ WIĄZKĘ STYCZNĄ HITCHINA**

$$E^{(1,1)}M := TM \oplus T^*M \ni (v, p) \;:\; \pi_{TM}(v) = \pi_{T^*M}(p)$$

$$\pi = \pi_{TM} \circ pr_1 \Big\downarrow \qquad M$$

$(v,p) \mapsto \pi_{TM}(v)$

O CIĘCIACH $\Gamma(E) = \Gamma(TM) \oplus \Omega^1(M) \ni (\mathcal{V}, \eta)$, NA KTÓRYCH DEFINIUJEMY **NAWIAS COURANTA** ZWICHROWANY PRZEZ H:

$$[\![(\mathcal{V}_1,\eta_1),(\mathcal{V}_2,\eta_2)]\!]^H_C := \left([\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2]_{TM},\; \mathcal{L}_{\mathcal{V}_1}\eta_2 - \mathcal{L}_{\mathcal{V}_2}\eta_1 - \tfrac{1}{2} d(\mathcal{V}_1 \lrcorner \eta_2 - \mathcal{V}_2 \lrcorner \eta_1) - \mathcal{V}_2 \lrcorner \mathcal{V}_1 \lrcorner H\right)$$

4.1° CZY NAWIAS COURANTA $[\![\cdot,\cdot]\!]^H_C$ JEST NAWIASEM LIEGO? WYZNACZ JAKOBIATOR $\mathrm{Jac}_{E^{(1,1)}M}((\mathcal{V}_1,\eta_1),(\mathcal{V}_2,\eta_2),(\mathcal{V}_3,\eta_3))$ W TERMINACH NIEZWYRODNIAŁEJ FORMY 2-LINIOWEJ SYMETRYCZNEJ

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \Gamma(E^{(1,1)}M)^{\times 2} \to C^\infty(M,\mathbb{R}), \quad ((\mathcal{V}_1,\eta_1),(\mathcal{V}_2,\eta_2)) \longmapsto \tfrac{1}{2}(\mathcal{V}_1 \lrcorner \eta_2 + \mathcal{V}_2 \lrcorner \eta_1).$$

SPRAWDŹ, ŻE JEST ON POSTACI $(0_{TM}, d\,\mathrm{Nij}((\mathcal{V}_1,\eta_1),(\mathcal{V}_2,\eta_2),(\mathcal{V}_3,\eta_3)))$

DLA PEWNEGO ODWZOROWANIA 3-LINIOWEGO $\mathrm{Nij} : \Gamma(E^{(1,1)}M)^{\times 3} \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ OPERATOR NIJENHUISA

4.2° ZAŁÓŻMY, ŻE DANE JEST ROZWIĄZANIE (gH):

$$\kappa_A \in \Omega^1(M) : \quad -d\kappa_A = \mathcal{K}_A \lrcorner H, \quad A \in \overline{1,\dim G},$$

KTÓRE DAJE NAM CIĘCIA KWAZIHAMILTONOWSKIE $(\mathcal{K}_A,\kappa_A) \in \Gamma(E^{(1,1)}M)$

$$\mathrm{gHam}(M,H) := \{(\mathcal{V},\eta) \in \Gamma(E^{(1,1)}M) \mid \mathcal{V} \lrcorner H = -d\eta\}$$

SPRAWDŹ, ŻE $\forall\, (\mathcal{V}_1,\eta_1),(\mathcal{V}_2,\eta_2)\in \mathfrak{g}\mathrm{Ham}(M,H)\,:\, [\![(\mathcal{V}_1,\eta_1),(\mathcal{V}_2,\eta_2)]\!]_C^H \in \mathfrak{g}\mathrm{Ham}(M,H)$,

TJ. NAWIAS COURANTA OGRANICZA SIĘ DO $\mathfrak{g}\mathrm{Ham}(M,H)$

4.3° UDOWODNIJ, ŻE $\left(\langle (\mathcal{K}_A,\kappa_A)\mid A\in\overline{1,\dim G}\rangle_{C^\infty(M,\mathbb{R})},\ [\![\cdot,\cdot]\!]_C^H,\ \mathrm{pr}_1\right)$

SPEŁNIA AKSJOMATY ALGEBROIDU LIEGO $\Longleftrightarrow$

$$\forall_{A,B\in\overline{1,\dim G}}\ :\ \begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{K}_A}\kappa_B = f_{AB}{}^C\kappa_C & \text{G-EKWIWARIANCJA } \kappa. \\ \langle (\mathcal{K}_A,\kappa_A),(\mathcal{K}_B,\kappa_B)\rangle = 0 & \text{IZOTROPIA} \end{cases}$$

SPRÓBUJ WYJAŚNIĆ SENS ALGEBRO-GEOMETRYCZNY PIERWSZEGO Z WARUNKÓW.

POWYŻSZA STRUKTURA NOSI MIANO **STRUKTURY DIRACA** ALGEBROIDU COURANTA.

STRUKTURY TAKIE KWANTYFIKUJĄ OBSTRUKCJE WOBEC ULOKALNIANIA (CECHOWANIA) SYMETRII KONFIGURACYJNYCH MECHANIKI PĘTLI NAŁADOWANYCH. [SUSZEK; GAWĘDZKI-SUSZEK-WALDORF]