TEORIA GRUP I

WYKŁADY VII, VIII i IX

2024/25

REPREZENTACJE GRUP

G - grupa ; $\mathbb{K}$ - ciało $(\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$

V - przestrzeń $\mathbb{K}$-liniowa wymiarowa

$$\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$$

ew. + struktura (np. unitarna)

Def: <u>REPREZENTACJA GRUPY</u> G TO PARA (V, ϱ) złożona z

- $V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{<\infty}$
- $\varrho : G \longrightarrow GL(V; \mathbb{K})$ w Grp

$$\llcorner \{ m \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid \exists\, m^{-1} \}$$

strukturalne działanie G na V

($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ - <u>RZECZYWISTA</u> ; $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ - <u>ZESPOLONA</u> ; CZASEM ROZWAŻAMY TEŻ $\mathbb{K}=\mathbb{H}$: prawe $\mathbb{H}$-moduły)

<u>WYMIAR REPREZENTACJI</u> (V, ϱ) TO $\dim_{\mathbb{K}} V$.

JEŚLI ϱ JEST MONO, TO (V, ϱ) NAZYWAMY <u>WIERNĄ</u>.

PODPRZESTRZEŃ $W \subseteq V$ O WŁASNOŚCI

$$\varrho(G)(W) \subset W$$

OKREŚLAMY MIANEM ϱ-NIEZMIENNICZEJ. PRZY TYM ILEKROĆ $W \in \{\{0_V\}, V\}$, MÓWIMY O TRYWIALNEJ PODPRZESTRZENI ϱ-NIEZMIENNICZEJ. W P.P. W NAZYWAMY NIETRYWIALNĄ.

JEŚLI JEDYNYMI PODPRZESTRZENIAMI ϱ-NIEZM. SĄ V i $\{0_V\}$, TO ϱ NAZYWAMY NIEPRZYWIEDLNĄ.

Def.: NIECH (V_A, ϱ_A), $A \in \{1,2\}$ REPREZENTACJE G. SPLATACZ REPREZENTACJI (V_1, ϱ_1) i (V_2, ϱ_2) TO $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ O WŁASNOŚCI

$$\forall g \in G: \quad \chi \circ \varrho_1(g) = \varrho_2(g) \circ \chi .$$

równoważnie: odwzorowanie G-ekwiwariantne

ILEKROĆ $\exists \chi^{-1}$, χ OKREŚLAMY MIANEM RÓWNOWAŻNOŚCI REPREZENTACJI, A SAME REPREZENTACJE NAZYWAMY RÓWNOWAŻNYMI I PISZEMY $(V_1, \varrho_1) \sim (V_2, \varrho_2)$ LUB $\varrho_1 \sim \varrho_2$.

E.g., (1) REPREZENTACJA TRYWIALNA

$$\varrho = \mathrm{id}_V .$$

(2) REPREZENTACJA DEFINIUJĄCA

$$\varrho : GL(V;\mathbb{K}) \longrightarrow GL(V;\mathbb{K})$$

$$\varrho \equiv \mathrm{id}_{GL(V;\mathbb{K})}$$

(3) $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\varrho_n : \underset{|\cdot|^{-1}(\{1\})}{\underset{\shortparallel}{U(1)}} \longrightarrow GL(\mathbb{C};\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^\times$$

$$: u \longmapsto u^n \triangleright \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$$

(4) REPREZENTACJA PERMUTACYJNA

$$\varrho : G_X \longrightarrow GL(\ell^2(X);\mathbb{C})$$

$$: \sigma \longmapsto (\sigma^{-1})^* : f \longmapsto f \circ \sigma^{-1}$$

BAZA: $\delta_x \longmapsto \delta_{\sigma(x)}$, $x \in X$

Stw. 1. NIECHAJ (V_A, ρ_A), $A \in \{1,2\}$ REPREZENTACJE G I NIECH $\chi \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$ SPLATACZ.

WÓWCZAS $\ker \chi \subseteq V_1$ I $\mathrm{Im}\, \chi \subseteq V_2$ SĄ PODPRZESTRZENIAMI NIEZMIENNICZYMI.

D: $v_1 \in \ker \chi \Rightarrow \chi(\rho_1(g)(v_1)) = \rho_2(g)(\chi(v_1))$

$$= \rho_2(g)(0_{V_2}) = 0_{V_2}, \quad g \in G$$

$$v_2 \in \mathrm{Im}\, \chi \Leftrightarrow \exists_{v_1 \in V_1} : v_2 = \chi(v_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_2(g)(v_2) = \rho_2(g)(\chi(v_1))$$

$$= \chi(\rho_1(g)(v_1)) \in \mathrm{Im}\, \chi, \quad g \in G,$$

$\square$

NATURALNE OPERACJE NA REPREZENTACJACH:

(1) (V_α, ρ_α), $\alpha \in A$

$$\rightsquigarrow$$

SUMA PROSTA

$$\Big(\bigoplus_{\alpha \in A} V_\alpha , \bigoplus_{\alpha \in A} \rho_\alpha \Big)$$

$$\bigoplus_{\alpha \in A} \rho_\alpha : G \longrightarrow GL\Big(\bigoplus_{\alpha \in A} V_\alpha ; \mathbb{K}\Big)$$

$$\rho_\oplus : g \longmapsto \bigoplus_{\alpha \in A} \rho_\alpha(g),$$

czyli $\rho_\oplus(g)(v_\alpha) = \big(\rho_\alpha(g)(v_\alpha)\big).$

(2) (V_A, ρ_A), $A \in \{1, 2\}$

$$\rightsquigarrow$$

ILOCZYN TENSOROWY

$$\big(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 , \rho_1 \otimes \rho_2 \big)$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 ; \mathbb{K}),$$

$$: g \longmapsto \rho_1(g) \otimes \rho_2(g),$$

czyli $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2) = \rho_1(g)(v_1) \otimes_{\mathbb{K}} \rho_2(g)(v_2)$

(3) (V, ϱ), $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$

$\rightsquigarrow$ DUALIZACJA & REPREZENTACJA KONTRAGREDIENTNA

$(V^*, \check{\varrho})$

Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ DWOISTOŚĆ KANONICZNA

Wówczas $\forall (\varphi, v) \in V^* \times V$, $g \in G$:

$$\langle \check{\varrho}(g)(\varphi), v \rangle := \langle \varphi, \varrho(g^{-1})(v) \rangle$$

tj. $\check{\varrho}(g)(\varphi) = \varphi \circ \varrho(g^{-1})$, czyli $\check{\varrho}(g) = \varrho(g^{-1})^*$

(4) (V, ϱ), $V \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$

$\rightsquigarrow$ KOMPLEKSYFIKACJA

$(V^{\mathbb{C}}, \varrho^{\mathbb{C}})$ $\quad V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \circlearrowleft \mathbb{C} \ni \lambda$: $v \otimes_{\mathbb{R}} z \longmapsto v \otimes_{\mathbb{R}} \lambda \cdot z$

$$\varrho^{\mathbb{C}} : G \longrightarrow GL(V^{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$$
$$: g \longmapsto \varrho(g) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$$

Def.: REPREZENTACJĘ (V, ϱ) NAZYWAMY W PEŁNI PRZYWIEDLNĄ / ROZKŁADALNĄ, JEŚLI $\exists\, (V_\alpha, \varrho_\alpha)_{\alpha \in A}$:

$$(V, \varrho) \sim \bigoplus_{\alpha \in A} (V_\alpha, \varrho_\alpha)$$

NB: (1) REPREZENTACJA PRZYWIEDLNA (NIE-NIEPRZYW.) MOŻE BYĆ NIEROZKŁADALNA, e.g.,

$$\varrho : \mathbb{R} \to GL(2; \mathbb{R}) : r \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MA $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ NIEZM., ALE

$\neg \exists\, \widetilde{W} : \mathbb{R}^{\times 2} = W \oplus \widetilde{W}$, $\widetilde{W}$ NIEZM.

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + r \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1, \text{ ale wtedy } a + r \stackrel{!}{=} a$$

$$\Updownarrow$$

$$r = 0.$$

(2) KOMPLEKSYFIKACJA NIEPRZYWIEDLNEJ MOŻE BYĆ PRZYWIEDLNA, e.g.:

$$\rho : U(1) \to GL(2;\mathbb{R}) : e^{i\varphi} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\rho^{\mathbb{C}}$ MA PRZ. NIEJM.

$$W_{\pm} := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^{\times 2} \equiv \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \xmapsto{\rho(e^{i\varphi})(\cdot)} \begin{pmatrix} \cos\varphi \mp i\sin\varphi \\ \sin\varphi \pm i\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mp i\varphi} \\ -i\, e^{\mp i\varphi} \end{pmatrix} = e^{\mp i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

———— x ————

LEMATY SCHURA

Tw. 1. Niechaj (V_A, ρ_A) - reprezentacje nieprzyw. i niech $\chi \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$ - splatacz. Wówczas $\chi = 0 \ \underline{\vee}\ \chi$ izo.

D: Z Stw. 1 $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,\chi$ niezm., ale (V_2, ρ_2) nieprzyw.,

zatem $\mathrm{Im}\,\chi = \{0_{V_2}\} \ \underline{\vee}\ \mathrm{Im}\,\chi = V_2$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\chi = 0 \qquad\qquad \chi \text{ epi}$$

oraz $\mathrm{Ker}\,\chi$ niezm., ale (V_1, ρ_1) nieprzyw.,

zatem $\mathrm{Ker}\,\chi = V_1 \ \underline{\vee}\ \mathrm{Ker}\,\chi = \{0_{V_1}\}$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\chi = 0$ i/w $\qquad\qquad \chi$ mono

$$\Downarrow$$

χ izo.

□

TW. 2. NIECHAJ $V \in \mathrm{Obvect}_{\mathbb{C}}$ i (V, ρ) NIEPRZYW.

ORAZ NIECH $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ - SPLATACZ $(V, \rho)^{\circlearrowleft}$.

WÓWCZAS $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \chi = \lambda \triangleright \mathrm{id}_V$.

D: $\mathbb{C}$ JEST ALG. DOMKN. $\Rightarrow \mathrm{Sp}\,\chi \neq \emptyset$.

NIECH $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\chi$ i $v \in V_\lambda(\chi)$, A WTEDY

$$\chi(\rho(g)(v)) = \rho(g)(\chi(v)) = \rho(g)(\lambda \triangleright v)$$

$$= \lambda \triangleright \rho(g)(v), \text{ CZYLI}$$

$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,\chi : V_\lambda(\chi)$ NIEZM., ALE $V_\lambda(\chi) \neq \{0\}$,

ZATEM $V_\lambda(\chi) = V$ Z RACJI NIEPRZYWIEDLNOŚCI

$\Leftrightarrow \chi \equiv \lambda \triangleright \mathrm{id}_V$ $\square$

TW. 3. NIECHAJ $V_1, V_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}^{<\infty}$ i (V_A, ρ_A), $A \in \{1,2\}$ (NIEPRZYWIEDLNE) ORAZ NIECH $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Hom}_{K}(V_1, V_2)$ SPLATACZE, WÓWCZAS $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : \chi_2 = \lambda \triangleright \chi_1$.

PRZY CZYM $\chi_1 \neq 0$.

D: $\chi_1 \neq 0 \underset{\text{TW. 1.}}{\Longrightarrow} \exists\, \chi_1^{-1}$

$$\Downarrow$$

$$\chi_2 \circ \chi_1^{-1} : (V_2, \rho_2) \circlearrowleft \text{ SPLATACZ}$$

$$\Downarrow \text{ TW. 2.}$$

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : \chi_2 \circ \chi_1^{-1} = \lambda \triangleright \mathrm{id}_{V_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\chi_2 = \lambda \triangleright \chi_1 \qquad \square$$

Corollarium

KAŻDA NIEPRZYWIEDLNA ZESPOLONA REPREZENTACJA GRUPY PRZEMIENNEJ JEST JEDNOWYMIAROWA.

D: NIECH $\rho : G \to GL(V; \mathbb{C})$ j/w.

PRZEMIENNOŚĆ $G \implies \forall a,b \in G : \rho(a \cdot b) = \rho(b \cdot a)$

$$\underset{\rho(a)\circ\rho(b)}{\rho(a\cdot b)} = \underset{\rho(b)\circ\rho(a)}{\rho(b\cdot a)}$$

$$\Downarrow$$

$\rho(b) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ SPLATA ρ $\circlearrowleft$

$$\Downarrow \text{ Tw. 2.}$$

$$\forall a \in G \quad \exists \lambda(a) \in \mathbb{C} : \rho(a) = \lambda(a) \circ \mathrm{id}_V.$$

$$\Downarrow$$

NIEPRZYWIEDLNA

$$\Updownarrow$$

$$\dim_{\mathbb{C}} V = 1. \qquad \square$$

R

REPREZENTACJE GRUP NA PRZESTRZENIACH UNITARNYCH

MOTYWACJA FIZYCZNA: MECHANIKA KWANTOWA

Def.: PRZESTRZEŃ UNITARNA

TO PARA $(V, (\cdot|\cdot))$ ZŁOŻONA Z

- $V \in \mathrm{Obvect}_{\mathbb{C}}$
- $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$

O WŁASNOŚCIACH:

(PU1) $\forall u,v,w \in V : (u+v|w) = (u|w) + (v|w)$

(PU2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall u,v \in V : (\lambda \triangleright u|v) = \lambda \cdot (u|v)$

(PU3) $\forall u,v \in V : (v|u) = \overline{(u|v)}$

(PU4) $\forall v \in V \setminus \{0_V\} : \boxed{(v|v) > 0}$

REPREZENTACJE UNITARNE:

Def: Niech $(V,(\cdot|\cdot))$ przestrzeń unitarna i niech (V,ρ) reprezentacja G. Nazwiemy ją **unitarną**, jeżeli

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr] & & GL(V;\mathbb{C}) \\
& U(V,(\cdot|\cdot)) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

→ także relacja równoważności

Unitarna równoważność to taka, której splatacz jest odwzorowaniem unitarnym, tj. $X \in Hom_G(V_1,V_2)$:

$$(\cdot|\cdot)_2 \circ (X \times X) = (\cdot|\cdot)_1 .$$

Będziemy ją oznaczać jako $\rho_2 \simeq_u \rho_1$.

E.g., reprezentacja permutacyjna (4) ze str. 3 jest unitarna względem struktury unitarnej

$$\ell^2(X) \times \ell^2(X) \ni (f,g) \mapsto \sum_{x\in X} f(x)\overline{g(x)}$$

ISTOTNIE

$$\left(\varrho(\sigma)(f) \mid \varrho(\sigma)(g)\right) = \sum_{x \in X} f(\sigma^{-1}(x))\overline{g(\sigma^{-1}(x))},$$

ALE $\sigma \in G_X$, WIĘC $\sum_{x \in X} \sigma^{-1}(x) = \sum_{x \in X} x$

$$= \sum_{y \in X} f(y)\overline{g(y)} = (f|g).$$

O NATURALNOŚCI POJĘCIA RÓWNOWAŻNOŚCI UNITARNEJ W KATEGORII UNITARNEJ OBJĘCIA

Tw. 4. NIECHAJ $(V_A, (\cdot|\cdot)_A)$, $A \in \{1,2\}$ PRZESTRZENIE UNITARNE I NIECH (V_A, ϱ_A), $A \in \{1,2\}$ REPREZENTACJE UNITARNE. JEŚLI $\varrho_2 \sim \varrho_1$, TO $\varrho_2 \underset{u}{\sim} \varrho_1$.

D:

ROZWAŻMY $\chi^\dagger \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, V_1)$:

$$\left(\chi^\dagger\circ\varrho_2(g)(v)\middle|\varrho_1(g)(w)\right)_1$$

$$\equiv\left(\varrho_2(g)(v)\middle|\chi\circ\varrho_1(g)(w)\right)_2$$

$$=\left(\varrho_2(g)(v)\middle|\varrho_2(g)\circ\chi(w)\right)_2$$

$$=\left(v\middle|\chi(w)\right)_2 \quad (\Leftarrow \varrho_2 \text{ UNITARNA!})$$

$$\equiv\left(\chi^\dagger(v)\middle|w\right)_1,$$ ALE TEŻ

$$\left(\chi^\dagger\circ\varrho_2(g)(v)\middle|\varrho_1(g)(w)\right)_1 \quad (\Leftarrow \varrho_1 \text{ UNITARNA})$$

$$=\left(\varrho_1(g)^\dagger\circ\chi^\dagger\circ\varrho_2(g)(v)\middle|w\right)_1,$$

ZATEM WOBEC NIEZWYRODNIENIA $(\cdot|\cdot)_1$ I DOWOLNOŚCI $v\in V_2$ i $w\in V_1$:

$$\varrho_1(g)^\dagger\circ\chi^\dagger\circ\varrho_2(g)=\chi^\dagger$$

$$\Longleftrightarrow\ \chi^\dagger\circ\varrho_2(g)=\varrho_1(g)\circ\chi^\dagger,$$

TJ. $\chi^\dagger$ SPLATA ϱ_2 Z $\varrho_1 \Longrightarrow$

$\chi^\dagger \circ \chi$ SPLATA ϱ_1 Z $\varrho_1 \Longrightarrow$

$(\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}$ (KTÓRY JEST DOBRZE OKREŚLONY)

TAKŻE SPLATA ϱ_1 Z ϱ_1

W TAKIM RAZIE

$U_\chi = \chi \circ (\chi^\dagger \circ \chi)^{-\frac{1}{2}}$ SPLATA ϱ_1 Z ϱ_2, ALE

$$\left(\chi \circ (\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}(v) \,\middle|\, \chi \circ (\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}(w)\right)_2$$

$$= \left(\chi^\dagger \circ \chi \circ (\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}(v) \,\middle|\, (\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}(w)\right)_1$$

$$= \left((\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2} \circ \chi^\dagger \circ \chi \circ (\chi^\dagger \circ \chi)^{-1/2}(v) \,\middle|\, w\right)_1$$

$= (v|w)_1$, WIĘC U_χ UNITARNY. $\square$

ZAUWAŻMY, ŻE

<u>STW. 2.</u> NIECHAJ $(V, (\cdot|\cdot))$ UNITARNA I NIECH (V, ϱ) UNITARNA. JEŚLI $W \subseteq V$ JEST ϱ-NIEZMIENNICZA, TO TAKŻE $W^{\perp}$ — // — .

<u>D:</u> WEŹMY $v \in W^{\perp}$, CZYLI

$$\forall w \in W : (v|w) = 0 .$$

WÓWCZAS

$$\forall_{\substack{w \in W \\ g \in G}} : \big(\varrho(g)(v) \,|\, w\big) = \big(v \,|\, \varrho(g^{-1})(w)\big)$$

ALE $\varrho(g)(W) = W$, ZATEM

$$\forall v \in W^{\perp}, g \in G : \varrho(g)(v) \in W^{\perp}$$

CZYLI $\varrho(g)(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$. $\square$

SIŁĘ ZAŁOŻENIA O UNITARNOŚCI EKSPONUJE

<u>TW. 5.</u> NIECHAJ $(V, (\cdot|\cdot))$ UNITARNA SKOŃCZENIE WYMIAROWA i NIECH (V, ϱ) UNITARNA. WÓWCZAS (V, ϱ) JEST W PEŁNI ROZKŁADALNA.

<u>D</u>: JEŚLI V JEST NIEPRZYWIEDLNA, TO TEZA ZACHODZI.

W P.P. NIECH $W \subsetneq V$ ϱ-NIEZMIENNICZA, A WTEDY TAKŻE $W^\perp$ ϱ-NIEZMIENNICZA i $V = W \oplus W^\perp$.

KAŻDA Z NICH JEST ALBO NIEPRZYWIEDLNA, ALBO, ROZKŁADA SIĘ

NA PODPRZESTRZEŃ WŁAŚCIWĄ ρ-NIEZMIENNICZĄ I JEJ ρ-NIEZMIENNICZE DOPEŁNIENIE $\perp$. PO $<\infty$ LICZBIE KROKÓW – TEZA. $\square$

W KATEGORII UNITARNEJ OBOWIĄZUJE SWOISTA WERSJA LEMATU SCHURA:

Tw. 6. NIECHAJ $(V_A, (\cdot|\cdot)_A)$, $A \in \{1,2\}$ – UNITARNE I NIECH (V_A, ρ_A), $A \in \{1,2\}$ – –II– IRREPY, A $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ SPLATA ρ_1 Z ρ_2, PRZY CZYM ZAKŁADAMY, ŻE $\chi \neq 0$.

WÓWCZAS $\rho_2 \underset{U}{\sim} \rho_1$.

D: $\chi \neq 0 \Longrightarrow \chi$ ISO NA MOCY Tw. 1.,

ALE W TAKIM RAZIE $\rho_1 \sim \rho_2$,

CO W ŚWIETLE Tw. 4. IMPLIKUJE

$\rho_1 \underset{U}{\sim} \rho_2$. $\square$

O WYJĄTKOWYM STATUSIE REPREZENTACJI UNITARNYCH W ŚWIECIE GRUP SKOŃCZONYCH PRZEKONUJE NAS...

TW. 7. [O UNITARYZOWALNOŚCI REPREZENTACJI GRUP SKOŃCZONYCH]

NIECHAJ G - GRUPA SKOŃCZONA, $(V, (\cdot|\cdot))$ - PRZESTRZEŃ UNITARNA, (V, ρ) - REPREZENTACJA G.

ISTNIEJE NA V ILOCZYN SKALARNY, WZGLĘDEM KTÓREGO ρ JEST UNITARNA.

D: ZDEFINIUJMY

$$(\cdot|\cdot)_G : V \times V \to \mathbb{C}$$

$$: (v, w) \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)(v) | \rho(g)(w)).$$

W OCZYWISTY SPOSÓB $(\cdot|\cdot)_G$ DZIEDZICZY WŁASNOŚCI $(\cdot|\cdot)$:

(PU1), (PU2) – TRYWIALNE

(PU3) NIECH $(v|v)_G = 0$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} (\varrho(g)(v)|\varrho(g)(v)) \geq 0 \Leftarrow$$

$$\forall g\in G: (\varrho(g)(v)|\varrho(g)(v)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$0 = (\varrho(e)(v)|\varrho(e)(v)) = (v|v) \Rightarrow v = 0$, PRZY CZYM

$\forall h\in G\ \forall v,w\in V$:

$$(\varrho(h)(v)|\varrho(h)(w))_G$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} (\varrho(g)\circ\varrho(h)(v)|\varrho(g)\circ\varrho(h)(w))$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\varrho(gh)(v) \,\middle|\, \varrho(gh)(w) \right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \left(\varrho(k)(v) \,\middle|\, \varrho(k)(w) \right)$$

$$= (v|w)_G .$$

JEST ZATEM ϱ REPREZENTACJĄ $(\cdot|\cdot)_G$ - UNITARNĄ. $\square$

COROLLARIUM: KAŻDA REPREZENTACJA GRUPY SKOŃCZONEJ NA SKOŃCZENIE WYMIAROWEJ PRZESTRZENI WEKTOROWEJ JEST W PEŁNI ROZKŁADALNA.

WZGLĘDY FIZYCZNE KAŻĄ NAM ROZWAŻYĆ KLASĘ WYRÓŻNIONYCH REPREZENTACJI GRUP NA ZESPOLONYCH PRZESTRZENIACH WEKTOROWYCH. ABY TO UCZYNIĆ, WPROWADZAMY

Def: NIECH $V \in \mathrm{obVect}_{\mathbb{C}}$. PRZESTRZEŃ (ZESPOLENIE) SPRZĘŻONA (Z DZIAŁANIEM $\triangleright_V$) DO V TO $\overline{V} = V$ (JAKO ZBIÓR) Z DZIAŁANIEM

$$\mathbb{C} \times \overline{V} \longrightarrow \overline{V} : (\lambda, \overline{v}) \longmapsto \overline{\overline{\lambda} \triangleright_V v}.$$

$\overline{v}$ – $v \in V$ JAKO ELEMENT $\overline{V}$

$$\overline{\overline{\lambda} \triangleright_V v} = \lambda \triangleright_{\overline{V}} \overline{v}$$

DOWOLNEMU $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ PRZYPORZĄDKOWUJEMY

$$\overline{\chi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V_1}, \overline{V_2}) : \quad \overline{\chi}(\overline{v}) := \overline{\chi(v)}$$

PARĘ (V, α) ZŁOŻONĄ Z

- $V \in \mathrm{ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$, $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$
- $\alpha : V \xrightarrow[\mathbb{C}\text{-lin}]{\cong} \bar{V}^*$

O WŁASNOŚCI

$$(pU1) \quad \bar{\alpha}^* = \alpha \qquad (V^{**} \cong V)$$

$$(pU2) \quad (\cdot|\cdot)_\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$$

$$: (v, w) \longmapsto \langle \bar{v}, \alpha(w) \rangle$$

FORMA PSEUDOHERMITOWSKA JEST NIEZWYRODNIAŁA, tj.

$$\left(\forall v \in V : (v|w)_\alpha = 0 \right) \Rightarrow w = 0_V$$

OKREŚLAMY MIANEM PRZESTRZENI PSEUDOUNITARNEJ.

JEJ ENDOMORFIZM $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ NAZYWANY PSEUDOUNITARNYM, ILEKROĆ $$\chi^\dagger = \chi^{-1},$$

GDZIE $$\left(\chi^\dagger(v)\middle|w\right)_\alpha := \left(v\middle|\chi(w)\right)_\alpha .$$

— x —

<u>UWAGI PORZĄDKUJĄCE</u>:

1° SENSOWNOŚĆ $\chi \mapsto \overline{\chi}$: $\overline{\ \cdot\ } \equiv \overline{\ \cdot\ }^{\,-1}$

DLA DOWOLNYCH $\lambda \in \mathbb{C}$ i $v \in V_1$

JEST $$\overline{\chi}\left(\lambda \triangleright_{\overline{V_1}} \overline{v}\right) \equiv \overline{\chi\left(\overline{\lambda \triangleright_{\overline{V_1}} \overline{v}}\right)}$$

$$\equiv \overline{\chi\left(\overline{\lambda} \triangleright_{V_1} v\right)} = \overline{\overline{\lambda} \triangleright_{V_2} \chi(v)}$$

$$\equiv \overline{\overline{\lambda}} \triangleright_{\overline{V_2}} \overline{\chi(v)} = \lambda \triangleright_{\overline{V_2}} \overline{\chi}\left(\overline{v}\right)$$

2° MOŻEMY UTOŻSAMIĆ $(\overline{V})^* \equiv \overline{V^*}$

$\subseteq : \overline{V^*}$

ISTOTNIE, NIECH $\varphi \in V^*$, CZYLI $\varphi : V \to \mathbb{C}$,

A WTEDY $\overline{\varphi} : \overline{V} \to \overline{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C}$ (jako zbiór)

JEST $\mathbb{C}$-LINIOWE NA MOCY RACHUNKU Z POPRZ. STR., CZYLI $\overline{\varphi} \in (\overline{V})^*$.

—— x ——

3° WARUNEK (pUI) TO WARUNEK SAMOSPRZĘŻONOŚCI MACIERZY α:

NIECH $\alpha : V \to \overline{V}^*$

MA MACIERZ $\alpha(e_i) =: \alpha_{ij} \cdot \overline{\triangleright}\, \overline{\varepsilon}^j$,

BAZA DUALNA DO BAZY $\overline{e}_i$ W $\overline{V}$.

$\overline{\varepsilon}^j(\overline{e}_i) = \delta^j_i$

A WTEDY WOBEC $\bar{\alpha} : \bar{V} \longrightarrow \overline{\bar{V}^*} \equiv \overline{\bar{V}^*} \equiv V^*$

JEST $\bar{\alpha}^* : V^{**} \longrightarrow \bar{V}^*$

$$V^{**} \cong V$$

(UTOŻSAMIAMY)

patrz: ev^V:

WARUNEK $\bar{\alpha}^* = \alpha$ MA PRZETO SENS!

JEST $\bar{\alpha}(\bar{e}_i) = \overline{\alpha(e_i)} = \overline{\alpha_{ij} \triangleright \varepsilon^j}$

$$= \bar{\alpha}_{ij} \triangleright \bar{\varepsilon}^j,$$

WOBEC CZEGO $\bar{\alpha}^*(e_i) = \bar{\alpha}^*_{ij} \triangleright \bar{\varepsilon}^j,$

GDZIE $\bar{\alpha}^*_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$. (WSPÓŁCZYNNIKI Z TRANSPONOWANYMI INDEKSAMI)

DOSTAJEMY WARUNEK $\bar{\alpha}_{ji} \overset{!}{=} \alpha_{ij},$

CZYLI $[\alpha]^\dagger = [\alpha]$ (HERMITOWSKOŚĆ MACIERZY)

28

4° WARUNEK (pU1) JEST KONIECZNY I WYSTARCZAJĄCY DO TEGO, BY

$$\forall v,w\in V:\ (v|w)_\alpha = \overline{(w|v)_\alpha}\ .$$

ISTOTNIE,

$$(e_i|e_j)_\alpha \equiv \langle \bar{e}_i, \alpha(e_j)\rangle = \alpha_{jk}{}^{D}\langle \bar{e}_i, \bar{\varepsilon}^k\rangle$$

$$= \alpha_{ji}{}^{D}\, 1 = \overline{\alpha_{ji}}$$

$$\overset{!}{=} \overline{(e_j|e_i)_\alpha} = \overline{\overline{\alpha_{ij}}} = \alpha_{ij}$$

5° PRZEPISZEMY NAJPIERW WARUNEK PSEUDOUNITARNOŚCI:

SPRZĘŻENIE: $$(X^\dagger(v)|w)_\alpha = (v|X(w))_\alpha$$

$$\overline{(w|X^\dagger(v))_\alpha} \qquad \overline{(X(w)|v)_\alpha}$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle \bar{w}, \alpha \circ \chi^{\dagger}(v) \rangle = \langle \overline{\chi(w)}, \alpha(v) \rangle$$

$$\equiv \langle \overline{\chi}(\bar{w}), \alpha(v) \rangle$$

$$= \langle \bar{w}, \overline{\chi}^{*} \circ \alpha(v) \rangle$$

$$\boxed{\chi^{\dagger} = \alpha^{-1} \circ \overline{\chi}^{*} \circ \alpha}$$

WOBEC TEGO OPERATOR PSEUDOUNITARNY SPEŁNIA TOŻSAMOŚĆ

$$\boxed{\overline{\chi}^{*} = \alpha \circ \chi^{-1} \circ \alpha^{-1}}$$

NB: W PRZESTRZENI PSEUDO-UNITARNEJ FORMA 1½-LIN. JEST NIEZWYRODNIAŁA, ALE NIE JEST - W OG. - DODATNIA !!!

MOŻEMY JUŻ WRÓCIĆ DO ROZWAŻAŃ TEORIOGRUPOWYCH... ZACZYNAMY OD POMOCNICZEGO

TW. 8. $\varrho \sim \check{\varrho} \iff \exists\, \beta : V \times V \to \mathbb{K}$ 2-lin.

- NIEOSOBLIWA
- ϱ-NIEZM.

(OKREŚLA KANON. $\underline{\beta} : V \xrightarrow{\simeq} V^*$) ($\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$)

PRZY TYM ILEKROĆ ϱ NIEPRZYWIEDLNA, $\underline{\beta}^* = \pm \underline{\beta}$ I OKREŚLONA JEDNOZNACZNIE Z DOKŁADNOŚCIĄ DO SKALARA.

D: $\varrho \sim \check{\varrho} \iff \exists\, \underline{\beta} : V \xrightarrow{\simeq} V^* :$

$$\forall g \in G : \check{\varrho}(g) = \underline{\beta} \circ \varrho(g) \circ \underline{\beta}^{-1}$$

$$\overset{\text{L}}{=} \varrho(g^{-1})^* \quad (*)$$

$\Updownarrow$

$$\forall g \in G : \varrho(g)^* \circ \underline{\beta} \circ \varrho(g) = \underline{\beta}$$

$\Downarrow$

$$\langle \varrho(g)(v), \underline{\beta}\circ\varrho(g)(w)\rangle = \langle v, \underline{\beta}(w)\rangle,$$

$\forall v,w\in V$ Tj. $\beta : V\times V\to \mathbb{K}$

$: (v,w)\mapsto \langle v, \underline{\beta}(w)\rangle$

JEST ϱ-NIEZMIENNICZA,

A PONIEWAŻ $\exists\, \underline{\beta}^{-1}$, WIĘC β

JEST NIEOSOBLIWA.

I ODWROTNIE, KAŻDA TAKA FORMA

DEFINIUJE IZOMORFIZM

$$\underline{\beta} : V \xrightarrow{\cong} V^* : w \mapsto \beta(\cdot, w),$$

KTÓRY SPEŁNIA TOŻSAMOŚĆ

$$\underline{\beta}\circ\varrho(g)(w) = \beta(\cdot, \varrho(g)(w))$$

$$= \beta(\varrho(g)\circ\varrho(g^{-1})(\cdot), \varrho(g)(w))$$

$$= \beta(\varrho(g^{-1})(\cdot), w) \equiv \beta(\cdot, w) \circ \varrho(g^{-1})(\cdot)$$

$$\equiv \check{\varrho}(g) \circ \beta(\cdot, w) \equiv \check{\varrho}(g) \circ \underline{\beta}(w),$$

tj. $\underline{\beta} \circ \varrho(g) = \check{\varrho}(g) \circ \underline{\beta}$,

CZYLI $\underline{\beta}$ SPLATA ϱ Z $\check{\varrho}$.

DLA ϱ NIEPRZYWIEDLNEJ: DUALIZACJA $\circledast$ ZE STR. 31 DAJE

$$\varrho(g^{-1}) = \underline{\beta}^{*-1} \circ \varrho(g)^* \circ \underline{\beta}^*,$$

$$\parallel \circledast$$

czyli

$$\underline{\beta}^{*-1} \circ \underline{\beta} \circ \varrho(g^{-1}) \circ \underline{\beta}^{-1} \circ \underline{\beta}^*$$

$\Downarrow$ $g \leftrightarrow g^{-1}$

$$\varrho(g) \circ \underline{\beta}^{*-1} \circ \underline{\beta} = \underline{\beta}^{*-1} \circ \underline{\beta} \circ \varrho(g),$$

ALE TO Z RACJI NIEPRZYWIEDLNOŚCI ϱ OZNACZA – W ŚWIETLE TW. 2. –

RÓWNOŚĆ

$$\beta^{*-1} \circ \beta = \lambda \circ \mathrm{id}_V \ , \ \lambda \in \mathbb{C}^\times$$

(WSZAK $\exists \beta^{-1}$)

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\beta^* = \mu \circ \beta \ , \ \mu \in \mathbb{C}^\times}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta \equiv \beta^{**} = \mu \circ \beta^* = \mu^2 \circ \beta$$

$$\Updownarrow$$

$$\mu \in \{-1, 1\} ,$$

CZYLI

$$\beta^* = \pm \beta .$$

DLA PARY β i $\tilde{\beta}$ O TYCH WŁASNOŚCIACH DOSTAJEMY IPLATAC) ρS : $\beta^{-1} \circ \tilde{\beta} \underset{\text{TW. 2}}{\Longrightarrow} \tilde{\beta} = \nu \circ \beta$. □

PSEUDOUNITARNOŚĆ ϱ KONTROLUJE RELACJĘ DO $\bar{\varrho}$ REPREZENTACJI, KTÓRĄ WPROWADZAMY W

Def: NIECH $V \in \mathrm{obVect}_{\mathbb{C}}$ i (V, ϱ) - REPREZENTACJA ZESPOLONA.
REPREZENTACJA (ZESPOLENIE) SPRZĘŻONA WZGLĘDEM ϱ TO PARA $(\bar{V}, \bar{\varrho})$, KTÓREJ DRUGI SKŁADNIK TO

$$\bar{\varrho} : G \longrightarrow GL(\bar{V}; \mathbb{C})$$
$$: g \longmapsto \overline{\varrho(g)} =: \bar{\varrho}(g)$$

JEST OCZYWISTE, ŻE $\bar{\varrho}$ JEST NIEPRZYWIEDLNA $\Longleftrightarrow$ ϱ JEST —"— .

MAMY WSTĘPNE I POMOCNICZE

Stw. 3. $\left.\begin{array}{l}\rho \sim \bar{\rho} \\ \rho \text{ IRREP}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ SPLATACZ $\chi : V \xrightarrow{\sim} \bar{V}$ JEST OKREŚLONY Z DOKŁADNOŚCIĄ DO SKALARA, KTÓRY MOŻNA DOBRAĆ TAK, BY BYŁO $\bar{\chi}\circ\chi = id_V \ \underline{\vee}\ \bar{\chi}\circ\chi = -id_V$.

D: $\rho \underset{\chi}{\sim} \bar{\rho} \iff \forall g\in G:$

$$\bar{\rho}(g) = \chi\circ\rho(g)\circ\chi^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(g) = \bar{\chi}\circ\bar{\rho}(g)\circ\bar{\chi}^{-1} = \bar{\chi}\circ\chi\circ\rho(g)\circ\chi^{-1}\circ\bar{\chi}^{-1}$$

ρ IRREP! $\Longrightarrow$ Tw. 2

$$\exists \lambda\in\mathbb{C} : \bar{\chi}\circ\chi = \lambda\cdot id_V$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \cdot \dim_{\mathbb{C}} V = \mathrm{tr}_V(\overline{X} \circ X) = \sum_{i,j} \overline{X}_{ij} X_{ji}$$

(vecite)

$$\Downarrow$$

$$\overline{\lambda} \dim_{\mathbb{C}} V = \overline{\sum_{i,j} \overline{X}_{ij} X_{ji}} = \sum_{i,j} X_{ij} \overline{X}_{ji}$$

$$= \sum_{j,i} \overline{X}_{ji} X_{ij} = \lambda \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$$

$$\Downarrow$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, A PONIEWAŻ

$\exists X^{-1}$, PRZETO $\lambda \in \mathbb{R}^{\times}$.

MAMY ZATEM $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \cdot X}_{= \underline{X}}$, DLA KTÓREGO

SPEŁNIONA JEST TEZA.

$\hookrightarrow \overline{\underline{X}} \circ \underline{X} = \mathrm{sign}(\lambda) \cdot \mathrm{id}_V \quad \square$

MAMY:

DLA

$$X(e_i) =: X_{ij} \triangleright \bar{e_j}$$

ZACHODZI

$$\bar{X}(X(e_i)) = \bar{X}(X_{ij} \triangleright \bar{e_j})$$

$$\underset{\text{C-lin.}}{=} X_{ij} \triangleright \bar{X}(\bar{e_j})$$

$$= X_{ij} \triangleright \overline{X(e_j)}$$

$$= X_{ij} \triangleright \bar{X}_{jk} \triangleright e_k$$

$$= X_{ij} \cdot \bar{X}_{jk} \triangleright e_k$$

$\Rightarrow$ wzór NA $tr_V(\bar{X} \circ X)$.

I WRESZCIE DŁUGO OCZEKIWANE

Tw. 9. NIECH (V, ϱ) IRREP j/w.
REPREZENTACJA TA JEST PSEUDO-UNITARNA $\iff$ $\check{\varrho} \sim \overline{\varrho}$.
JEŚLI PRZY TYM $\varrho \sim \check{\varrho}$ i JEST UNITARNA, TO $\underline{\beta}$ Z Tw. 8. i χ ZE Stw. 3 SPEŁNIAJĄ:

$$\underline{\beta}^* = \underline{\beta} \wedge \overline{\chi} \circ \chi = \mathrm{id}_V$$

$$\underline{\vee}$$

$$\underline{\beta}^* = -\underline{\beta} \wedge \overline{\chi} \circ \chi = -\mathrm{id}_V.$$

D: ϱ PSEUDOUNITARNA SPEŁNIA

$$\varrho(g^{-1}) = \alpha^{-1} \circ \overline{\varrho(g)^*} \circ \alpha \quad \forall g \in G \qquad \text{(s. 1.30)}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha^* \circ \overline{\varrho(g)} = \varrho(g^{-1})^* \circ \alpha^* \quad (**)$$

$$= \check{\varrho}(g) \circ \alpha^*$$

TJ. α^* SPLATA $\bar{\varrho}$ Z $\check{\varrho}$.
(IZOMORFIZM)

I ODWROTNIE, ILEKROĆ $\bar{\varrho} \sim \check{\varrho}$,

MAMY IZOMORFIZM $\alpha : V \xrightarrow{\sim} \bar{V}^*$

O WŁASNOŚCI (**), A ZATEM

$$\varrho(g) = \alpha^{-1} \circ \overline{\varrho(g^{-1})^*} \circ \alpha$$

$$= \alpha^{-1} \circ \overline{\left(\alpha^{-1} \circ \overline{\varrho(g)}^* \circ \alpha\right)^*} \circ \alpha$$

$$= \alpha^{-1} \circ \bar{\alpha}^* \circ \varrho(g) \circ \bar{\alpha}^{*-1} \circ \alpha$$

$\forall g \in G$

ϱ IRREP $\Downarrow$ TW. 2.

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \bar{\alpha}^* = \alpha \circ (\lambda \cdot id) \Rightarrow$$

$$\alpha^* = \bar{\alpha} \circ \overline{\lambda \cdot id} \Rightarrow \alpha = \overline{\lambda \cdot id}^* \circ \bar{\alpha}^* \Rightarrow |\lambda| = 1$$

$\Rightarrow \alpha = |\lambda|^2 \cdot \alpha$ (Z POWTÓRNEGO WYK.)

OTRZYMUJEMY WIĘC NIEOSOBLIWE ODWZ. $\tilde{\alpha} := \sqrt{\lambda}\,\bar{D}\alpha$,

KTÓRE SPEŁNIA

$$\overline{\tilde{\alpha}}^{*} = \sqrt{\bar{\lambda}}\,D\,\bar{\alpha}^{*} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\lambda\,\bar{D}\alpha$$

$$= \sqrt{\lambda}\,D\,\alpha = \tilde{\alpha},$$

ZATEM ZADAJE NA V STRUKTURĘ PSEUDOHERMITOWSKĄ, WZGL. KTÓREJ

$$\overline{\rho(g)}^{*} = \alpha \circ \rho(g)^{-1} \circ \alpha^{-1}$$

$$\equiv \tilde{\alpha} \circ \rho(g)^{-1} \circ \tilde{\alpha}^{-1},$$

CZYLI ρ JEST PSEUDOUNITARNA.

PRZECHODZĄC DO OSTATNIEGO PUNKTU TEZY, STWIERDZAMY, ŻE REPREZENTACJA UNITARNA JEST W SZCZEGÓLNOŚCI PSEUDO-UNITARNA, ZATEM W ŚWIETLE DOTYCHCZASOWYCH USTALEŃ

$(\cdot|\cdot)_\alpha \geq 0$

ρ UNITARNA I NIEPRZYW. $\Longrightarrow$ $\rho \sim \check{\rho} \sim \bar{\rho}$, CZYLI

$$\rho \sim \check{\rho} \qquad \rho \sim \bar{\rho},$$

A TO OZNACZA, ŻE ISTNIEJE

$$\chi : V \xrightarrow{\cong} \bar{V}$$

O WŁASNOŚCI

$$\bar{\rho}(g) = \chi \circ \rho(g) \circ \chi^{-1}, \quad g \in G,$$

SKORO ZAŚ MAMY

$$\check{\rho}(g) \equiv \rho(g^{-1})^* = \alpha^* \circ \overline{\rho(g)} \circ \alpha^{*-1},$$

(WARUNEK PSEUDOUNITARNOŚCI)

TO Z POŁĄCZENIA OBU DOSTAJEMY

$$\check{\varrho}(g) = (\alpha^* \circ \chi) \circ \varrho(g) \circ (\alpha^* \circ \chi)^{-1},$$

WIĘC
$$\begin{cases} \underline{\beta} := \alpha^* \circ \chi : V \xrightarrow{\cong} \bar{V} \equiv \bar{V}^{**} \xrightarrow{\cong} V^* \\ \check{\varrho}(g) = \underline{\beta} \circ \varrho(g) \circ \underline{\beta}^{-1} \end{cases}$$ (por.: str. 37)

LICZYMY

$$(\chi(v) | \bar{w})_\alpha \equiv \langle \chi(v), \alpha(w) \rangle$$

$(\bar{\bar{v}} = v)$ $$= \langle \alpha^* \circ \chi(v), w \rangle$$

$V^{**} \equiv V \longrightarrow$ $$\equiv \langle w, \alpha^* \circ \chi(v) \rangle$$

$$\equiv \langle w, \underline{\beta}(v) \rangle \quad (\lambda)$$

PRZY TYM WIEMY ZE SŁW. 3., ŻE χ MOŻNA DOBRAĆ TAK, BY BYŁO

$$\bar{\chi} \circ \chi \overset{(1)}{=} \varepsilon_1 \, \mathrm{id}_V, \quad \varepsilon_1 \in \{\pm 1\},$$

A Z TW. 8. – ŻE $\underline{\beta}$ SPEŁNIA

$$\underline{\beta}^{*} \overset{(2)}{=} \varepsilon_2 \circ \underline{\beta}\,, \quad \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}.$$

WÓWCZAS ZACHODZI WSZAKŻE TOŻSAMOŚĆ

$$\left(\chi(v) \,|\, \chi(v)\right)_\alpha \overset{(1)}{=} \langle \chi(v), \underline{\beta}(v) \rangle$$

$$= \langle \underline{\beta}^{*}(\chi(v)), v \rangle$$

$$\overset{(2)}{=} \varepsilon_2 \langle \underline{\beta}(\chi(v)), v \rangle$$

⟨WEKTOR, FORMA⟩

$$\equiv \varepsilon_2 \langle v, \underline{\beta}(\chi(v)) \rangle$$

$$\overset{(1)}{=} \varepsilon_2 \left(\overline{\chi(\chi(v)) \,|\, v}\right)_\alpha$$

ex def !

$$\equiv \varepsilon_2 \left(\bar{\chi}(\chi(v)) \,|\, v\right)_\alpha$$

$$\overset{(1)}{=} \varepsilon_1 \varepsilon_2 (v \,|\, v)_\alpha$$

UNITARNOŚĆ ϱ IMPLIKUJE

$(v|v)_\alpha > 0$ DLA $v \neq 0_V$,

ZATEM OSTATECZNIE

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \frac{(\chi(v)|\chi(v))_2}{(v|v)_2} > 0 ,$$

ALE $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$, PRZETO

$$\varepsilon_1 = \pm 1 = \varepsilon_2 ,$$

A TO DAJE TEZĘ DOWODZONEGO TWIERDZENIA. $\square$

<u>UWAGA</u>: ZJAWISKA ALGEBRAICZNE OPISANE POWYŻEJ OBJAWIAJĄ SIĘ W FIZYKALNIE ISTOTNYCH OKOLICZNOŚCIACH KONSTRUKCJI SPINORÓW, CZYLI NIEPRZYWIEDLNYCH REPREZENTACJI GRUPY Spin NAKRYWAJĄCEJ (UNIW.) GRUPĘ LORENTZA/OBROTÓW ...

CECI (N')EST (PAS) LA FIN...