GRUPY W DZIAŁANIU (TG '24/25 1.V & 1.VI [RRS]))

Spis treści

Jak dotąd rozpatrywaliśmy grupy jako byty algebraiczne o aksjomatyce formalizującej wprawdzie nasze intuicje dotyczące struktur symetrii w przyrodzie i modelowaniu fizycznym, ale zarazem czyniącej to za pośrednictwem struktur, aksjomatyki i konstrukcji zasadniczo abstrakcyjnych. W następnej kolejności poddamy ten wyznaczony przez nasze dotychchczasowe rozważania dość luźny związek z koncepcją symetrii konkretyzacji w ramach studium działania grup abstrakcyjnych na zbiorach (za pośrednictwem ich bijekcji). Taka konkretyzacja okaże się nie zawężać w istotny sposób dotychczasowego pola widzenia, a to z racji fundamentalnej własności grup, jaką jest istnienie ich *wiernych* realizacji jako podgrup w grupach symetrycznych zbiorów. Uświadomienie jej sobie pozwoli nam przywrócić i pogłębić odpowiedniość pomiędzy grupami i (prostymi) symetriami, antycypowaną w ich definicji z poprzednich wykładów.

1. Struktura zbioru z działaniem grupy i jej transport

Punktem wyjścia do strukturalnego zrozumienia zasady symetrii jest wprowadzenie pojęcia działania grupy na zbiorze.

Definicja 1. Przyjmijmy notację Def. 1-2-3.3. Niechaj X będzie zbiorem i niech $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ będzie grupą. **Lewostronne działanie grupy G na zbiorze X** to odwzorowanie

$$\lambda \;:\; G \times X \longrightarrow X \;:\; (g, x) \longmapsto g \triangleright x$$

spełniające następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(lDG1) (homomorficzność działania)

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times \lambda"] \arrow[d, "\phi_2 \times \mathrm{id}_X"'] & G \times X \arrow[d, "\lambda"] \\ G \times X \arrow[r, "\lambda"'] & X \end{tikzcd} \qquad \equiv \qquad \forall_{g,h \in G}\ \forall_{x \in X} \;:\; g \triangleright (h \triangleright x) = \phi_2(g,h) \triangleright x\,;$$

(lDG2) (trywialność działania elementu neutralnego)

$$\begin{tikzcd} \{\bullet\} \times X \arrow[r, "\phi_0 \times \mathrm{id}_X"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & G \times X \arrow[d, "\lambda"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \equiv \qquad \forall_{x \in X} \;:\; e \triangleright x = x\,.$$

Parę (X, λ) określamy mianem **zbioru z działaniem lewostronnym G** (lub też – z angielska – **lewostronnym G-zbiorem**).

Prawostronne działanie grupy G na zbiorze X to odwzorowanie

$$\varrho \;:\; X \times G \longrightarrow X \;:\; (x, g) \longmapsto x \triangleleft g$$

spełniające następujące aksjomaty (wyrażone j/w):

(rDG1) (homomorficzność działania)

$$\begin{tikzcd} X \times G \times G \arrow[r, "\varrho \times \mathrm{id}_G"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \times \phi_2"'] & X \times G \arrow[d, "\varrho"] \\ X \times G \arrow[r, "\varrho"'] & X \end{tikzcd} \quad \equiv \quad \forall_{g,h \in G}\ \forall_{x \in X}\ :\ (x \triangleleft h) \triangleleft g = x \triangleleft \phi_2(h, g)\,;$$

(rDG2) (trywialność działania elementu neutralnego)

$$\begin{tikzcd} X \times \{\bullet\} \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \phi_0"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & X \times G \arrow[d, "\varrho"] \\ & X \end{tikzcd} \quad \equiv \quad \forall_{x \in X}\ :\ x \triangleleft e = x\,.$$

Parę (X, ϱ) określamy mianem **zbioru z działaniem prawostronnym** G (lub też **prawostronnym G-zbiorem**). G (lub też **prawostronnym G-zbiorem**).

Jako prosty wniosek z powyższej definicji otrzymujemy

Stwierdzenie 1. W notacji Def. 1 oznaczmy – dla dowolnego $g \in G$ –

$$\lambda_g\ :\ X \longrightarrow X\ :\ x \longmapsto g \triangleright x\,, \qquad \varrho_g\ :\ X \longrightarrow X\ :\ x \longmapsto x \triangleleft g\,.$$

Wówczas odwzorowanie dane wzorem

$$\lambda.\ :\ G \longrightarrow \mathrm{Map}(X, X)\ :\ g \longmapsto \lambda_g$$

jest homomorfizmem monoidu (G, ϕ_2, ϕ_0) w monoid $(\mathrm{Map}(X, X), \circ, \bullet \longmapsto \mathrm{id}_X)$ odwzorowań zbioru X w siebie (ze składaniem odwzorowań oraz odwzorowaniem tożsamościowym jako elementem neutralnym). Homomorfizm ten określamy mianem **lewostronnej realizacji grupy G na zbiorze X** indukowanej przez działanie λ. Analogicznie odwzorowanie dane wzorem

$$\varrho.\ :\ G \longrightarrow \mathrm{Map}(X, X)\ :\ g \longmapsto \varrho_g$$

jest homomorfizmem monoidu $(G, \phi_2^{\mathrm{opp}}, \phi_0)$ w monoid $(\mathrm{Map}(X, X), \circ, \bullet \longmapsto \mathrm{id}_X)$. Homomorfizm ten określamy mianem **prawostronnej realizacji grupy G na zbiorze X** indukowanej przez działanie ϱ.

Uwaga 1. O ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy czasem używać pojęcia „działanie" w odniesieniu do odwzorowania $\lambda.$ (wzgl. $\varrho.$).

Obraz realizacji grupy daje się opisać dużo precyzyjniej.

Stwierdzenie 2. W notacji Def. 1 dowolna realizacja lewostronna (względnie prawostronna) G na X jest homomorfizmem tejże grupy (względnie grupy do niej przeciwnej) w grupę symetryczną na X. I odwrotnie, każdy taki homomorfizm definiuje pewną realizację grupy G na X.

Dowód: Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy homomorfizmami grup i homomorfizmami odnośnych monoidów, jedyną zatem nietrywialną częścią powyższego stwierdzenia jest ta mówiąca o bijektywnym charakterze odwzorowań λ_g i ϱ_g dla dowolnego $g \in G$. Ich surjektywność jest prostą konsekwencją tożsamości

$$\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \lambda_{g \cdot g^{-1}} = \lambda_e = \mathrm{id}_X = \varrho_e = \varrho_{g^{-1} \cdot g} = \varrho_g \circ \varrho_{g^{-1}}\,,$$

oto bowiem otrzymujemy – dla dowolnego $x \in X$ –

$$x = \lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}}(x) \in \mathrm{im}\, \lambda_g$$

oraz

$$x = \varrho_g \circ \varrho_{g^{-1}}(x) \in \mathrm{im}\, \varrho_g\,.$$

Injektywność odwzorowania λ_g dla dowolnego $g \in G$ stwierdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\lambda_g(x) = \lambda_g(y) \implies x = \lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g(x) = \lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g(y) = y\,,$$

w którym $x, y \in X$ są dowolne. Analogiczny rachunek dowodzi injektywności ϱ_g. $\square$

Kolejny wynik pozwala nam ograniczyć się w dalszych rozważaniach, bez jakiejkolwiek straty ogólności, do działań lewostronnych[1]. Oto bowiem

Stwierdzenie 3. W notacji Def. 1 izomorfizm grup $\phi_1 \;:\; (G, \phi_2, \phi_1, \phi_0) \xrightarrow{\cong} (G, \phi_2^{\mathrm{opp}}, \phi_1, \phi_0)$ indukuje kanoniczną bijekcję między zbiorami $\mathrm{Mor}_{\mathrm{L}}(G, X)$ lewostronnych i $\mathrm{Mor}_{\mathrm{R}}(G, X)$ prawostronnych działań grupy G na zbiorze X, daną wzorem

$$^{\mathrm{L}}\phi_1^* \;:\; \mathrm{Mor}_{\mathrm{L}}(G, X) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathrm{R}}(G, X) \;:\; \lambda. \longmapsto \lambda. \circ \phi_1 \,.$$

<u>*Dowód:*</u> Odwrotnością $^{\mathrm{L}}\phi_1^*$ jest odwzorowanie

$$^{\mathrm{R}}\phi_1^* \;:\; \mathrm{Mor}_{\mathrm{R}}(G, X) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathrm{L}}(G, X) \;:\; \varrho. \longmapsto \varrho. \circ \phi_1 \,,$$

por. Stw. 1-2-3.3 (ii). $\square$

Przykłady 1.

(1) **Działanie trywialne**: $\lambda. \;:\; \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}_X \;:\; g \longmapsto \mathrm{id}_X$.

(2) Naturalne działanie grupy symetrycznej $\mathfrak{S}_X$ na zbiorze X poprzez permutacje jego elementów: $\lambda. = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_X}$.

(3) Działanie grupy $\mathbb{Z}$ (z dodawaniem) na zbiorze $\mathbb{R}$ przez przesunięcia, $\lambda. = T. \;:\; \mathbb{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} \;:\; n \longmapsto T_n$, gdzie $T_n \;:\; \mathbb{R} \circlearrowleft \;:\; r \longmapsto r + n$. Innym typem działania tej samej grupy $\mathbb{Z}$ na tym samym zbiorze $\mathbb{R}$ jest odwzorowanie $\lambda. = (-1)^{\cdot} \;:\; \mathbb{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} \;:\; n \longmapsto (-1)^n$, gdzie $(-1)^n \;:\; \mathbb{R} \circlearrowleft \;:\; r \longmapsto (-1)^n \cdot r$. Przykłady te dokumentują możliwość istnienia *całkowicie różnych* realizacji *tej samej* grupy na *tym samym* zbiorze.

(4) **Działanie dołączone** grupy G na sobie: $\lambda. = \mathrm{Ad}. \;:\; G \longrightarrow \mathcal{I}nn(G) \subset \mathfrak{S}_G$. Elementy $g, \mathrm{Ad}_h(g) \in G$ nazywamy (**wzajem**) **sprzężonymi**. Określenie to przenosimy także na podgrupy nazywając podgrupę $\mathrm{Ad}_g(H)$ **podgrupą sprzężoną względem podgrupy** $H \subset G$.

(5) **Działanie (lewostronne) regularne** grupy G na sobie: $\lambda. = \ell. \;:\; G \longrightarrow \mathfrak{S}_G \;:\; g \longmapsto \ell_g$, gdzie $\ell_g \;:\; G \circlearrowleft \;:\; h \longmapsto g \cdot h$.

(6) Działanie grup symetrycznych $\mathfrak{S}_X$ i $\mathfrak{S}_Y$ na $\mathrm{Map}(X, Y)$, dla dowolnej pary zbiorów X, Y, poprzez – odpowiednio – **cofnięcie** permutacji na X (działanie prawe)

$$(\cdot)^* \;:\; \mathfrak{S}_X \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{Map}(X,Y)} \;:\; \sigma \longmapsto \sigma^* \,,$$

$$\sigma^* \;:\; \mathrm{Map}(X, Y) \circlearrowleft \;:\; f \longmapsto f \circ \sigma \,,$$

oraz **pchnięcie**permutacji na Y (działanie lewe)

$$(\cdot)_* \;:\; \mathfrak{S}_Y \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{Map}(X,Y)} \;:\; \sigma \longmapsto \sigma_* \,,$$

$$\sigma_* \;:\; \mathrm{Map}(X, Y) \circlearrowleft \;:\; f \longmapsto \sigma \circ f \,.$$

Złożenie dowolnego z nich z działaniem dowolnej grupy G na odnośnym zbiorze (X wzgl. Y) prowadzi do realizacji tejże grupy na $\mathrm{Map}(X, Y)$, szczególnie istotnej w kontekście fizykalnym (w którym najczęściej zbiór X (wzgl. Y) jest nośnikiem dodatkowej struktury, np. struktury topologicznej lub różniczkowej, jak to ma miejsce choćby w przypadku czasoprzestrzeni (wzgl. przestrzeni wewnętrznych stopni swobody mechaniki lub teorii pola), na której działa grupa izometrii (wzgl. jej podniesienie do wiązki pól)).

(7) Działanie grupy $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1)$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ przez obrót o środku $(0, 0)$, wedle definicji

$$R. \;:\; \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{C}} \;:\; [\theta] \longmapsto R_{[\theta]} \equiv R_\theta \,,$$

[1] Odstępstwem od reguły będzie dyskusja wiązek głównych o grupie strukturalnej G, co do których zwyczajowo zakłada się, że tzw. włókno typowe jest przestrzenią z (regularnym) działaniem prawostronnym G.

$$R_\theta \ : \ \mathbb{C} \circlearrowleft \ : \ z \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \cdot z \,.$$

W opisie kartezjańskim otrzymujemy znajome formuły:

$$\begin{aligned} \Re\left(R_\theta(z)\right) &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \cdot z + \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \cdot z}}{2} \\ &= \frac{(\cos\theta - \mathrm{i}\,\sin\theta) \cdot (\Re(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{im}(z)) + (\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta) \cdot (\Re(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{im}(z))}{2} \\ &= \cos\theta \cdot \Re(z) + \sin\theta \cdot \mathrm{im}(z)\,, \\ \mathrm{im}\left(R_\theta(z)\right) &= \cos\theta \cdot \mathrm{im}(z) - \sin\theta \cdot \Re(z)\,, \end{aligned}$$

które możemy przedstawić zwięźle w zapisie macierzowym:

$$\begin{pmatrix} \Re(R_\theta(z)) \\ \mathrm{im}(R_\theta(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Re(z) \\ \mathrm{im}(z) \end{pmatrix} .$$

Zapis ten ilustruje ciąg izomorfizmów grup $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1) \cong \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$.

(8) Naturalne działanie grupy obrotów w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o środku w punkcie o współrzędnych $(0,0,0)$ ogranicza się do dowolnej 2-sfery o środku w tymże punkcie.

(9) Niechaj $\left(G, \cdot, (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\right)$ będzie dowolną grupą i niech

$$H_n := \{ \ (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^{\times n} \quad | \quad \gamma_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n = e \ \} \,.$$

Grupa $\mathfrak{B}_n$ warkoczy o n pasmach z Przykł. 1-2-3.3 (6) działa na H_n w sposób określony jednoznacznie przez działanie generatorów grupy:

$$\begin{aligned} &[\tau_i] \triangleright (g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_n) \\ := \ &\left(g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \mathrm{Ad}_{g_{i+1}^{-1}}(g_i), g_{i+2}, g_{i+3}, \ldots, g_n\right) . \end{aligned}$$

Mamy podstawowe

Twierdzenie 1 (Cayleya)**.** Przyjmijmy notację Def. 1. Dla każdej grupy G istnieje zbiór X, a wraz z nim – *mono*morfizm grup

$$\lambda_\cdot \ : \ G \longrightarrow \mathfrak{S}_X \,.$$

Innymi słowy, każda grupa dopuszcza *wierną* realizację na pewnym zbiorze.

W szczególności grupa rzędu n zanurza się w grupie symetrycznej $\mathfrak{S}_n$.

Dowód: Rozważmy $X := G$ z działaniem lewostronnym regularnym $\lambda_\cdot \equiv \ell_\cdot$ z Przykł. 1 (5). Dla dowolnej pary $g, h \in G$ zachodzi implikacja

$$\lambda_g = \lambda_h \quad \Longrightarrow \quad g = g \cdot e = \ell_g(e) \equiv \lambda_g(e) = \lambda_h(e) \equiv \ell_h(e) = h \cdot e = h\,,$$

która przesądza o injektywności homomorfizmu $\lambda_\cdot$. W świetle identyfikacji $X \equiv G$ druga część tezy twierdzenia staje się oczywista. □

Ciekawej „wariacji na temat" dostarcza

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy notację Def. 1-2-3.5, 1-2-3.7, 1-2-3.10 i 1. Niechaj G będzie grupą, $H \subseteq G$ zaś – jej podgrupą o indeksie $(G : H) = n \in \mathbb{N}^\times$. Wówczas istnieje homomorfizm grup $\rho_H \ : \ G \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ o jądrze $\ker \rho_H \subseteq H$.

Dowód: Odnieśmy tezę Tw. 1 do zbioru $X = G/H$ o mocy $|X| \equiv (G : H) = n$, dla którego mamy naturalne **działanie indukowane**

(1) $$[\ell]_\cdot \ : \ G \times G/H \longrightarrow G/H \ : \ (h, gH) \longmapsto (h \cdot g)H\,,$$

czyli, równoważnie, homomorfizm

$$[\ell]_\cdot \ : \ G \longrightarrow \mathfrak{S}_{G/H} \cong \mathfrak{S}_n \,.$$

Dowolny element jego jądra spełnia tożsamość

$$[l]_g(eH) = \mathrm{id}_{G/H}(eH) \quad\Longleftrightarrow\quad gH = H \quad\Longleftrightarrow\quad g \in H\,,$$

tj. $\ker \rho_H \subseteq H$. □

Prostą konsekwencją powyższego jest

Corollarium 1. Każda grupa prosta (w rozumieniu Def. 1-2-3.12) zawierająca podgrupę (właściwą) o indeksie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ zanurza się monomorficznie w $\mathfrak{S}_n$.

<u>*Dowód:*</u> Nich $H \subseteq G$ będzie podgrupą grupy G, o której mowa w treści stwierdzenia. W świetle Stw. 4 istnieje homomorfizm $\rho_H \;:\; G \longrightarrow \mathfrak{S}_n$. Na mocy Stw. 1-2-3.17 podgrupa $\ker \rho_H \subseteq H \subsetneq G$ jest normalna, co wobec prostoty G oznacza $\ker \rho_H = \{e\}$, czyli injektywność ρ_H właśnie. □

Zgodnie z ogólną logiką wykładu dyskusję wstępną zakończymy opisem odwzorowań między nośnikami działania grupy, zgodnych z tą strukturą.

Definicja 2. Przyjmijmy notację Def. 1 i niech $(X^{(\alpha)}, \lambda^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą zbiorami z działaniem lewostronnym grupy G. **Odwzorowanie lewostronnie G-ekwiwariantne** (albo inaczej **lewostronne G-odwzorowanie**, wzgl. **lewostronny G-homomorfizm**) $(X^{(1)}, \lambda^{(1)})$ w $(X^{(2)}, \lambda^{(2)})$ to odwzorowanie

$$f \;:\; X^{(1)} \longrightarrow X^{(2)}$$

spełniające aksjomat (wyrażony przez diagram przemienny i równoważne zdanie logiczne):

$$\text{(lGE)} \qquad \begin{tikzcd} G \times X^{(1)} \arrow[r, "\lambda^{(1)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times f"'] & X^{(1)} \arrow[d, "f"] \\ G \times X^{(2)} \arrow[r, "\lambda^{(2)}"] & X^{(2)} \end{tikzcd} \qquad \equiv \qquad \forall_{(g,x) \in G \times X^{(1)}} \;:\; f \circ \lambda^{(1)}_g(x) = \lambda^{(2)}_g \circ f(x)\,.$$

Jeśli f jest przy tym bijekcją, to mówimy o **G-ekwiwariantnym izomorfizmie zbiorów z działaniem lewostronnym**.

Odwzorowanie prawostronnie G-ekwiwariantne definiujemy analogicznie.

Przykłady 2.

(1) Niechaj $\triangle_{(0,0)}$ będzie zbiorem trójkątów na płaszczyźnie o jednym z wierzchołków w punkcie $(0,0)$. Na zbiorze tym grupa $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ odwracalnych przekształceń liniowych punktów płaszczyzny działa w naturalny sposób: obrazem punktu trójkąta o współrzędnych (x,y) względem działania macierzy $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ jest punkt płaszczyzny o współrzędnych $(a\cdot x + b\cdot y, c\cdot x + d\cdot y)$. Odwzorowanie $A \;:\; \triangle_{(0,0)} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ przyporządkowujące trójkątowi jego pole powierzchni jest $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$-ekwiwariantne względem rzeczonego działania na $\triangle_{(0,0)}$ i następującego działania na $\mathbb{R}_{>0}$:

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \;:\; \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), r\right) \longmapsto (a\cdot d - b\cdot c)\cdot r\,.$$

(2) Dla pary grup $(G^{(\alpha)}, \phi_2^{(\alpha)}, \phi_1^{(\alpha)}, \phi_0^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1,2\}$ dowolny komomorfizmy $\chi \;:\; G^{(1)} \longrightarrow G^{(2)}$ jest odwzorowaniem $G^{(1)}$-ekwiwariantnym względem działania dołączonego,

$$\chi \;:\; \left(G^{(1)}, \mathrm{Ad}\right) \longrightarrow \left(G^{(2)}, \mathrm{Ad} \circ (\chi \times \mathrm{id}_{G^{(2)}})\right)\,,$$

przy czym

$$\mathrm{Ad} \;:\; G^{(1)} \times G^{(1)} \longrightarrow G^{(1)} \;:\; (g,h) \longmapsto \mathrm{Ad}_g(h)\,,$$

por. Stw. 1-2-3.8, jak również względem działania lewostronnego regularnego,

$$\chi \;:\; \left(G^{(1)}, \ell\right) \longrightarrow \left(G^{(2)}, \ell \circ (\chi \times \mathrm{id}_{G^{(2)}})\right)\,,$$

przy czym

$$\ell \ : \ G^{(1)} \times G^{(1)} \longrightarrow G^{(1)} \ : \ (g,h) \longmapsto g \cdot h \,,$$

por. Przykł. 1 (5). W tym ostatnim przypadku konkretnym przykładem jest automorfizm antypodalny $\alpha \ : \ \mathrm{U}(1) \circlearrowleft \ : \ u \longmapsto -u$ na okręgu jednostkowym $\mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$.

(3) Niechaj $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ będzie grupą, $(\mathbb{K}, A, M, \mathsf{P}, \mathrm{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ zaś – dowolnym ciałem, traktowanym jako zbiór z trywialnym działaniem $\lambda_0 \ : \ G \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \ : \ (g,k) \longmapsto k$. **Funkcje klas grupy** G **o wartościach z ciała** $\mathbb{K}$ są definiowane jako odwzorowania G-ekwiwariantne

$$f \ : \ (G, \mathrm{Ad}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \lambda_0) \,.$$

Konkretnym przykładem takiej funkcji jest znak permutacji $\mathrm{sign} \ : \ \mathfrak{S}_X \longrightarrow \{-1, 1\}$.

Elementarnej charakteryzacji odwzorowań G-ekwiwariantnych dostarcza

Stwierdzenie 5. Odwrotność dowolnego bijektywnego odwzorowania G-ekwiwariantnego jest także odwzorowaniem G-ekwiwariantnym.

Dowód: Przykładając odwrotność f do obu stron równości

$$f \circ \lambda_g^{(1)}(x) = \lambda_g^{(2)} \circ f(x) \,,$$

zapisanej dla dowolnych $g \in G$ oraz $x \in X^{(1)}$ i definiującej odwzorwanie G-ekwiwariantne, otrzymujemy

$$\lambda_g^{(1)}(x) = \mathrm{id}_{X^{(1)}} \circ \lambda_g^{(1)}(x) = f^{-1} \circ f \circ \lambda_g^{(1)}(x) = f^{-1} \circ \lambda_g^{(2)} \circ f(x) \,,$$

skoro jednak dla każdego $x \in X^{(1)}$ istnieje, i to dokładnie jedno, $y \in X^{(2)}$ o własności

$$x = f^{-1}(y) \,,$$

a przy tym $X^{(2)} = f(X^{(1)})$, to wnioskujemy, że

$$\lambda_g^{(1)} \circ f^{-1}(y) = f^{-1} \circ \lambda_g^{(2)}(y)$$

dla dowolnych $g \in G$ i $y \in X^{(2)}$. □

Dalszej charakteryzacji tych odwzorowań dokonamy po wprowadzeniu dodatkowych pojęć.

2. Stratyfikacja grupy i G-zbioru indukowana przez działanie

Zbadamy teraz anatomię działania grupy na zbiorze zarówno od strony grupy, jak i od strony zbioru, po to by sklasyfikować w naturalny sposób typy działań i ostatecznie powiązać obie składowe opisu w terminach teorii mocy. Zaczniemy dyskusję od strony grupy.

Definicja 3. W notacji Def. 1 **stabilizator** (lub **grupa izotropii**) **elementu** $x \in X$ nośnika działania grupy G to zbiór

$$G_x := \{ \ g \in G \quad | \quad g \triangleright x = x \ \} \,.$$

Przykłady 3.

(1) Cała grupa G jest stabilizatorem dowolnego elementu nośnika reprezentacji trywialnej.

(2) Stabilizatorem elementu $x \in X$ względem naturalnego działania $\mathfrak{S}_X$ jest zbiór wszystkich tych permutacji σ elementów X, których **nośnik**

$$\mathrm{supp}(\sigma) := \{ \ y \in X \quad | \quad \sigma(y) \neq y \ \} \,,$$

nie zawiera x. I tak, np.,

$$(\mathfrak{S}_3)_1 = \{\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}, (23)\} \cong \mathbb{Z}_2 \,.$$

(3) Stabilizatorem dowolnego elementu $\mathbb{R}$ względem działania $T_\cdot$ z Przykł. 1 (3) jest grupa trywialna. Stabilizatorem każdego elementu $r \neq 0$ względem działania $(-1)^\cdot$ z tego samego przykładu jest podgrupa $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. W przypadku $r = 0$ stabilizatorem względem tego działania jest pełna grupa $\mathbb{Z}$.

(4) Stabilizator elementu $g \in G$ względem działania dołączonego $\mathrm{Ad}.$ z Przykł. 1 (4) określamy mianem **centralizatora** g i oznaczamy jako

$$C_G(g) := \{\ h \in G \quad | \quad \mathrm{Ad}_h(g) = g\ \}\,.$$

Ogólniej, dla dowolnego podzbioru $S \subset G$ definiujemy centralizator S jako podgrupę

$$C_G(S) := \{\ g \in G \quad | \quad \forall_{x \in S}\ :\ \mathrm{Ad}_g(x) = x\ \}\,.$$

(5) Stabilizatorem dowolnego punktu x 2-sfery o środku w punkcie o współrzędnych $(0,0,0)$ względem (ograniczenia) działania grupy obrotów z Przykł. 1 (8) jest podgrupa obrotów (płaskich) wokół osi przechodzącej przez x oraz przez punkt o współrzędnych $(0,0,0)$.

(6) Stabilizatorem dowolnego wierzchołka n-kąta foremnego względem działania jego grupy symetrii D_{2n} jest podgrupa (izomorficzna z) $\mathbb{Z}_2$ generowana przez odbicie symetryczne względem dwusiecznej kąta przy tymże wierzchołku.

Mamy oczywiste

Stwierdzenie 6. Stabilizator dowolnego elementu nośnika działania grupy jest podgrupą tej ostatniej.

Ponadto

Stwierdzenie 7. W notacji Def. 1-2-3.7 i 1 zachodzi tożsamość

$$\ker \lambda. = \bigcap_{x \in X} G_x\,.$$

Przykłady 4.

(1) $\ker \lambda. = G$ dla trywialnego działania $\lambda.$ grupy G na dowolnym zbiorze.

(2) Jądro naturalnego działania $\mathfrak{S}_X$ na X jest trywialne.

(3) $\ker T. = \{0\}$ oraz $\ker (-1)^{\cdot} = 2\mathbb{Z}$ dla działań $T.$ i $(-1)^{\cdot}$ grupy $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ z Przykł. 1 (3).

(4) $\ker \mathrm{Ad}. = \mathscr{Z}(G)$ dla działania dołączonego grupy G na sobie z Przykł. 1 (4). Działanie regularne z Przykł. 1 (5) ma jądro trywialne.

W następnej kolejności zajmiemy się relacjami, jakie działanie grupy wprowadza w nośniku realizacji. W tym celu będziemy potrzebować dodatkowego pojęcia, które określa

Definicja 4. W notacji Def. 1 **orbita elementu** $x \in X$ **względem działania** λ to zbiór

$$G \triangleright x := \{\ \lambda_g(x) \quad | \quad g \in G\ \}\,.$$

Przykłady 5.

(1) Orbitą elementu $x \in X$ względem działania trywialnego grupy G na X jest singleton $\{x\}$.

(2) Orbitą elementu $x \in X$ względem naturalnego działania $\mathfrak{S}_X$ na X jest X.

(3) Zbiór $\{-r, r\}$ jest orbitą działania $(-1)^{\cdot}$ grupy $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ z Przykł. 1 (3).

(4) Orbitę elementu $g \in G$ względem działania dołączonego grupy G na sobie z Przykł. 1 (4) określamy mianem **klasy sprzężoności** g i oznaczamy jako

$$C(g) := \{\ \mathrm{Ad}_h(g) \quad | \quad h \in G\ \}\,.$$

(5) Orbitą elementu $g \in G$ względem działania regularnego grupy G na sobie z Przykł. 1 (5) jest G. Orbitą tegoż $g \in G$ względem działania regularnego podgrupy H na grupie G,

$$\ell.\ :\ H \times G \longrightarrow G\ :\ (h, g) \longmapsto h \cdot g\,,$$

jest warstwa prawostronna Hg.

(6) Orbitą elementu $z \in \mathbb{C}$ względem działania $R.$ grupy $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ z Przykł. 1 (7) jest okrąg $|z|\mathrm{U}(1)$.

(7) Orbitą dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}^3$ względem naturalnego działania grupy obrotów w $\mathbb{R}^3$ (względem punktu o współrzędnych $(0,0,0)$) jest 2-sfera o środku w punkcie o współrzędnych $(0,0,0)$ i promieniu $|x|$.

Możemy już teraz wysłowić

Stwierdzenie 8. W notacji Def. ?? i 1 relacja na $X \ni x, y$ zadana, jak następuje:

$$x \sim_\lambda y \iff x \in G \triangleright y\,,$$

jest relacją równoważności. Działanie grupy zadaje zatem rozkład nośnika na sumę rozłączną orbit względem tego działania.

<u>*Dowód*</u>*:*

(1) $x = e \triangleright x \in G \triangleright x \implies x \sim_\lambda x$.
(2) $x \sim_\lambda y \iff \exists_{g \in G} : x = g \triangleright y \implies g^{-1} \triangleright x = g^{-1} \triangleright (g \triangleright y) = \left(g^{-1} \cdot g\right) \triangleright y = e \triangleright y = x \implies y \sim_\lambda x$.
(3) $(\, x \sim_\lambda y \wedge y \sim_\lambda z \,) \iff \exists_{g_1, g_2 \in G} : (\, x = g_1 \triangleright y \wedge y = g_2 \triangleright z \,) \implies x = g_1 \triangleright (g_2 \triangleright z) = (g_1 \cdot g_2) \triangleright z \implies x \sim_\lambda z$.

□

Wprowadzenie pojęć stabilizatora i orbity pozwala w naturalny sposób sklasyfikować działania grupy na zbiorze.

Definicja 5. W notacji Def. 1, 3 i 4 oraz Stw. 8 działanie λ nazywamy

- **trywialnym**, jeśli $\forall_{g \in G} : \lambda_g = \mathrm{id}_X$, tj. wszystkie orbity działania są jednoelementowe;
- **przechodnim** (lub **tranzytywnym**), jeśli $\forall_{x,y \in X} : x \sim_\lambda y$, tj. zbiór X jest pojedynczą orbitą $G \triangleright x = X$ (dowolnego) swojego elementu $x \in X$;
- **wolnym**, jeśli $\forall_{\substack{g,h \in G \\ x \in X}} : g \triangleright x = h \triangleright x \implies g = h$, tj. $\forall_{x \in X} : G_x = \{e\}$, co oznacza, że odwzorowanie λ_g nie ma punktów stałych dla $g \in G \setminus \{e\}$, a wtedy określamy X mianem **przestrzeni jednorodnej**;
- **wiernym** (lub **efektywnym**), jeśli $\forall_{g,h \in G} : \big(\, g \neq h \implies \exists_{x \in X} : g \triangleright x \neq h \triangleright x \,\big)$, czyli $\ker \lambda. = \{e\}$, a wtedy grupa G jest kanonicznie izomorficzna z podgrupą $\mathrm{im}\,\lambda. \subset \mathfrak{S}_X$;
- **regularnym**, jeśli jest ono przechodnie i wolne, a wtedy określamy X mianem **G-torsora** lub **głównej przestrzeni jednorodnej**.

Przykłady 6.

(1) Ograniczenie działania grupy na zbiorze do jądra tego działania jest działaniem trywialnym. W szczególności działanie dołączone grupy przemiennej na sobie jest tego typu.

(2) Działanie grupy alternującej na zbiorze n-elementowym jest przechodnie dla każdego $n \geq 3$. Tego typu jest też działanie grupy diedralnej rzędu $2n$ na zbiorze wierzchołków n-kąta foremnego. To samo dotyczy (indukowanego) działania lewostronnego regularnego grupy G na zbiorze warstw G/H względem podgrupy $H \subset G$.

(3) Antypodalne działanie grupy odbić względem punktu o współrzędnych $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ (izomorficznej z $\mathbb{Z}_2$) na dowolnej 2-sferze o środku w tym punkcie jest wolne. Tę własność ma również działanie regularne dowolnej grupy na sobie.

(4) Działanie dołączone grupy G na sobie z Przykł. 1 (4) jest wierne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathscr{Z}(G) = \{e\}$. Podobnie, (indukowane) działanie lewostronne regularne grupy G na zbiorze warstw G/H względem podgrupy $H \subset G$ jest tego typu wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$.

(5) Zbiór izomorfizmów $\mathrm{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)})$ pomiędzy dowolnymi dwiema grupami $G^{(1)}$ i $G^{(2)}$ jest torsorem grupy $\mathrm{Aut}(G^{(1)})$ względem działania prawostronnego

$$\varrho \;:\; \mathrm{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)}) \times \mathrm{Aut}(G^{(1)}) \longrightarrow \mathrm{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)}) \;:\; (\chi, \alpha) \longmapsto \chi \circ \alpha\,.$$

Jest on zarazem torsorem grupy $\mathrm{Aut}(G^{(2)})$ względem działania lewostronnego

$$\lambda \;:\; \mathrm{Aut}(G^{(2)}) \times \mathrm{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)}) \;:\; (\alpha, \chi) \longmapsto \alpha \circ \chi\,.$$

W bezpośredniej konsekwencji Stw. 1-2-3.17 i 1-2-3.19 oraz Tw. 1-2-3.1 wyprowadzamy

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy notację Def. 1-2-3.7 i Stw. 1-2-3.19. Istnieje kanoniczny monomorfizm grup

$$G/\ker \lambda_{.} \rightarrowtail \mathfrak{S}_X\,,$$

który indukuje wierne działanie grupy ilorazowej na X według wzoru

$$\widetilde{\lambda} \;:\; G/\ker \lambda_{.} \times X \longrightarrow X \;:\; (g\ker \lambda_{.}, x) \longmapsto g \rhd x\,.$$

Dostajemy ponadto

Stwierdzenie 10. Stabilizatory elementów z tej samej (dowolnej) orbity działania grupy są jej podgrupami wzajem sprzężonymi, a więc – w szczególności – izomorficznymi.

<u>*Dowód:*</u> Z jednej strony

$$\forall_{\substack{x \in X \\ (g,h) \in G \times G_x}} \;:\; \mathrm{Ad}_g(h) \rhd (g \rhd x) = \big(g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot g\big) \rhd x = g \rhd (h \rhd x) = g \rhd x\,,$$

a zatem $\mathrm{Ad}_g(G_x) \subset G_{g \rhd x}$. Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \forall_{\substack{x \in X \\ (g,h) \in G \times G_{g \rhd x}}} \;:\; \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(h) \rhd x \;&=\; \big(g^{-1} \cdot h \cdot g\big) \rhd x = g^{-1} \rhd (h \rhd (g \rhd x)) \\ &=\; g^{-1} \rhd (g \rhd x) = x\,, \end{aligned}$$

a zatem $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(G_{g \rhd x}) \subset G_x \iff G_{g \rhd x} \subset \mathrm{Ad}_g(G_x)$. Ostatecznie więc

$$G_{g \rhd x} = \mathrm{Ad}_g(G_x)\,.$$

□

Zgromadzone dotychczas fakty i pojęcia stanowią podstawę do sformułowania kilku istotnych stwierdzeń, które szczegółowo charakteryzują działanie grupy na zbiorze.

Twierdzenie 2 (O klasyfikacji orbit)**.** Przyjmijmy notację Def. 1, 3 i 4 oraz Stw. 1-2-3.19 i rozważmy, dla dowolnego elementu $x \in X$, zbiór warstw G/G_x z działaniem

$$[\ell] \;:\; G \times (G/G_x) \longrightarrow G/G_x \;:\; (g, hG_x) \longmapsto (g \cdot h)G_x\,.$$

Istnieje kanoniczny G-ekwiwariantny izomorfizm

$$G/G_x \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow G \triangleright x \ ,$$

stąd też zachodzi tożsamość

$$|G| = |G_x| \cdot |G \triangleright x| \, .$$

W szczególności więc moc dowolnej orbity w skończonym zbiorze z działaniem grupy skończonej jest dzielnikiem mocy tejże grupy.

<u>*Dowód:*</u> Pożądane odwzorowanie ma postać

$$f_x \ : \ G/G_x \longrightarrow G \triangleright x \ : \ gG_x \longmapsto g \triangleright x \, .$$

Jest ono dobrze określone, gdyż dla dowolnego reprezentanta $h \in gG_x$ możemy zapisać $h = g \cdot k$ dla pewnego $k \in G_x$, a w takim razie $g \triangleright x = g \triangleright (k \triangleright x) = (g \cdot k) \triangleright x = h \triangleright x$. Jego G-ekwiwariantność sprawdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$f_x \circ [\ell](h, gG_x) = f_x\left((h \cdot g)G_x\right) = (h \cdot g) \triangleright x = \lambda(h, g \triangleright x) = \lambda\left(h, f_x(gG_x)\right) \, .$$

Jest ono jawnie surjektywne, pozostaje przeto pokazać, że jest injekcją, co sprawdzamy wprost:

$$\begin{aligned} f_x(gG_x) = f_x(hG_x) \quad &\Longleftrightarrow \quad g \triangleright x = h \triangleright x \iff \left(h^{-1} \cdot g\right) \triangleright x = x \iff h^{-1} \cdot g \in G_x \\ &\Longleftrightarrow \quad g \in hG_x \iff gG_x = hG_x \, . \end{aligned}$$

Ostatnia część tezy dowodzonego twierdzenia jest bezpośrednim następstwem Cor. 1-2-3.2, oto bowiem na mocy tożsamości (1-2-3.4) dostajemy $|G| = |G_x| \cdot (G : G_x) = |G_x| \cdot |G \triangleright x|$. □

Twierdzenie powyższe znajduje bezpośrednie zastosowanie w następującym wyniku, wykorzystywanym w rozważaniach natury enumeracyjnej dotyczących zbiorów z działaniem grup skończonych.

Stwierdzenie 11. (Lemat Cauchy'ego–Frobeniusa, zwany też Lematem (nie od) Burnside'a) Przyjmijmy notację Def. 1, a ponadto oznaczmy przez

$$X/G := \{ \ G \triangleright x \quad | \quad x \in X \ \}$$

zbiór orbit działania grupy G na zbiorze X i przez

$$X^g := \{ \ x \in X \quad | \quad g \triangleright x = x \ \}$$

zbiór punktów stałych odwzorowania λ_g. Wówczas zachodzi tożsamość

$$|G| \cdot |X/G| = \sum_{g \in G} |X^g| \, .$$

<u>*Dowód:*</u> Wykorzystując Stw. 8 zapiszemy

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |X^g| \quad &= \quad \sum_{g \in G} \sum_{G \triangleright x \in X/G} |(G \triangleright x)^g| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} |\{ \ (g, y) \in G \times (G \triangleright x) \quad | \quad g \triangleright y = y \ \}| \\ &= \quad \sum_{G \triangleright x \in X/G} \sum_{y \in G \triangleright x} |\{ \ g \in G \quad | \quad g \triangleright y = y \ \}| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} \sum_{y \in G \triangleright x} |G_y| \, , \end{aligned}$$

a dalej – wobec Stw. 10 –

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} \sum_{y \in G \triangleright x} |G_x| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} |G \triangleright x| \cdot |G_x| \, ,$$

czyli też – na mocy Tw. 2 –

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} |G| = |G| \cdot |X/G| \, .$$

□