TEORIA GRUP I

WYKŁADY X, XI i XII

2024/25

W DALSZEJ CZĘŚCI WYKŁADU SKUPIMY UWAGĘ NA GRUPACH SKOŃCZONYCH, KTÓRYCH TEORIA REPREZENTACJI JEST – JAK WSKAZUJĄ DOTYCHCZASOWE ROZWAŻANIA – SZCZEGÓLNIE PRZYSTĘPNA. ZACZNIEMY OD WPROWADZENIA POJĘCIA PEŁNIĄCEGO ROLĘ CENTRALNĄ W TAK ZORIENTOWANEJ ANALIZIE.

Def.: NIECHAJ $V \in \mathrm{ObVect}_{\mathbb{C}}^{<\infty}$ I (V,ρ) REPREZENTACJA G. **CHARAKTER** (V,ρ) TO FUNKCJA

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C} : g \mapsto \underbrace{\mathrm{tr}_V(\rho(g))}_{\chi_\rho(g)}$$

<u>Obserwacja</u>: $\chi_\varrho(e) = \mathrm{tr}_V(\varrho(e))$
$$= \mathrm{tr}_V(\mathrm{id}_V)$$
$$= \dim_{\mathbb{C}} V.$$

MAMY PODSTAWOWE

<u>Stw. 1.</u> NIECHAJ (V, ϱ) j/w. JEST CHARAKTER JEST STAŁY NA KLASACH SPRZĘŻONOŚCI W G.

<u>D</u>: $\chi_\varrho(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}_V(\varrho(hgh^{-1}))$
$$= \mathrm{tr}_V(\varrho(h)\circ\varrho(g)\circ\varrho(h^{-1}))$$
$$= \mathrm{tr}_V(\varrho(h^{-1})\circ\varrho(h)\circ\varrho(g))$$
$$= \mathrm{tr}_V(\varrho(h^{-1}h)\circ\varrho(g)) = \mathrm{tr}_V(\varrho(e)\circ\varrho(g))$$
$$= \mathrm{tr}_V(\mathrm{id}_V\circ\varrho(g)) = \mathrm{tr}_V(\varrho(g)) \equiv \chi_\varrho(g) \quad \square$$

POWYŻSZA PROSTA OBSERWACJA WPISUJE CHARAKTERY W SZERSZY KADR, KTÓRY WYZNACZA

Def.: NIECHAJ G - GRUPA. NA PRZESTRZENI $\mathbb{C}$-LINIOWEJ

$$\mathrm{Map}_0(G,\mathbb{C}) = \{ f \in \mathrm{Map}(G,\mathbb{C}) \mid |\underbrace{f^{-1}(\mathbb{C}^\times)}_{\equiv\, \mathrm{supp}\, f}| < \infty \}$$

FUNKCJI NA G (O WARTOŚCIACH ZESPOLONYCH) O SKOŃCZONYM NOŚNIKU ISTNIEJE STRUKTURA $\mathbb{C}$-ALGEBRY ŁĄCZNEJ Z JEDNOŚCIĄ ZADAWANA PRZEZ SPLOT:

$$* : \mathrm{Map}_0(G,\mathbb{C})^{\times 2} \longrightarrow \mathrm{Map}_0(G,\mathbb{C})$$

$$: (f_1, f_2) \longmapsto \sum_{g \in G} P^*_{g^{-1}} f_1 \cdot f_2(g) \equiv f_1 * f_2,$$

GDZIE $\quad P : G \to S_G : g \longmapsto P_g,$

$$\rho_g : G \circlearrowleft : h \mapsto h \cdot g$$

JEST REPREZENTACJĄ PRAWĄ REGULARNĄ G NA SOBIE, TJ.

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{h \in G} f_1(g \cdot h^{-1}) f_2(h).$$

ALGEBRĘ TĘ OKREŚLAMY MIANEM <u>ALGEBRY GRUPOWEJ</u> G i OZNACZAMY SYMBOLEM $\mathbb{C}_0[G]$.

<u>UWAGA</u>: POWYŻSZA DEFINICJA MA SENS, OTO BOWIEM

1° $\mathrm{supp}(f_1 * f_2) \subseteq \mathrm{supp} f_1 \cdot \mathrm{supp} f_2$

2° $\forall f \in \mathrm{Map}_0(G, \mathbb{C})$:

$$f * \delta_e(g) = \sum_{h\in G} f(gh^{-1})\cdot \delta_e(h)$$

$$= f(g\cdot e^{-1}) = f(g)$$

ORAZ

$$\delta_e * f(g) = \sum_{h\in G} \delta_e(g\cdot h^{-1})\cdot f(h)$$

$$= \sum_{h\in G} \delta_h(g)\cdot f(h) = f(g).$$

3° $\forall f_1, f_2, f_3 \in Map_0(G, \mathbb{C})$:

$$(f_1 * f_2) * f_3(g) = \sum_{h\in G} (f_1 * f_2)(g h^{-1}) f_3(h)$$

$$= \sum_{h,k\in G} f_1(g\cdot h^{-1}\cdot k^{-1}) f_2(k) f_3(h)$$

5

$$= \sum_{h,k\in G} f_1\left(g\cdot(k\cdot h)^{-1}\right) f_2\left((k\cdot h)\cdot h^{-1}\right) f_3(h)$$

$$= \sum_{l,h\in G} f_1\left(g\cdot l^{-1}\right) f_2\left(l\cdot h^{-1}\right) f_3(h)$$

$$= \sum_{l\in G} f_1\left(g\cdot l^{-1}\right) f_2 * f_3(l)$$

$$= f_1 * (f_2 * f_3)(g)$$

4° DWU-$\mathbb{C}$-LINIOWOŚĆ $*$ (WZGL. PUNKTOWEJ STRUKTURY $\mathbb{C}$-LINIOWEJ NA $\mathrm{Map}_0(G,\mathbb{C})$) JEST OCZYWISTĄ KONSEKWENCJĄ DWU-$\mathbb{C}$-LINIOWOŚCI MNOŻENIA W $\mathbb{C}$.

6

POWYŻSZA DEFINICJA POZWALA SFORMUŁOWAĆ

Def.: NIECHAJ G - GRUPA.

FUNKCJA CENTRALNA NA G TO TAKA $c \in Map_0(G, \mathbb{C})$, KTÓRA SPEŁNIA WARUNEK

$$\forall f \in Map_0(G, \mathbb{C}) : f * c = c * f .$$

PODALGEBRĘ ZŁOŻONĄ Z TAKICH FUNKCJI OKREŚLAMY MIANEM CENTRUM $\mathbb{C}_0[G]$ I OZNACZAMY SYMBOLEM $Z(\mathbb{C}_0[G])$.

Z UWAGI Z POPRZEDNIMI ROZWAŻANIAMI USTALA

Stw. 2. NIECH G - GRUPA.

$$Z(\mathbb{C}_0[G]) = Map_0(G, \mathbb{C})^{Ad^*},$$

GDZIE PO PRAWEJ STRONIE MAMY DO CZYNIENIA

Z FUNKCJAMI NIEZMIENNICZYMI WZGLĘDEM DZIAŁANIA KO-DOŁĄCZONEGO

$$Ad^* : G \longrightarrow G_{Map_0(G,\mathbb{C})}$$

$$: g \longmapsto Ad^*_g$$

$$\left(Ad^*_g(f) := f \circ Ad_g \right),$$

TJ. Z FUNKCJAMI STAŁYMI NA Ad_G-ORBITACH, CZYLI KLASACH SPRZĘŻONOŚCI

$$C(g) = \{ Ad_h(g) \equiv h \cdot g \cdot h^{-1} \mid h \in G \},$$

$$g \in G.$$

D: BAZĄ $Map_0(G,\mathbb{C})$ JEST UKŁAD

$\{\delta_g\}_{g \in G}$, A ZATEM

$$\forall f \in \mathrm{Map}_0(G, \mathbb{C}) : f * c = c * f$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall g \in G : \delta_g * c = c * \delta_g$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall g, h \in G : c * \delta_g(h) \equiv \sum_{k \in G} c(h \cdot k^{-1}) \delta_g(k)$$

$$= c(h \cdot g^{-1})$$

$$\|$$

$$\delta_g * c(h) \equiv \sum_{k \in G} \delta_g(h \cdot k^{-1}) c(k)$$

$$= c(g^{-1} \cdot h)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall a, b \in G : c(a \cdot b \cdot a^{-1}) = c(b)$$

$\square$

Corr. 1. CHARAKTER DOWOLNEJ SKOŃCZENIE WYMIAROWEJ REPREZENTACJI GRUPY G JEST ELEMENTEM $Z(\mathbb{C}_0[G])$.

———— × ————

PODSTAWOWĄ W KONTEKŚCIE TEORII REPREZENTACJI WŁASNOŚĆ CHARAKTERÓW IDENTYFIKUJE

Stw. 3. NIECHAJ $V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{<\infty}$ I NIECH (V, ρ_A), $A \in \{1,2\}$ REPREZENTACJE.

WÓWCZAS $\rho_1 \sim \rho_2 \Longrightarrow \chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

D: $\rho_1 \sim \rho_2 \iff \exists\, \chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$:

$$\chi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \chi \quad \wedge \quad \exists\, \chi^{-1}$$

$$\Rightarrow \rho_2(g) = \chi \circ \rho_1(g) \circ \chi^{-1}$$

$$\Rightarrow \chi_{\rho_2}(g) \equiv \mathrm{tr}_V(\rho_2(g)) = \mathrm{tr}_V(\chi \circ \rho_1(g) \circ \chi^{-1})$$

$$= \mathrm{tr}_V(\chi^{-1} \circ \chi \circ \rho_1(g)) = \mathrm{tr}_V(\mathrm{id}_V \circ \rho_1(g))$$

$$= \mathrm{tr}_V(\rho_1(g)) \equiv \chi_{\rho_1}(g). \quad \square$$

OBSERWACJE:

(1) $\chi_{\varrho_1 \oplus \varrho_2} = \chi_{\varrho_1} + \chi_{\varrho_2}$

ISTOTNIE,

$$tr_{V_1 \oplus V_2}\left(\varrho_1(g) \oplus \varrho_2(g)\right) \xleftarrow{} [\varrho_1 \oplus \varrho_2(g)] = [\varrho_1(g)] \oplus [\varrho_2(g)]$$

$$= tr_{V_1}(\varrho_1(g)) + tr_{V_2}(\varrho_2(g)).$$

(2) $\chi_{\varrho_1 \otimes \varrho_2} = \chi_{\varrho_1} \cdot \chi_{\varrho_2}$

BAZY DUALNE

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon^i(e_j) &= \delta^i_j \\ \varphi^A(f_B) &= \delta^A_B \end{aligned}}$$

ISTOTNIE,

$$tr_{V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2}\left(\varrho_1(g) \otimes \varrho_2(g)\right)$$

$$= \sum_{i,A} \varepsilon^i \otimes \varphi^A\left(\left(\varrho_1(g) \otimes \varrho_2(g)\right)(e_i \otimes f_A)\right)$$

$$= \sum_{i,A} \sum_{j,B} \varepsilon^i \otimes \varphi^A\left(\varrho_1(g)_{ij}\, \varrho_2(g)_{AB}\, e_j \otimes f_B\right)$$

11

$$= \sum_{i,A} \sum_{j,B} \rho_1(g)_{ij}\, \rho_2(g)_{AB}\, \varepsilon^i(e_j)\, \varphi^A(f_B)$$

$$= \sum_{i,A} \sum_{j,B} \rho_1(g)_{ij}\, \rho_2(g)_{AB}\, \delta^i{}_j\, \delta^A{}_B$$

$$= \sum_{i,A} \rho_1(g)_{ii}\, \rho_2(g)_{AA}$$

$$\equiv \sum_i \varepsilon^i\big(\rho_1(g)(e_i)\big) \sum_A \varphi^A\big(\rho_2(g)(f_A)\big)$$

$$\equiv \mathrm{tr}_{V_1}\big(\rho_1(g)\big) \cdot \mathrm{tr}_{V_2}\big(\rho_2(g)\big)$$

———— × ————

(3) $\chi_{\bar\rho} = \overline{\chi_\rho}$ (PATRZ: WYKŁADY $\underline{\text{VI}}$ i $\underline{\text{VII}}$, str. 37)

ISTOTNIE,

$$\mathrm{tr}_{\bar V}\, \bar\rho(g) \equiv \sum_i \bar\rho(g)_{ii} \equiv \sum_i \overline{\rho(g)_{ii}} = \overline{\sum_i \rho(g)_{ii}}$$

$$\equiv \overline{\mathrm{tr}_V\, \rho(g)}\,.$$

———— × ————

(4) $\chi_\rho(e) \equiv \mathrm{tr}_V(\rho(e)) = \mathrm{tr}_V(\mathrm{id}_V) = \dim \rho$

—— x ——

(5) $|G| < \infty$, ρ - ZESPOLONA

$$\Downarrow$$

$$\forall g \in G : \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$$

ISTOTNIE, $|G| < \infty \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall g \in G : g^N = e$

$\Rightarrow \forall g \in G : \mathrm{Sp}\,\rho(g) \subset \sqrt[N]{1}$, WIĘC

WYBRAWSZY BAZĘ JORDANOWSKĄ $\rho(g)$,

WYZNACZAMY WPROST

$$\mathrm{tr}_V(\rho(g^{-1})) = \mathrm{tr}_V(\rho(g)^{-1}) \equiv \sum_i \rho(g)^{-1}_{ii}$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\rho(g)} \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda; \rho(g)) \cdot \lambda^{-1} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\rho(g)} \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda; \rho(g)) \cdot \overline{\lambda}$$

$$= \overline{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\rho(g)} \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda; \rho(g)) \cdot \lambda} \equiv \overline{\mathrm{tr}(\rho(g))}.$$

—— x ——

W DALSZEJ CZĘŚCI NASZYCH ROZWAŻAŃ USTALAMY

→ G - GRUPA SKOŃCZONA, $|G| < \infty$

→ $\ell^2(G)$ - PRZESTRZEŃ UNITARNA (FUNKCJI SUMOWALNYCH Z KWADRATEM)

$$:\subseteq (\mathrm{Map}(G,\mathbb{C}), (\cdot|\cdot))$$

Z FORMĄ HERMITOWSKĄ

$$(\cdot|\cdot) : \mathrm{Map}(G,\mathbb{C})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$: (f_1, f_2) \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} \cdot f_2(g)$$

→ $[\mathrm{Irr}(G)]$ = ZBIÓR KLAS RÓWNOWAŻNOŚCI (NIETRYWIALNYCH) REPREZENTACJI NIEPRZYWIEDLNYCH G

→ $\forall \alpha \in [\mathrm{Irr}(G)]$: WYBIERAMY UNITARNEGO REPREZENTANTA $(H_\alpha, \pi^\alpha) \in \alpha$, PATRZ: Tw. 7. WYKŁADY $\overline{\mathrm{VI}}$ i $\overline{\mathrm{VII}}$ A DLA NIEGO $\chi_\alpha \equiv \chi_{\pi_\alpha}$

DOTYCHCZASOWE USTALENIA UZUPEŁNIA

Stw. 4 NIECHAJ G - GRUPA SKOŃCZONA (NIETRYWIALNA), (V,ϱ) ZAŚ - JEJ REPREZENTACJA NIEPRZYWIEDLNA, WÓWCZAS $\dim\varrho \leq |G|$, WIĘC W SZCZEGÓLNOŚCI $\dim\varrho < \infty$.

D: WYBIERZMY (DOWOLNIE) $v \in V \setminus \{0_V\}$, A WTEDY $\varrho(G) \triangleright v \equiv \{\varrho(g)(v) \mid g \in G\}$ JEST ϱ-NIEZMIENNICZA, PONIEWAŻ JEDNAK $\varrho(G) \triangleright v \neq \{0_V\}$, PRZETO $\varrho(G) \triangleright v = V$ Z RACJI NIEPRZYWIEDLNOŚCI ϱ, WIĘC $\dim\varrho \leq |\varrho(G) \triangleright v| = |G| < \infty$. $\square$

STĄD

$\rightarrow \forall \alpha \in [\mathrm{Irr}(G)] : d_\alpha := \dim \pi^\alpha$ (GDZIE π^α J/W)

W POWYŻSZYCH OZNACZENIACH FORMUŁUJEMY ARCYWAŻNE

Tw. 1. NIECHAJ G - GRUPA O $|G|<\infty$

DLA DANEJ $(\mathcal{H}_\alpha, \pi^\alpha) \in \alpha \in [\mathrm{Irr}(G)]$ WYBIERAMY (DOWOLNIE) BAZĘ $\{v_i^\alpha\}_{i\in\overline{1,d_\alpha}}$ ORTONORMALNĄ $(\mathcal{H}_\alpha, (\cdot|\cdot)_\alpha)$, A W NIEJ - DLA $g\in G$ -

$$\pi_{ij}^\alpha(g) := \left(v_j^\alpha \,\middle|\, \pi^\alpha(g)(v_i^\alpha)\right).$$

WÓWCZAS $\left\{ \sqrt{d_\alpha} \cdot \pi_{ij}^\alpha \;\middle|\; i,j\in\overline{1,d_\alpha};\ \alpha\in[\mathrm{Irr}(G)] \right\}$ JEST ORTONORMALNY W $\ell^2(G)$.

D: USTALMY $\alpha\in[\mathrm{Irr}(G)]$ I ROZWAŻMY DOWOLNY $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_\alpha$. TEN DEFINIUJE

$$\chi[\pi^\alpha] := \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g\in G} \pi^\alpha(g)^\dagger \circ \chi \circ \pi^\alpha(g)$$

$\widehat{\mathrm{End}}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_\alpha$.

WOBEC UNITARNOŚCI $(\mathcal{H}_\alpha, \pi^\alpha)$ ZACHODZI

$\forall g \in G$

$$\pi^\alpha(g) \circ \chi[\pi^\alpha] = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi^\alpha(g) \circ \pi^\alpha(h)^\dagger \circ \chi \circ \pi^\alpha(h)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi^\alpha(g^{-1})^\dagger \circ \pi^\alpha(h)^\dagger \circ \chi \circ \pi^\alpha(h)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \left(\pi^\alpha(h) \circ \pi^\alpha(g^{-1})\right)^\dagger \circ \chi \circ \pi^\alpha(h)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi^\alpha(h \cdot g^{-1})^\dagger \circ \chi \circ \pi^\alpha(h \cdot g^{-1}) \circ \pi^\alpha(g)$$

$$\equiv \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \pi^\alpha(k)^\dagger \circ \chi \circ \pi^\alpha(k) \circ \pi^\alpha(g)$$

$$= \chi[\pi^\alpha] \circ \pi^\alpha(g)$$, ZATEM

$$\chi[\pi^\alpha] \in C_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\alpha}\left(\pi^\alpha(G)\right)$$

$$\equiv$$

$$\left\{ \chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\alpha \mid \forall g \in G : [\chi, \pi^\alpha(g)] = 0 \right\}$$

(CENTRALIZATOR PODZBIORU

$$\pi^\alpha(G) \equiv \{ \pi^\alpha(g) \mid g \in G \}$$

W ALGEBRZE $\mathrm{End}_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\alpha$)

JEDNAKOWOŻ NA MOCY TW. 2. Z WYKŁADÓW VI : VII

JEST $$C_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\alpha}\left(\pi^\alpha(G)\right) = \langle \mathrm{id}_{\mathcal{H}_\alpha} \rangle_{\mathbb{C}} ,$$

PRZETO $$\exists \lambda_\chi \in \mathbb{C} : \chi[\pi^\alpha] = \lambda_\chi \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}_\alpha} ,$$

ZATEM TAKŻE

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_\alpha}\left(\chi[\pi^\alpha]\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_\alpha}\left(\pi^\alpha(g)^\dagger \circ \chi \circ \pi^\alpha(g)\right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_\alpha}\left(\pi^\alpha(g) \circ \pi^\alpha(g^{-1}) \circ \chi\right)$$

48

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr_{H_\alpha}\left(\pi^\alpha(g \cdot g^{-1}) \circ \chi\right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr_{H_\alpha}\left(\pi^\alpha(e) \circ \chi\right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr_{H_\alpha}\left(id_{H_\alpha} \circ \chi\right)$$

$$= tr_{H_\alpha}(\chi) \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1 = tr_{H_\alpha}(\chi)$$

$$= tr_{H_\alpha}\left(\lambda_\chi \circ id_{H_\alpha}\right) = \lambda_\chi \cdot tr_{H_\alpha}(id_{H_\alpha})$$

$= \lambda_\chi \cdot d_\alpha$, gyLi

$$\chi[\pi^\alpha] = \frac{tr_{H_\alpha}(\chi)}{d_\alpha} \circ id_{H_\alpha} \quad \text{(HIPI)}$$

ZASTOSUJMY POWYŻSZE DO ENDOMORFIZMU

$$\chi = (v^\alpha_j | \cdot) \otimes v^\alpha_i \equiv \mathcal{E}^\alpha_{ij}, \quad \text{DLA KTÓREGO}$$

$$\mathrm{tr}_{H_\alpha}(\mathcal{E}_{ij}) \equiv \sum_{k=1}^{d_\alpha} \left(v^\alpha_k \middle| \mathcal{E}^\alpha_{ij}(v^\alpha_k) \right)$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{d_\alpha} \left(v^\alpha_k \middle| (v^\alpha_j | v^\alpha_k) \cdot v^\alpha_i \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{d_\alpha} \delta_{jk} \left(v^\alpha_k \middle| v^\alpha_i \right)$$

$$= \left(v^\alpha_j \middle| v^\alpha_i \right) = \delta_{ij}$$

ORAZ $\pi^\alpha(g)^\dagger \circ \mathcal{E}^\alpha_{ij} \circ \pi^\alpha(g)$

$$\equiv \pi^\alpha(g)^\dagger \circ \left(v^\alpha_j \middle| \pi^\alpha(g)(\cdot) \right) \otimes v^\alpha_i$$

$$= \pi^\alpha(g)^\dagger \circ \left(\pi^\alpha(g)^\dagger (v^\alpha_j) \middle| \cdot \right) \otimes v^\alpha_i$$

$$\equiv \left(\pi^\alpha(g)^\dagger (v_j^\alpha) \middle| \cdot \right) \otimes \pi^\alpha(g)^\dagger (v_i^\alpha) .$$

POLICZMY (k,l)-TY WYRAZ MACIERZOWY OBU STRON FORMUŁY (HIPi) ZE STR. 19:

$$\left(v_l^\alpha \middle| \mathcal{E}_{ij}[\pi^\alpha] (v_k^\alpha) \right) = \frac{\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{E}_{ij}^\alpha)}{d_\alpha} \delta_{k,l}$$

$$\|$$

$$\left(v_l^\alpha \middle| \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\pi^\alpha(g)^\dagger (v_j^\alpha) \middle| \cdot \right) \otimes \pi^\alpha(g)^\dagger (v_i) (v_k^\alpha) \right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(v_l^\alpha \middle| \left(\pi^\alpha(g)^\dagger (v_j^\alpha) \middle| v_k^\alpha \right) \cdot \pi^\alpha(g)^\dagger (v_i^\alpha) \right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\pi^\alpha(g)^\dagger (v_j^\alpha) \middle| v_k^\alpha \right) \cdot \left(v_l^\alpha \middle| \pi^\alpha(g)^\dagger (v_i^\alpha) \right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(v_j^\alpha \middle| \pi^\alpha(g) (v_k^\alpha) \right) \cdot \overline{\left(\pi^\alpha(g)^\dagger (v_i^\alpha) \middle| v_l^\alpha \right)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(v_j^\alpha \middle| \pi^\alpha(g)(v_k^\alpha) \right) \cdot \overline{\left(v_i^\alpha \middle| \pi^\alpha(g)(v_l^\alpha) \right)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\pi^\alpha(g)_{li}} \; \pi^\alpha(g)_{kj}$$

$$\equiv \left(\pi^\alpha(g)_{li} \middle| \pi^\alpha(g)_{kj} \right)$$

JEST ZATEM

$$\left(\sqrt{d_\alpha}\, \pi^\alpha(g)_{li} \middle| \sqrt{d_\alpha}\, \pi^\alpha(g)_{kj} \right) = \delta_{k,l}\, \mathrm{tr}_{H_\alpha}(\varepsilon_{ij}^\alpha)$$

$$= \delta_{k,l} \sum_{m=1}^{d_\alpha} \left(v_m^\alpha \middle| \varepsilon_{ij}^\alpha(v_m^\alpha) \right)$$

$$= \delta_{k,l} \sum_{m=1}^{d_\alpha} \left(v_m^\alpha \middle| (v_j^\alpha|\cdot) \otimes v_i^\alpha (v_m^\alpha) \right)$$

$$= \delta_{k,l} \sum_{m=1}^{d_\alpha} \left(v_m^\alpha \middle| (v_j^\alpha | v_m^\alpha) \triangleright v_i^\alpha \right)$$

$$= \delta_{k,l} \sum_{m=1}^{d_\alpha} \delta_{j,m} \delta_{m,i} = \delta_{k,l} \delta_{i,j} .$$

NIECHAJ TERAZ $\alpha, \beta \in [\mathrm{Irr}(G)]$, $\alpha \neq \beta$, CZYLI $(\mathcal{H}_\alpha, \pi^\alpha) \not\cong (\mathcal{H}_\beta, \pi^\beta)$, A WTEDY DLA DOWOLNEGO $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\beta, \mathcal{H}_\alpha)$ INDUKOWANE PRZEZEŃ ODWZOROWANIE $\mathbb{C}$-LINIOWE

$$\chi[\pi^\alpha, \pi^\beta] := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi^\alpha(g)^\dagger \circ \chi \circ \pi^\beta(g)$$

JEST – PODOBNIE JAK $\chi[\pi^\alpha] \equiv \chi[\pi^\alpha, \pi^\alpha]$ – SPLATACZEM,

$$\forall g \in G : \chi[\pi^\alpha, \pi^\beta] \circ \pi^\beta(g) = \pi^\alpha(g) \circ \chi[\pi^\alpha, \pi^\beta],$$

WIĘC TEŻ WOBEC NIERÓWNOWAŻNOŚCI π^α I π^β STWIERDZAMY – NA GRUNCIE TW. 1 Z WYKŁADÓW VI I VII –

$\chi[\pi^\alpha, \pi^\beta] \equiv 0$. W SZCZEGÓLNOŚCI

TEZA TA ODNIESIONA DO

$$\chi = (v_j^\beta | \cdot) \otimes v_i^\alpha \equiv \mathcal{E}_{ij}^{\alpha\beta}$$

$$i \in \overline{1, d_\alpha}, \; j \in \overline{1, d_\beta}$$

DAJE NAM

$$0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi^\alpha(g)^\dagger \circ (v_j^\beta | \cdot) \otimes v_i^\alpha \circ \pi^\beta(g)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\pi^\beta(g)^\dagger (v_j^\beta) | \cdot \right) \otimes \pi^\alpha(g)^\dagger (v_i^\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \left(v_k^\alpha \Big| \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\pi^\beta(g)^\dagger (v_j^\beta) | \cdot \right) \otimes \pi^\alpha(g)^\dagger (v_i^\alpha) (v_l^\beta) \right)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \left(\pi^{\beta}(g)^{\dagger}(v^{\beta}_{j}) \middle| v^{\beta}_{L}\right) \cdot \overline{\left(\pi^{\alpha}(g)^{\dagger}(v^{\alpha}_{i}) \middle| v^{\alpha}_{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \left(v^{\beta}_{j} \middle| \pi^{\beta}(g)(v^{\beta}_{L})\right) \cdot \overline{\left(v^{\alpha}_{i} \middle| \pi^{\alpha}(g)(v^{\alpha}_{k})\right)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\pi^{\alpha}_{ki}(g)} \cdot \pi^{\beta}_{Lj}(g)$$

$= \left(\pi^{\alpha}_{ki} \middle| \alpha^{\beta}_{Lj}\right)$, CO W POŁĄCZENIU

Z POPRZEDNIM WYNIKIEM DAJE TEZĘ:

$$\left(\sqrt{d_\alpha}\,\pi^{\alpha}_{ij} \middle| \sqrt{d_\beta}\,\pi^{\beta}_{KL}\right) = \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{iK}\,\delta_{jL} \quad \square$$

MAMY ELEMENTARNE ALE ISTOTNE

25

Corr. 2. $|G|<\infty \Rightarrow |[\mathrm{Irr}(G)]|<\infty$

D: $\dim_{\mathbb{C}} l^2(G) = |G|$ (BAZA: $\{\delta_g\}_{g\in G}$),

ZATEM $\forall \{v_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ ORTONORMALNY:

$$|\{v_\xi\}_{\xi\in\Xi}| = |\Xi| \leqslant |G|.$$

ALE DLA DANEGO $\alpha\in[\mathrm{Irr}(G)]$ MAMY

$d_\alpha \times d_\alpha$ FUNKCJI π^α_{ij}, PRZETO

$$\sum_{\alpha\in[\mathrm{Irr}(G)]} d_\alpha \times d_\alpha \leqslant |G| < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$|[\mathrm{Irr}(G)]| < \infty . \quad \square$$

MOŻEMY JUŻ TERAZ WYSŁOWIĆ I UDOWODNIĆ

TW. 2. $|G|<\infty \Rightarrow \{\chi_\alpha \mid \alpha\in[\mathrm{Irr}(G)]\}$ JEST BAZĄ ORTONORMALNĄ

$$\mathrm{Char}(G) = \mathcal{Z}(\mathbb{C}[G]).$$

D: ZACZNIEMY OD WYKAZANIA ORTONORMALNOŚCI UKŁADU $\mathrm{Char}(G)$. W ŚWIETLE TW. 1. (I W DOTYCHCZASOWYM ZAPISIE) ZACHODZI

$$(\chi_\alpha|\chi_\beta) \equiv \Big(\sum_{i=1}^{d_\alpha}\pi^\alpha_{ii}\,\Big|\,\sum_{j=1}^{d_\beta}\pi^\beta_{jj}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\beta}\left(\pi^\alpha_{ii}\,\middle|\,\pi^\beta_{jj}\right)$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\beta}\frac{1}{\sqrt{d_\alpha d_\beta}}\left(\sqrt{d_\alpha}\,\pi^\alpha_{ii}\,\middle|\,\sqrt{d_\beta}\,\pi^\beta_{jj}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\beta} \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ij}\,\delta_{ij}\,\frac{1}{\sqrt{d_\alpha d_\beta}}$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\,\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\alpha} \delta_{ij}\,\delta_{ij}$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\,\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i=1}^{d_\alpha} 1 = \delta_{\alpha\beta},$$

CO JEST REZULTATEM ANTYCYPOWANYM.

UDOWODNIENIE ZUPEŁNOŚCI $\mathrm{Char}(G)$ WYMAGA NASTĘPUJĄCEJ KONSTRUKCJI POMOCNICZEJ:

LEMAT: $\forall\, (H,\pi) \in \mathrm{Rep}(G)^{<\infty}$:

$$\left(\mathbb{C}_0[G] \ni f \xmapsto{\tilde{\pi}} \sum_{g\in G} f(g) \triangleright \pi(g)\right) \in \underset{(\text{łącznych})}{\mathrm{Hom}}{}_{\mathbf{nAlg}_{\mathbb{C}}}\left(\mathbb{C}_0[G], \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H)\right)$$

(TZN. JEST HOMOMORFIZMEM $\mathbb{C}$-ALGEBR Z JEDNOŚCIĄ).

<u>DL</u>: $\mathbb{C}$-LINIOWOŚĆ $\tilde{\pi}$ JEST OCZYWISTA, SPRAWDZAMY ZATEM TYLKO

* HOMOMORFICZNOŚĆ: $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}_0[G]$:

$$\tilde{\pi}(f_1) \circ \tilde{\pi}(f_2) = \sum_{g\in G} f_1(g) \triangleright \pi(g) \circ \sum_{h\in G} f_2(h) \triangleright \pi(h)$$

skończoność sum

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_{g,h\in G} f_1(g) \underset{(\mathbb{C})}{\cdot} f_2(h) \triangleright \pi(g) \circ \pi(h)$$

$$= \sum_{g,h\in G} f_1(g)\cdot f_2(h) \triangleright \pi(g\cdot h)$$

$$= \sum_{k\in G} \Big(\sum_{\substack{g,h\in G \\ g\cdot h = k}} f_1(g)\cdot f_2(h) \Big) \triangleright \pi(k)$$

$g\cdot h = k \Rightarrow g = k\cdot h^{-1}$

$$= \sum_{k\in G} \Big(\sum_{h\in G} f_1(k\cdot h^{-1}) f_2(h) \Big) \triangleright \pi(k)$$

$$\equiv \sum_{k\in G} f_1 * f_2(k) \triangleright \pi(k) \equiv \tilde{\pi}(f_1 * f_2) \checkmark$$

** UNITALNOŚĆ:

$$\tilde{\pi}(\delta_e) \equiv \sum_{g\in G} \delta_e(g) \triangleright \pi(g) = \pi(e) = id_H \checkmark$$

$\boxtimes$

— x —

ROZWAŻMY $\mathcal{C} := \bigoplus_{\alpha\in[\mathrm{Irr}(G)]} \langle \chi_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$ DLA $|G|<\infty$.

JEST TO NIEZWYRODNIAŁA PODPRZESTRZEŃ

$\mathcal{L}(\mathbb{C}[G])$, ZATEM

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}[G]) = \mathcal{C} \oplus_{(\cdot|\cdot)} \mathcal{C}^{\perp(\cdot|\cdot)}$$

(DOPEŁNIENIE $(\cdot|\cdot)$-ORTOGONALNE)

NIECH $f \in \mathcal{C}^{\perp(\cdot|\cdot)}$, TJ. $\forall \alpha\in[\mathrm{Irr}(G)] : f \perp \chi_\alpha$,

A WTEDY $\tilde{\pi}^\alpha(\bar{f}) \equiv \sum_{g\in G} \overline{f(g)} \triangleright \pi^\alpha(g) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\alpha$ (30)