Wykład IX

2023/24

Przechodząc do dyskusji algebr półprostych, zauważymy

<u>Tw. 3.</u> Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego. Istnieją podalgebry $\{\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{g}\}_{i \in \overline{1,N}}$, $N < \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ będące prostymi algebrami Liego

i jedyny rozkład prosty (96)

$$\mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i \quad (\text{jako algebry Liego}).$$

Podalgebry $\mathfrak{h}$ są określone jednoznacznie z dokładnością do permutacji.

D: Ponieważ $\mathfrak{g}$ ma nietrywialny ideał $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ rozkłada się jako algebra Liego na sumę prostą $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ na mocy stw. 19, przy czym $\mathfrak{h}^{\perp}$ także jest ideałem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{h}$ zawiera nietrywialny ideał (w $\mathfrak{h}$!) $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{h}$, to oczywiście $[\mathfrak{h}^{\perp}, \mathfrak{h}']_{\mathfrak{g}} = \underset{\mathfrak{h}'}{0}$ oraz $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}'$, przeto $\mathfrak{h}'$ jest też ideałem w $\mathfrak{g}$. W takim razie

$$\mathfrak{h}'' := (\mathfrak{h}')^{\perp} \cap \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$$

jest ideałem w $\mathfrak{g}$ i otrzymujemy – ponownie na mocy Stw. 19 —

$$\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}'') \oplus \mathfrak{h}^{\perp}.$$

Po skończonej liczbie kroków uzyskujemy tym sposobem rozkład prosty algebry Liego $\mathfrak{k}$ na sumę prostą algebr nieposiadających nietrywialnych ideałów, a następnie ten sam algorytm stosujemy do ideału $\mathfrak{k}^\perp$, otrzymując ostatecznie rozkład prosty $\mathfrak{g}$ na sumę prostą

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i$$

takichże algebr. Pozostaje pokazać, że każde $\mathfrak{g}_j$ ma wymiar liniowy co najmniej 2.

<u>A.a.</u> Niech $\mathfrak{g}_i$ będzie jednym z nich i załóżmy, że $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_i = 1$. Wówczas $\mathfrak{g}_i$ jest <u>komutatywna</u>, a zatem $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (wszak $\forall j \in \overline{1,N} \setminus \{i\} : [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_i]_{\mathfrak{g}} = 0$). Ale $\mathfrak{g}$ półprosta, zatem $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. ↯

Niech teraz $\bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)} \simeq \mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N_2} \mathfrak{g}_i^{(2)}$ (100)

będą dwoma takimi rozkładami.

Każda podalgebra $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, a zatem podreprezentacją reprezentacji $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.

Jako taka $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest nieprzywiedlna, bo w p.p. zawierałaby podprzestrzeń, która będąc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-niezmiennicza, byłaby w szczególności $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i^{(A)}}$-niezmiennicza, czyli – nietrywialnym ideałem w $\mathfrak{g}^{(A)}_i$,

w sprzeczności z prostotą $\mathfrak{g}^{(A)}_i$. Przy tym

$$i \neq j \implies \left(\mathfrak{g}^{(A)}_i, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right) \not\cong \left(\mathfrak{g}^{(A)}_j, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right),$$

bo $\mathfrak{g}^{(A)}_i$ działa na $\mathfrak{g}^{(A)}_i$ nietrywialnie

(wszak $\mathfrak{g}^{(A)}_i$ jest niekomutatywna),

a na $\mathfrak{g}^{(A)}_j$ – trywialnie ($\Leftarrow \mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_A} \mathfrak{g}^{(A)}_i$ jako algebra Liego)

Rozważmy teraz ideał $\mathfrak{g}^{(2)}_i \subset \mathfrak{g}$. Jako że rzut kanoniczny $pr_j : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_j^{(1)}$

jest splotaczem między $ad_{\mathfrak{g}}$ i $ad_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_j^{(1)}}$

(wszak $\mathfrak{g}_j^{(1)}$ jest ideałem), zatem

$\pi_{j;i} = pr_j|_{\mathfrak{g}_i^{(2)}} : (\mathfrak{g}_i^{(2)}, ad_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_i^{(2)}}) \longrightarrow (\mathfrak{g}_j^{(1)}, ad_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_j^{(1)}})$ (nieprzywiedlne obie!) jest albo 0, albo $\cong$ na mocy

Lematu Schura (Tw. 2.1°). Skoro jednak

$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)}$, to istnieje $j \in \overline{1,N_1}$: $\pi_{j;i}$ jest $\cong$. (inaczej $\equiv 0$)

Wtedy też jednak $\pi_{k\neq j;i} = 0$, bo reprezentacje

$$\left(\mathfrak{g}_k^{(1)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_k^{(1)}}\right) \not\cong \left(\mathfrak{g}_j^{(1)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_j^{(1)}}\right) \text{ dla } k \neq j.$$

Jest zatem $\mathfrak{g}_i^{(2)} = \mathfrak{g}_j^{(1)}$ (równość, a nie tylko $\simeq$!).

$\square$

Uzyskawszy nietrywialny wgląd w „anatomię" półprostych algebr Lie'go, przejdziemy obecnie do ich analizy pod kątem klasyfikacji ich reprezentacji. W tym celu wprowadzimy

w $\mathfrak{g}$ (półprostej) elementy (współ-) 104
diagonalizowalne w każdej reprezentacji,
więc w szczególności – w reprezentacji
dołączonej $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.

Def. 17. PODALGEBRA CARTANA

(półprostej) algebry Liego $\mathfrak{g}$ (nad $\mathbb{C}$) to podprzestrzeń (zespolona) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o własnościach:

(C1) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ (KOMUTATYWNOŚĆ)

(C2) $\forall X \in \mathfrak{g} : \left([\mathfrak{h}, X]_{\mathfrak{g}} = 0 \Rightarrow X \in \mathfrak{h} \right)$ (MAKSYMALNOŚĆ)

(C3) $\forall H \in \mathfrak{h}$: ad_H jest diagonalizowalny. (WSPÓŁDIAGONALIZOWALNOŚĆ).

mamy uspokajające

<u>Tw. 4</u> [O istnieniu podalgebry Cartana]

Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ będzie (dowolną) maksymalną podalgebrą komutatywną. Wtedy podalgebra

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$$

jest podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$. W szczególności podalgebra Cartana istnieje.

D: Rozważmy dowolną 1-wym. podprzestrzeń $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{k}$ ($\neq \mathfrak{k}$, bo $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = 0$). To jest podalgebra komutatywna. Niech teraz $S_{\mathfrak{t}_0}$ będzie zbiorem podalgebr komutatywnych w $\mathfrak{k}$ zawierających $\mathfrak{t}_0$. Wówczas maksymalny element tego zbioru, $\mathfrak{t} := \bigcup_{s \in S_{\mathfrak{t}_0}} s \subset \mathfrak{k}$ jest przykładem maksymalnej podalgebry komutatywnej.

Niech teraz $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ dla $\mathfrak{t}$ j.w.

Wówczas $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ i musimy pokazać, że jest maksymalna.

Niech $X \in \mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ spełnia $[X,\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$

$\equiv X_1 \otimes 1 + X_2 \otimes i$, a wtedy także

$[X,\mathfrak{t}\otimes 1]_{\mathfrak{g}} = 0$, więc $[X_1,\mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}} = 0 = [X_2,\mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}}$!

ponieważ jednak $\mathfrak{t}$ maksymalna, przeto nieodzownie $X_1, X_2 \in \mathfrak{t}$, czyli $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}$.

Jeśli teraz $(\cdot|\cdot)$ jest formą hermitowską,
o której mowa w Stw. 18, to

$$\forall H \in \mathfrak{t} \left(\subset \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \right) : \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_H \text{ jest skośnie}$$

hermitowski, więc też diagonalizowalny,
a ponieważ dla dowolnych dwóch $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}$
zachodzi

$$\left[\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2} \right]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{[H_1,H_2]_{\mathfrak{t}}} = 0,$$

przeto operatory $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}$ i $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}$ są
współ-diagonalizowalne. W takim przypadku

więc także dowolny element

$$H = H_1 \otimes 1 + H_2 \otimes i \quad \text{ma} \quad ad_H \equiv ad^{\mathbb{C}}_{H_1} + i\, ad^{\mathbb{C}}_{H_2}$$

diagonalizowalny i – znów –

$$\forall H, \tilde{H} \in \mathfrak{h} : [ad_H, ad_{\tilde{H}}]_{gl(\mathfrak{g})} = ad_{[H,\tilde{H}]_{\mathfrak{g}}} = 0,$$

więc $\{ad_H\}_{H \in \mathfrak{h}}$ są współdiagonalizowalne.

<u>NB</u>: Dowodzi się, że dowolne dwie $\square$ podalgebry Cartana są izomorficzne, przy czym izomorfizm taki rozszerza się do automorfizmu $\mathfrak{g}$.

To uproszczenie

Def. 18. RZĄD półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$ to wymiar jej (dowolnej) podalgebry Cartana.

W dalszej części wykładu zbadamy rozkład $\mathfrak{g}$ na podprzestrzenie własne $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ ...

Wobec $\mathbb{C}$-liniowego charakteru odwzorowania $\mathrm{ad}_{\cdot} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ zależność wartości własnej operatora ad_H, $H \in \mathfrak{h}$ od H jest $\mathbb{C}$-liniowa. Ma zatem sens

Przyjmijmy dotychczasowe założenia.

Def. 19 Jeżeli istnieje niezerowy wektor $X \in \mathfrak{g}$ o własności

$$\mathrm{ad}_H(X) = \alpha(H) \cdot X \,, \quad H \in \mathfrak{h},$$

funkcjonał $\mathbb{C}$-liniowy $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ określamy mianem PIERWIASTKA $\mathfrak{g}$ dla $\mathfrak{h}$.

Istnienie niezdegenerowanej formy hermitowskiej na $\mathfrak{g}$, o której mowa w Stw. 18, wyróżnia izomorfizm $\mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$, który pozwala utożsamić zdefiniować pierwiastek jako taki $\alpha \in \mathfrak{h} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, dla którego istnieje $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ o własności 113

$$\forall H \in \mathfrak{h} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X .$$

Zbiór wszystkich pierwiastków będziemy oznaczać symbolem $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$. ||

Dla dowolnego pierwiastka $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ (114)

określony PRZESTRZEŃ PIERWIASTKOWA

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{t} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \}.$$

Dowolny jej element $X \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_\mathfrak{g}\}$ nazywamy WEKTOREM PIERWIASTKOWYM α.

Ozn.: Ogólniej oznaczamy - dla dowolnego $\alpha \in \mathfrak{t}$:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{t} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \},$$

przy czym $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{t}$ oraz $\alpha \notin Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Rightarrow \mathfrak{g}_\alpha = 0$.

Mamy oczywiście

Przyjmijmy jeszcze dotychczasowe.

Stw. 21. Dowolna półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ o podalgebrze Cartana $\mathfrak{h}$ ma jako przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa rozkład

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Przyjrzyjmy się bliżej przykładom pierwiastkowym ...

Str. 22. Przyjmijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha,\beta \in \mathfrak{t} : \quad [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} .$$

W szczególności, ilekroć $\alpha+\beta \notin Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$,

$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_\mathfrak{g} = 0$.

D: Tożsamość Jacobiego może być zinterpretowana jako stwierdzenie:

$\forall X \in \mathfrak{g}$: ad_X jest różniczkowaniem

iloczynu

algebry $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$,

$$\mathrm{ad}_X([Y,Z]_{\mathfrak{g}}) = [\mathrm{ad}_X(Y), Z]_{\mathfrak{g}} + [Y, \mathrm{ad}_X(Z)]_{\mathfrak{g}} .$$

W szczególności $\forall (X,Y) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_H([X,Y]_{\mathfrak{g}}) &= [\mathrm{ad}_H(X), Y]_{\mathfrak{g}} + [X, \mathrm{ad}_H(Y)]_{\mathfrak{g}} \\
&= [(\alpha|H) \triangleright X, Y]_{\mathfrak{g}} + [X, (\beta|H) \triangleright Y]_{\mathfrak{g}} \\
&= (\alpha+\beta|H) \triangleright [X,Y]_{\mathfrak{g}} . \quad \square
\end{aligned}$$

Mamy dalej

Str. 23. Przyjmijmy dotychczasową notację:

$$Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{t}\otimes i .$$

D: Jako że ad_H, $H\in\mathfrak{t}$ jest skośnie hermitowski, przeto $\mathrm{Sp}\,\mathrm{ad}_H \subset i\mathbb{R}\,(\subset \mathbb{C})$, ale to oznacza, że $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}):\ (\alpha|H)\in i\mathbb{R}$.

Niech $\underset{\alpha_1,\alpha_2\in\mathfrak{t}}{\alpha = \alpha_1\otimes 1 + \alpha_2\otimes i}$, a wtedy – w świetle str. 18. –

$$\underset{i\mathbb{R}\,\ni}{(\alpha|H)} = \underset{\mathbb{R}\,\ni}{(\alpha_1|H)} - i\cdot\underset{\mathbb{R}\,\ni}{(\alpha_2|H)} \Rightarrow \alpha_1 = 0 .$$

$(\mathrm{Im}(\cdot|\cdot)|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}\subset\mathbb{R})$

□

Mamy także

Str. 24. Przypomnijmy zapis dotychczasowy,

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) : X \in \mathfrak{g}_\alpha \Rightarrow X^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

zatem $\alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) \Longleftrightarrow -\alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t})$.

Ponadto $\langle Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) \rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}$.

D: Niech $H \otimes 1 \in \mathfrak{t} \otimes 1$ i $X \in \underbrace{\mathfrak{g}}_{X_1 \otimes 1 + X_2 \otimes i}$, a wtedy

$$[H \otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^* = \left([H, X_1]_{\mathfrak{k}} \otimes 1 + [H, X_2]_{\mathfrak{k}} \otimes i \right)^*$$

$$= -[H, X_1]_{\mathfrak{k}} \otimes 1 + [H, X_2]_{\mathfrak{k}} \otimes i \equiv [H \otimes 1, X^*]_{\mathfrak{g}}.$$

Wobec anty-$\mathbb{C}$-liniowości $*$ i str. 23.

$\alpha \in Q \subset \mathcal{I}\otimes i$

mamy – dla $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ –

$$[H\otimes 1, X^*]_{\mathfrak{g}} = [H\otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^* \equiv \mathrm{ad}_H^{\mathbb{C}}(X)^* = \left((\alpha|H) \triangleright X\right)^* = \overline{(\alpha|H)} \triangleright X^*$$

$$\mathrm{ad}_H^{\mathbb{C}}(X^*) = -(\alpha|H) \triangleright X^*.$$

Stąd też dla $H = H_1 \otimes 1 + H_2 \otimes i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ i $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ zachodzi

$$[H, X^*]_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}_H^{(\mathfrak{g})}(X^*) = \mathrm{ad}_{H_1}^{\mathbb{C}}(X^*) + i\,\mathrm{ad}_{H_2}^{\mathbb{C}}(X^*)$$

$$= -(\alpha|H_1) \triangleright X^* - i \cdot (\alpha|H_2) \triangleright X^*$$

$$= -(\alpha|H_1\otimes 1 + H_2 \otimes i) \triangleright X^* \equiv (-\alpha|H) \triangleright X^*.$$

Przypominamy: $(\mathfrak{h}, (\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}})$ – niezdegenerowana (wszak $(\cdot|\cdot)$ ma tę własność i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$), przeto $\mathfrak{h} = \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$. Rozważmy $H \in \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$, tj. $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}): (\alpha|H)=0$, ale wtedy $\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\ \forall X\in\mathfrak{g}_\alpha : [H,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H)\triangleright X = 0$, co w połączeniu z $\forall \tilde{H}\in\mathfrak{h} : [H,\tilde{H}]_{\mathfrak{g}} = 0$ i rozkładem $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})}\mathfrak{g}_\alpha$ daje $[H,\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}}=0$, czyli $H\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\{0\}$. $\square$

Mamy kluczowe

<u>Tw. 5.</u> Przyjmijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\ \exists\, (F_\alpha, H_\alpha, E_\alpha) \in (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha) \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\} :$$

$$[H_\alpha, E_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 2E_\alpha \qquad \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} = \langle E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$[H_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = -2F_\alpha \quad \wedge \quad H_\alpha \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}} .$$

$$[E_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = H_\alpha$$

Przy tym możemy wybrać $F_\alpha = E_\alpha^*$.

D: zacznijmy od

Lemat: $\forall (X,H,Y) \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha}$:

$$\left([Y,X]_{\mathfrak{g}} \,|\, H\right) = (\alpha|H)\cdot(X|Y^*).$$

Dowód lematu: Korzystając ze stw. 18., liczymy

$$\left([Y,X]_{\mathfrak{g}} \,|\, H\right) \equiv \left(\mathrm{ad}_Y^{(\mathfrak{g})}(X) \,|\, H\right) = \left(X \,|\, \mathrm{ad}_{Y^*}^{(\mathfrak{g})}(H)\right)$$

$$= -\left(X \,|\, \mathrm{ad}_H^{(\mathfrak{g})}(Y^*)\right)$$, ale $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha}$

oznacza, że $Y^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ na mocy stw. 24, przeto $\left([Y,X]_{\mathfrak{g}} \,|\, H\right) = -\left(X \,|\, (-\alpha|H)\cdot Y^*\right) = (\alpha|H)\cdot(X|Y^*)$. □

Zastosujmy powyższy Lemat do pary

$(Y, X \equiv Y^*) \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, a wówczas dostaniemy

$$\left([Y, Y^*]_\mathfrak{g} \,\middle|\, H\right) = (\alpha|H) \cdot \underbrace{(Y^*|Y^*)}_{= \|Y^*\|^2 \neq 0 \text{ dla } Y^* \neq 0}, \text{ zatem}$$

$Y^* \neq 0 \Leftarrow Y \neq 0$

$$\forall H \in \mathfrak{h}: \begin{cases} H \perp \alpha \implies [Y, Y^*]_\mathfrak{g} \perp H \\ \underset{\neq 0}{H} \not\perp \alpha \implies \left([Y, Y^*]_\mathfrak{g} \,\middle|\, H\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$[Y, Y^*]_\mathfrak{g} \neq 0$$

Jest $\mathfrak{h} = \langle\alpha\rangle_\mathbb{C} \oplus \langle\alpha\rangle_\mathbb{C}^{\perp_\mathfrak{h}}$, widać więc, że $[Y, Y^*]_\mathfrak{g} \in \langle\alpha\rangle_\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Istotnie, zważywszy $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}_{\alpha+(-\alpha)} = \mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$,
możemy zapisać $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} = \lambda \triangleright \alpha + \beta^i \triangleright e_i$, gdzie
$\{e_i\}$ jest pewną bazą ortonormalną w $\langle \alpha \rangle^{\perp}_{\mathbb{C}}$.
Licząc iloczyn $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}$ z $H=\alpha$, stwierdzamy, że $\lambda \neq 0$. Licząc iloczyn $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}$ z $H=e_i$ natomiast, wyznaczamy $\beta^i \sim (\alpha | e_i) = 0$, czyli – w rzeczy samej – $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} = \lambda \triangleright \alpha \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$.

Niechaj teraz $H = [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}^{(Y \neq 0)}$, a wtedy

$$\underbrace{\left([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \mid [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}\right)}_{\neq 0} = \left(\alpha \mid [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}\right) \cdot \underbrace{(Y^* \mid Y^*)}_{\neq 0},$$

przeto
$$\left(\alpha \mid [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}\right) = \frac{\overbrace{\left([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \mid [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}\right)}^{\in \mathbb{R}_{>0}}}{\underbrace{(Y^* \mid Y^*)}_{\in \mathbb{R}_{>0}}} > 0$$

Możemy zatem zdefiniować

– dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ i $N_{\alpha,Y} := \dfrac{(\alpha \mid [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}})}{2} \in \mathbb{R}$ –

$$E_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha,Y}}} \triangleright Y^{\in \mathfrak{g}_\alpha}; \quad F_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha,Y}}} \triangleright Y^{*\,\in \mathfrak{g}_{-\alpha}}; \quad H_\alpha := \frac{1}{N_{\alpha,Y}} \triangleright [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}},$$

a wtedy $(\alpha|H) = \frac{2}{(\alpha|H)} \triangleright (\alpha|H) = 2$

i stąd $[H_\alpha, E_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 2E_\alpha$, $[H_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = -2F_\alpha$

oraz $[E_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{N_{\alpha,Y}}[Y, Y^*] \equiv H_\alpha$,

zatem – w istocie – spełnione są relacje z tezy Twierdzenia. $\square$

<u>NB.</u> Zauważmy przy tym, że z równości $(\alpha|H_\alpha) = 2$ w połączeniu z ustaloną przynależnością $H_\alpha \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, czyli $H_\alpha = h_\alpha \triangleright \alpha$, wynika, że $2 = (\alpha|H_\alpha) = (\alpha|h_\alpha \triangleright \alpha) = h_\alpha \cdot (\alpha|\alpha)$,

tj.

$$\boxed{H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha}$$

<u>Def.</u> <u>20</u> Niech $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$. Wówczas

$$H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha \in \mathfrak{h}$$

określany mianem KOPIERWIASTKA stowarzyszonego z pierwiastkiem α.

— x —

Zajmiemy się obecnie reprezentacją podalgebry $sl(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} \subset \mathfrak{g}$ otrzymaną przez ograniczenie reprezentacji dołączonej ad.

Mamy kluczowe

<u>Tw. 6.</u> W dotychczasowym zapisie

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : (1)\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \left(\lambda \triangleright \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Rightarrow \lambda \in \{-1,1\} \right)$$

$$(2)\ \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1 .$$

D: W ramach przygotowań do dowodu (BO) tezy zasadniczej wygodnie będzie rozpatrzeć najpierw

Lemat: W powyższych oznaczeniach

$$|\lambda| > 1 \Longrightarrow \lambda \in \{-2, 2\}.$$

Dowód Lematu: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_{\lambda\triangleright\alpha} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy $[H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} = (\lambda\triangleright\alpha | H_\alpha) \triangleright X = \bar{\lambda} \cdot (\alpha | H_\alpha) \triangleright X$

$$\equiv \bar{\lambda} \cdot \left(\alpha \middle| \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright X = 2\bar{\lambda} \triangleright X,$$

czyli $2\overline{\lambda} \in \operatorname{Sp} H_\alpha$. Tymczasem (131)

Tw. [ćwiczenie] W dowolnej ($\propto\infty$-wym.) reprezentacji (V, ϱ) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ zachodzi

(i) $\operatorname{Sp} \varrho(H) \subset \mathbb{Z}$

(ii) $n \in \operatorname{Sp} \varrho(H) \Rightarrow \{-|n|, -|n|+2, -|n|+4, \dots, |n|\} \subset \operatorname{Sp} \varrho(H)$.

zatem $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, czyli $\exists N \in \mathbb{Z} : \lambda = \frac{N}{2}$. Ale też dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_\mathfrak{g}\}$ dostajemy

$$[H_{\lambda \triangleright \alpha}, Y] = (\alpha | H_{\lambda \triangleright \alpha}) \triangleright Y = \left(\alpha \middle| \frac{2\lambda}{\lambda^2 (\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright Y = \frac{2}{\lambda} \triangleright Y,$$

przeto także $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{N} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, tj.

$N \in \{-4,-2,-1,1,2,4\}$, a skoro $\underbrace{|\lambda|}_{=\frac{|N|}{2}} > 1$,

to w istocie $N \in \{-4,4\}$, czyli $\lambda \in \{-2,2\}$. □

Wracamy do dowodu tezy pomocniczej...

Wykorzystując skończoność wymiaru $\mathfrak{g}$, konstatujemy istnienie najmniejszej (niezerowej) krotności α w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ a następnie odnosimy do tego pierwiastka

tego Lematu, by wywnioskować, że (B3)
jedyne skalarne krotności (tego minimalnego)
α w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to $\pm\alpha$ i ewentualnie $\pm 2\alpha$.

Rozważmy następnie

wybór

$$\mathfrak{s}_\alpha := \langle E_\alpha, F_\alpha \equiv E_\alpha^*, H_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

i niech $V_\alpha := \langle H_\alpha \rangle \oplus \bigoplus_{\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}$

Łatwo przekonujemy się, że V_α jest podalgebrą Liego $\mathfrak{g}$. Istotnie, po pierwsze

1° NIE-PRZECIWNE PIERWIASTKI : (WYNIK $\notin \mathfrak{h}$)

$$\forall\, \beta_1, \beta_2 \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}} : [\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\beta_1+\beta_2}, \qquad (134)$$

$\beta_2 \neq -\beta_1$

ale $\beta_1+\beta_2 \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, więc $[\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}] \subset \bigoplus_{\beta\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\cap\langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_\beta$. ✓

2° PRZECIWNE PIERWIASTKI: Niech teraz $\beta_1 = -\beta_2 = \beta$.

Lemat ze str. 123 implikuje dla $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, że dowolny element $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}$ jest prostopadły do każdego elementu $\mathfrak{h}$ prostopadłego do β, czyli sam jest skalarną krotnością β, więc też α, zatem – koniec końców – także H_α. Uwzględniając też...

$\forall X \in \mathfrak{g}_\beta : [H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} \in \langle X \rangle_{\mathbb{C}}$, co przeczy o słuszności naszej konkluzji.

Skoro jednak $V_\alpha \, (\supset \mathfrak{s}_\alpha)$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$, to $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(V_\alpha) \subset V_\alpha$. Jest też $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(\mathfrak{s}_\alpha) \subset \mathfrak{s}_\alpha$ (BO TO $\cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}$). Zważywszy, że

$$(E_\alpha^*, F_\alpha^*, H_\alpha^*) = (F_\alpha, E_\alpha, H_\alpha)$$

(wszak $H_\alpha = \overbrace{\frac{2}{(\alpha|\alpha)}}^{\in \mathbb{R}_{>0}} \triangleright \alpha, \ \alpha \in I \otimes i$), czyli $\mathfrak{s}_\alpha^* \subset \mathfrak{s}_\alpha$, stwierdzamy w świetle str. 18,

że w rozkładzie

$$V_\alpha = s_\alpha \oplus s_\alpha^\perp$$

jest $ad_{s_\alpha}(s_\alpha) \subset s_\alpha$ oraz $ad_{s_\alpha}(s_\alpha^\perp) \subset s_\alpha^\perp$,

gdyż $X \in s_\alpha^\perp$ implikuje

$$\left(ad_{s_\alpha}(X) \,\middle|\, s_\alpha\right) = \left(X \,\middle|\, ad_{s_\alpha}^*(s_\alpha)\right) \subset \left(X \,\middle|\, ad_{s_\alpha}(s_\alpha)\right)$$

$$\subset \left(X \,\middle|\, s_\alpha\right) = 0.$$

Ponieważ jednak $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ są postaci $\beta \in \{\mp\alpha, \mp 2\cdot\alpha\}$, przeto

$$\mathrm{Sp}\left(\mathrm{ad}_{H_\alpha}\restriction_{V_\alpha}\right) \subset \{0, \mp(\alpha|H_\alpha), \mp 2(\alpha|H_\alpha)\}$$

$$\equiv \{0, \pm 2, \pm 4\} \subset 2\mathbb{Z} \; !$$

Załóżmy, że $\mathfrak{s}_\alpha^\perp \neq \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

$\mathfrak{s}_\alpha^\perp \ni X \; : \; \mathrm{ad}_{H_\alpha}(X) = \lambda\cdot X, \quad \lambda \in \{0, \pm 2, \pm 4\}$,

$\equiv$ rep $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)}$

więc jako przestrzeń $\mathfrak{s}_\alpha$-niezmiennicza,

koniecznie zawiera wektor, $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_\alpha$ stanowiącym

$\underline{0}$ ✓ ; $-2, -2+2=\underline{0}$ ✓, $-2+4=2$; $-4, -4+2=-2, -4+4=\underline{0}, -4+6=2, -4+8=4$ ✓

z wartością własną 0. Jednakowoż jedynym takim wektorem jest

czyli ten wektor $H_\alpha \in S_\alpha^\perp \cap S_\alpha = \{0\}$, tj. $H_\alpha = 0$ ↯

138

$H_\alpha \in S_\alpha \perp S_\alpha^\perp$, zatem $S_\alpha^\perp = \{0_g\}$,

co zaś oznacza, że $V_\alpha = S_\alpha$, skąd teza. $\square$