Wykład VIII

2023/24

Nader ważnym przykładem reprezentacji unitarnych algebr Liego są reprezentacje zwartych grup Liego. Ażeby się o tym przekonać, wprowadzamy

Def. 14. Niechaj G będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{g}$ i niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Niechaj niech $R : G \xrightarrow[C^\infty]{} GL(V;\mathbb{K})$ będzie reprezentacją G na V, więc homomorfizmem grup Liego. Wówczas homomorfizm algebr Liego

$dR \equiv T_e R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ jest określony mianem <u>REPREZENTACJI POCHODNEJ</u> $\mathfrak{g}$ na V.

Mamy

<u>Stw. 13.</u> Przyjmijmy założ. Def. 14, jak również dodatkowo, że $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i na V jest określona niezdegenerowana struktura hermitowska

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{iloczyn skalarny}).$$

Wówczas ilekroć R jest unitarna, tj.

$$\forall g \in G : \quad (\cdot|\cdot) \circ (R(g) \times R(g)) = (\cdot|\cdot) \Leftrightarrow R(g)^\dagger = R(g)^{-1},$$

własność tę ma tylko reprezentacja pochodna dR.

D: Skoro $\forall g \in G: \; R(g)^{\dagger} = R(g)^{-1}$,

to w szczególności

$$\forall_{\substack{X \in \mathfrak{g} \\ t \in \mathbb{R}}} : \; R\left(\exp^G(t \triangleright X)\right)^{\dagger} = R\left(\exp^G(-t \triangleright X)\right),$$

ale Stw. 2-3-4-7.11 o naturalności exp pozwala zapisać $R \circ \exp^G = \exp^{GL(V;\mathbb{K})} \circ dR$,

zatem

(46)

$\forall X \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$:

$$R(\exp^G(t \triangleright X))^\dagger \overset{!}{=} R(\exp^G(-t \triangleright X))$$

$\lambda_X : \mathbb{R} \to G$ jest homo!

$$
\begin{aligned}
R(\exp^G(t \triangleright X))^\dagger &\overset{\text{nat.}}{=} \exp^{GL(V;\mathbb{K})}(dR(t \triangleright X))^\dagger \\
&= \exp^{GL(V;\mathbb{K})}(dR(t \triangleright X)^\dagger) \\
&\equiv \lambda_{dR(t \triangleright X)^\dagger}(1) \\
&\overset{\text{liniowość } dR}{=} \lambda_{t \triangleright dR(X)^\dagger}(1) \\
&\overset{\text{Stw. 2-3-4-7.7}}{=} \lambda_{dR(X)^\dagger}(t)
\end{aligned}
$$

$\exp^{GL(V;\mathbb{K})}$ to „zwykły" eksponens

$$
\begin{aligned}
R(\exp^G(-t \triangleright X)) &\overset{\text{nat.}}{=} \exp^{GL(V;\mathbb{K})}(dR(-t \triangleright X)) \\
&\equiv \lambda_{dR(-t \triangleright X)}(1) \\
&\overset{\text{liniowość } dR}{=} \lambda_{t \triangleright dR(-X)}(1) \\
&\overset{\text{Stw. 2-3-4-7.7}}{=} \lambda_{dR(-X)}(t)
\end{aligned}
$$

$$\lambda_{dR(X)^\dagger}(t) = \lambda_{dR(-X)}(t)$$

Różniczkując powyższą tożsamość obustronnie, w $t=0$ otrzymujemy pożądaną równość

$$\forall X \in \mathfrak{g}: \quad dR(X)^{\dagger} = dR(-X) = -dR(X).$$

$\square$

Pozostaje jeszcze ustalić naturalne okoliczności, w których mamy do czynienia z reprezentacjami unitarnymi grup Liego. O takich mówi ...

Tw. 1. [Weyla-Schura-Hurwitza o unitarności] (48)

Niech G będzie zwartą grupą Liego. Wówczas dowolna (skończenie wymiarowa) reprezentacja R grupy G na międzyiloczynowej (zespolonej) przestrzeni unitarnej $(V, (\cdot|\cdot))$ jest UNITARYZOWALNA, tj. istnieje na V międzyiloczynowa forma hermitowska, względem której R jest unitarna.

49

D: Niechaj $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,G$. Rozważmy dowolny element $\omega \in \Lambda^{\dim G}\mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ (wyznacznik na $\mathfrak{g}$) i stowarzyszoną z nim formę RI

$$g h^{-1} \xrightarrow{P_h} g$$

$$\Omega \in \Omega^{\dim G =: D}(G) \; : \; \Omega(g) := \omega \circ \left(T_g P_{g^{-1}} \times T_g P_{g^{-1}} \times \ldots \times T_g P_{g^{-1}}\right), \; g \in G$$

Istotnie, $\forall_{g,h \in G}$: $P_h^*\big(\Omega(g)\big) \equiv \Omega(g) \circ T_{gh^{-1}} P_h^{\times \dim G}$

$$\equiv \omega \circ T_g P_{g^{-1}}^{\times \dim G} \circ T_{gh^{-1}} P_h^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}}\left(P_{g^{-1}} \circ P_h\right)^{\times \dim G}$$

$$= \omega \circ T_{gh^{-1}} P_{hg^{-1}}^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}} P_{(gh^{-1})^{-1}}^{\times \dim G} \equiv \Omega(gh^{-1}).$$

(NB: $\omega = \omega_{A_1 A_2 \ldots A_D}\, \tau^{A_1} \wedge \tau^{A_2} \wedge \ldots \wedge \tau^{A_D} \Rightarrow \Omega = \omega_{A_1 A_2 \ldots A_D}\, \theta_R^{A_1} \wedge \theta_R^{A_2} \wedge \ldots \wedge \theta_R^{A_D}$!)

Trywialność TG pozwala nam ustalić orientację

Ω_ω na G jako [illegible] bazy $\Gamma(TG)$

indukowanej $(R_{X_1}, R_{X_2}, \ldots, R_{X_{\dim G}})$ dla dowolnego układu bazowego $\{X_A\}_{A\in\overline{1,\dim G}}$ o własności

$$\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{\dim G}) > 0 .$$

Mając Ω, możemy zadać całkę z dowolnej funkcji gładkiej $f \in C^\infty(G;\mathbb{R})$ wzorem

$$\int_G f := \int_{(G,\Omega)} f \cdot \Omega \,, \quad \text{przy czym}$$

$$f > 0 \implies \int_G f > 0$$ (wogóle co jedna przez Ω).

Bez trudu przekonujemy się, że całka ta jest p-niezmiennicza w rozumieniu tożsamości

$$\forall g \in G: \quad \int_G p_g^* f = \int_G f \quad \left(\Leftarrow \begin{cases} p_g^* \Omega = \Omega \\ p_{g*}(\theta_\omega) = \theta_\omega, \text{ bo } p_{g*} R_x = R_x \end{cases} \right).$$

Rozpatrujemy w szczególności całkowanie przez $V \times V$ rodziny funkcji

$f_{v,w} : G \longrightarrow \underset{\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}}{\mathbb{K}} : g \longmapsto (R(g)(v) | R(g)(w)),$ 52

$v, w \in V$

Dla $w = v \in V$ jest $f_{v,w} \geq 0$ (i $= 0 \iff v = 0$)

zatem $\int_G f_{v,v} \geq 0$ i $= 0 \iff v = 0$,

Df. $(\cdot|\cdot)^G : V \times V \to \mathbb{K} : (v, w) \mapsto \int_G f_{v,w}$

zadaje niezdegenerowaną formę hermitowską

(o ile tę własność ma forma $(\cdot|\cdot)$).

Tak zdefiniowana forma spełnia warunek (53)
$\forall g \in G \; \forall v, w \in V$:

$$(R(g)(v) \,|\, R(g)(w))^G \equiv \int_G f_{R(g)(v),\, R(g)(w)} \equiv \int_{(G,0)} (R(\cdot)R(g)(v) \,|\, R(\cdot)R(g)(w))\, \Omega(\cdot)$$

$$= \int_{(G,0)} (R(\cdot\cdot g)(v) \,|\, R(\cdot\cdot g)(w))\, \Omega(\cdot) \equiv \int_{(G,0)} (R\circ p_g(\cdot)(v) \,|\, R\circ p_g(\cdot)(w))\, \Omega(\cdot)$$

$$\equiv \int_G p_g^* f_{v,w} = \int_G f_{v,w} \equiv (v|w)^G,$$ który oznacza wówczas, że reprezentacja R jest wzgl. niej unitarna $\square$

Z połączenia dwóch ostatnich wyników wyprowadzimy

<u>Stw. 14.</u> Reprezentacje pochodne algebry Liego zwartej grupy Liego są unitaryzowalne.

<u>D</u>: Oczywisty.

Te cechy algebr Liego grup zwartych sprawią, że wkrótce skupimy uwagę na algebrach Liego z nimi prosto stowarzyszonych.

Tymczasem sformułowanie proste, lecz wielce przydatne

<u>Tw. 2.</u> (Lemat Schura) Niechaj $\mathfrak{g}$ - algebra Liego.

1° Niech (V_1, ρ_1) i (V_2, ρ_2) - jej reprezentacje nieprzyw.!

$\chi : (V_1, \rho_1) \longrightarrow (V_2, \rho_2)$ - splatacz.

Wówczas zachodzi dysjunkcja $\chi = 0 \,\underline{\vee}\, \chi$ izo.

2° Niech (V,ϱ) – nieprzywiedlna reprezentacja G na zespoloną! przestrzeń wektorową V

$X : (V,\varrho) \circlearrowleft$ – splatacz

Wówczas $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : X = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

3° Niech (V_1,ϱ_1) i (V_2,ϱ_2) – nieprzywiedlne reprezentacje G na zespolone! przestrzenie wektorowe V_1 i V_2, odp.

! $\neq 0$

$X_1, X_2 : (V_1,\varrho_1) \to (V_2,\varrho_2)$ – splatacze.

Wówczas $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : X_1 = \lambda \cdot X_2$.

D: **Ad 1°** Proste ćwiczenie domowe (Zbadać zamienność exp X i ln X).

Ad 2° Mamy – $\forall X \in \mathfrak{g}$ — $X \circ \rho(X) = \rho(X) \circ X$, a ponieważ $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ma co najmniej jedną wartość własną, $\mathrm{Sp}X \neq \emptyset$. Wówczas $\forall X \in \mathfrak{g}: \ \rho(X)\big(V_\lambda(X)\big) \subset V_\lambda(X)$, czyli

$V_\lambda(X) \subseteq V$ jest podprzestrzenią o.-niezm. Przy tym $\lambda \in \mathrm{Sp}\, X$ oznacza, że $V_\lambda(X) \neq \{0_V\}$, zatem wobec nierozkładalności ρ zachodzi

$$V = V_\lambda(X),$$

to zaś oznacza, że

$$X \equiv X\restriction_{V_\lambda(X)} \equiv \lambda \triangleright \mathrm{id}_{V_\lambda(X)} \equiv \lambda \triangleright \mathrm{id}_V .$$

Ad 3° Skoro $\chi_2 \neq 0$, to na mocy (59)
1° (splotowy) ten jest izomorfizmem.
Istnieje zatem χ_2^{-1} i $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} : (V_2, \rho_2) \circlearrowleft$ splotowy!
W świetle 2°, $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} = \lambda \triangleright \mathrm{id}_{V_2}$
dla pewnej liczby $\lambda \in \mathbb{C}$, a w takim
razie $\chi_1 = \lambda \triangleright \chi_2$. $\square$

III* Wyróżnione reprezentacje su(2).

Reprezentujemy su(2) na

$$V_n := \{ w \in \mathbb{C}_2[z_1, z_2] \mid \deg w = n \}$$

(jednorodne wielomiany stopnia 2)

$$w = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^{n-k} z_2^{k}$$

Niech $X = X_{ij} \triangleright E_{ij}$, $(E_{ij})^k{}_l = \delta_i^k \delta_{jl}$, a wtedy

$$\rho_n(X)(w) := -\left(X_{11} z_1 + X_{12} z_2\right) \frac{\partial w}{\partial z_1} - \left(X_{21} z_1 + X_{22} z_2\right) \frac{\partial w}{\partial z_2}$$

Jedna z reprezentacji $sl(2)$.

Niech $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

– baza $sl(2)$.

Wówczas

$$\rho_n(H) = -x_1\partial_1 + x_2\partial_2$$

$$\rho_n(E_+) = -x_2\partial_1$$

$$\rho_n(E_-) = -x_1\partial_2$$

spełniają algebrę Liego $su(2)$.

i dostajemy

wektor wagowy!

(*)

$$\rho_n(H)\left(x_1^{n-k}x_2^{k}\right) = (-n+2k)\,x_1^{n-k}x_2^{k}$$

$$\rho_n(E_+)\left(x_1^{n-k}x_2^{k}\right) = -(n-k)\,x_1^{n-k-1}x_2^{k+1}$$

$$\rho_n(E_-)\left(x_1^{n-k}x_2^{k}\right) = -k\,x_1^{n-k+1}x_2^{k-1}$$

Str. 15. $\forall n \geq 0$: (V_n, ρ_n) jest nieprzywiedlna.

(63)

D : Wystarczy pokazać, że dowolna $su(2)$ – niezm. podprzestrzeń W_n w V_n jest równa V_n. Niech $w \in W_n$ będzie postaci $w = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^{n-k} z_2^k$, przy czym $\exists k \in \overline{0,n} : a_k \neq 0$.

Niech k_0 : najmniejszy indeks o niezerowym $a_{k_0} \neq 0$. Rozważmy

$$\rho_n(E_+)^{n-k_0} w = w_0 .$$

Operator $\rho_n(E_+)$ podnosi potęgę z_2 o 1, zatem $\rho_n(E_+)^{n-k_0}$ anihiluje wszystkie składniki w w oprócz $a_{k_0} z_1^{n-k_0} z_2^{k_0}$, ale $\rho_n(E_+)(z_1^{n-k} z_2^{k}) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $k = n$, zatem

$$\rho_n(E_+)^{n-k_0} w = \lambda_0 \cdot z_2^n$$

$$\lambda_0 \neq 0$$

Skoro zaś W_n jest $su(2)$-modułem, to musi zawierać z_2^n. Teraz jednak $\rho_n(E_-)^k z_2^n$, $k \in \overline{0,n}$ są — na mocy (*) (str. 50) — niezerowymi skalarnymi krotnościami $z_1^k z_2^{n-k}$, zatem te należą do W. Poczwórnej jednolite tworzą one bazę V_n, przeto — istotnie — $W_n = V_n$. $\square$

Przejdziemy teraz do dyskusji liniowej algebry Liego o reprezentacji poddających się stosownie pełnej klasyfikacji. Ich powszechność w zastosowaniach fizycznych i opracowanie teorii sprawiły, iż wiedzą rozwijają...

IV Elementy teorii algebr półprostych

Def. 15 Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego. Jeżeli istnieje **zwarta** grupa Liego K o algebrze Liego $\mathfrak{k}$ takiej, że $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, algebrę $\mathfrak{g}$ nazywamy REDUKTYWNĄ. Jeśli ponadto $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, to mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest PÓŁPROSTA.

Dla dowolnej półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$ algebra $\mathfrak{k}$ wyznacza ZWARTĄ FORMĘ RZECZYWISTĄ $\mathfrak{g}$.

NB: W literaturze występują także inne (równoważne) definicje półprostoty, np.

* nieistnienie nietrywialnych ideałów przemiennych

** — " — " — rozwiązalnych

*** zerowość radykału (maksymalnego ideału rozwiązalnego)

**** wprowadzenie FORMY KILLINGA

$$\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$$

$$: (X, Y) \longmapsto \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\left[X, [Y, \cdot\,]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}}\right).$$

Wykazanie równoważności powyższych definicji jest wysoce nietrywialne — w szczególności wykracza poza ramy niniejszego wykładu, w którym wybieramy definicję topologiczną na najszybsze dotarcie do kluczowych istotnych rezultatów...

Przykłady: (1) $sl(n;\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$

(2) $so(n;\mathbb{C})$, $n \geqslant 3$

(3) $sp(n;\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$

są półproste.

(1') $gl(n;\mathbb{C})$

(2') $so(2;\mathbb{C})$

są redukcyjne, lecz nie półproste.

(ew. ĆWICZENIA!)

Ażeby móc postąpić dalej, musimy (71)
przyjrzeć się bliżej szczególnej reprezentacji
pochodnej, którą wprowadzimy w

Def. 16 Niech G będzie grupą Liego
o algebrze Liego $\mathfrak{g}$. REPREZENTACJA
DOŁĄCZONA $\mathfrak{g}$ na sobie to reprezentacja
pochodna $(\mathfrak{g}, ad = dT_e Ad)$ (algebry) stowarzyszona
z REPREZENTACJĄ DOŁĄCZONĄ $(\mathfrak{g}, T_e Ad)$ (grupy).

Z powyższego pojęcia, o fundamentalnym znaczeniu w dalszej części kursu, oswaja nas

<u>Str. 16</u> przypomnijmy zapis Def. 16.

$$\forall X\in\mathfrak{g} \;:\; \mathrm{ad}_X \equiv \mathrm{ad}(X) = [X,\cdot\,]_{\mathfrak{g}}.$$

<u>D</u>: Rozważmy działanie dołączone G na $\mathfrak{g}$:

$$T_e\mathrm{Ad}_g \;:\; \mathfrak{g}\equiv T_eG \circlearrowleft \quad \text{dla} \quad \mathrm{Ad}_g : G\circlearrowleft : h\mapsto g\cdot h\cdot g^{-1}$$

w punkcie stałym $\mathrm{Ad}_g(e)=e$.

Zachodzi $\forall X\in\mathfrak{g} : T_e\mathrm{Ad}_g(X) \equiv T_{g^{-1}}\ell_g\circ T_eP_{g^{-1}}(X)$.

Przypomnijmy z dowodu Stw. 2-3-1-7.1 postać operacji binarnej w grupie Liego $Tm : TG \times TG \to TG$,

$$T_{(g,h)} m = T_g P_h \circ pr_1 + T_h l_g \circ pr_2 ,$$

z której wyprowadzamy tożsamości

$$T_e P_{g^{-1}}(X) = T_{(e,g^{-1})} m \left(X, 0_{T_{g^{-1}}G}\right) \equiv X \cdot 0_{TG}(g^{-1}), \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \; g \in G$$

$$T_{g^{-1}} l_g (v) = T_{(g,g^{-1})} m \left(0_{T_gG}, v\right) \equiv 0_{TG}(g) \cdot v, \quad v \in T_{g^{-1}}G$$

Te pozwalają wyrazić

$$T_e \mathrm{Ad}_g(X) = D_{TG}(g) \cdot X \cdot D_{TG}(g^{-1})$$

co wobec gładkości Tm oraz cięcia zerowego $D_{TG} \in \Gamma(TG)$ dowodzi gładkości działania $T_e \mathrm{Ad}$, niezbędnej dla zdefiniowania działania ad jako działania pochodnego.

W następnym kroku wykorzystujemy Stw. 2-3-4-7. (oraz 7.) 6 i 12.

aby zapisać – dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{g}$ – 75

$$[L_X, L_Y]_{\Gamma(TG)} \equiv \pounds_{L_X} L_Y \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_{L_X}(-t;\cdot)_* L_Y$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{\exp^G(-t \triangleright X)*} L_Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(-t\triangleright X)^{-1}}(Y)}$$

str. 7–8 WYKŁAD VII ← bo są pola fundamentalne dla p.

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(t\triangleright X)}(Y)}$$

, a stąd

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} \equiv [L_X, L_Y]_{\Gamma(TG)}(e) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(t\triangleright X)}(Y)}(e)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(t\triangleright X)}(Y) \equiv d\,T_e \mathrm{Ad}(X)(Y) . \quad \square$$

Nasze rozważania prowadzą tej do

Stw. 17. W oczywistej notacji zachodzi tożsamość $T_e\mathrm{Ad}\circ\exp^G = \exp^{GL(\mathfrak{g})}\circ\mathrm{ad}$.

D: Wystarczy skorzystać ze Stw. 2-3-4-7.11 i Stw. 16. $\square$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "T_e\mathrm{Ad}"] & GL(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp^G"] \arrow[r, "dT_e\mathrm{Ad} \,=\, \mathrm{ad}"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp^{GL(\mathfrak{g})}"'] \end{tikzcd}$$

Powyższe stanowi punkt wyjścia do fundamentalnego

Stw. 18. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą (77)
algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej
$\mathfrak{k}$. Istnieje niezwyrodniała forma hermitowska

$$(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

o własności $(\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}} : \mathfrak{k}\times\mathfrak{k} \longrightarrow \mathbb{R} \ (\subset \mathbb{C})_{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}$
(dla $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{k}\otimes\mathbb{C} \overset{"}{=} \mathfrak{g}$)
i takiej, że działanie dołączone $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$
$\equiv \mathrm{ad}.\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$
jest unitarne w sensie wyrażonym przez

$$\forall X\in\mathfrak{k},\ Y,Z\in\underset{(\cong\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}} : \ (\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Y)|Z) = -(Y|\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Z)).$$

Zdefiniujmy anty-$\mathbb{C}$-liniową inwolucję: (78)

$$* \;:\; \mathfrak{g}\circlearrowleft \;:\; X\otimes 1 + Y\otimes i \longmapsto -X\otimes 1 + Y\otimes i \,,$$

$(X, Y \in \mathbb{K})$ $\qquad\equiv$ "$\left(-\overline{(X\otimes 1 + Y\otimes i)}\right)$"

a równocześnie przyjęta forma hermitowska spełnia

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \;:\; \left(\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_X(Y) \,\middle|\, Z\right) = \left(Y \,\middle|\, \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X^*}(Z)\right), \qquad (*)$$

czyli $\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})\dagger}_X = \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X^*}$.

obejmuje poprzedni przypadek

D: Rozważmy wyróżnioną strukturę hermitowską w $\mathfrak{k}$ otrzymaną z konstruktywnego dowodu Tw. 1. dla $(V, R) \equiv (K, T_e\mathrm{Ad}_\cdot)$, względem której $dR \equiv \mathrm{ad}$ jest unitarna. Strukturę tę możemy rozszerzyć na $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ w naturalny sposób:

$$(\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$: (X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i) \longmapsto (X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G + i\left((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\right)$$

Bez trudu przekonujemy się, że $(\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}}$ jest niezdegenerowaną formą hermitowską na $\mathfrak{g}$. W rzeczy samej,

$$\forall \lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\ :\ \left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\lambda\triangleright(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,(\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2)\otimes 1+(\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2)\otimes i\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\,\middle|\,\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2\right)^G+\left(Y_1\,\middle|\,\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2\right)^G$$

$$+\,i\left(\left(X_1\,\middle|\,\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2\right)^G-\left(Y_1\,\middle|\,\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2\right)^G\right)$$

(81)

$$= \alpha \Big((X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G + i \big((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G \big) \Big)$$

$$+ \beta \Big((Y_1|X_2)^G - (X_1|Y_2)^G + i \big((X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G \big) \Big)$$

$$\equiv (\alpha + i\beta) \cdot (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \mid X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i)^G_{\mathbb{C}}$$, e nedto

$$(X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i \mid X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i)^G_{\mathbb{C}} \equiv (X_2|X_1)^G + (Y_2|Y_1)^G + i \big((X_2|Y_1)^G - (Y_2|X_1)^G \big)$$

$$= (X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G - i \big((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G \big)$$

$$= \overline{(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \mid X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i)^G_{\mathbb{C}}}$$

$x = 0 = y$?

Pernadto

$$(X \otimes 1 + Y \otimes i \mid X \otimes 1 + Y \otimes i)^G_{\mathbb{C}} = (X|X)^G + (Y|Y)^G + i \big((X|Y)^G - (Y|X)^G \big) \geq 0$$

W kolejnym kroku upewnimy się, że 82

kompleksyfikacja ad., dana jawnym wzorem

$$\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Y\otimes 1 + Z\otimes i) := \mathrm{ad}_X(Y)\otimes 1 + \mathrm{ad}_X(Z)\otimes i\,, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{k}\,,$$

spełnia pożądany warunek:

$$\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i) \,\middle|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(\mathrm{ad}_X(X_1)\otimes 1 + \mathrm{ad}_X(Y_1)\otimes i \,\middle|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(\mathrm{ad}_X(X_1) \,\middle|\, X_2\right)^{G} + \left(\mathrm{ad}_X(Y_1) \,\middle|\, Y_2\right)^{G} + i\left(\left(\mathrm{ad}_X(X_1) \,\middle|\, Y_2\right)^{G} - \left(\mathrm{ad}_X(Y_1) \,\middle|\, X_2\right)^{G}\right)$$

$$= -(X_1 | \mathrm{ad}_X(X_2))^G - (Y_1 | \mathrm{ad}_X(Y_2))^G$$

$$-i\left((X_1 | \mathrm{ad}_X(Y_2))^G - (Y_1 | \mathrm{ad}_X(X_2))^G\right)$$

$$= -\left(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \,\middle|\, \mathrm{ad}_X(X_2) \otimes 1 + \mathrm{ad}_X(Y_2) \otimes i\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$= -\left(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \,\middle|\, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i)\right)^G_{\mathbb{C}},$$

co pozwala nam zapostulować (w odniesieniu do tej szczególnego ???.)

$$(\cdot|\cdot) \equiv (\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}}.$$

Pozostaje sprawdzić tożsamość (*) (str. 78).

W tym celu liczymy – dla jedynego $\mathbb{C}$-liniowego rozszerzenia $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}$ z $\mathfrak{k}$ do $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$, danego wzorem

$$\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X\otimes 1+Y\otimes i} \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X + i \triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_Y$$

– słuszność postulowanej tezy :

$$\left(\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X\otimes 1+Y\otimes i}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i) \,\middle|\, X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{\mathbb{G}}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i) + i\triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_Y(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i) \,\middle|\, X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{\mathbb{G}}_{\mathbb{C}}$$

$$= -\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i \,\middle|\, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{\mathbb{G}}_{\mathbb{C}}$$

$$-i\,\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i)\,\middle|\,X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{\mathfrak{G}}_{\mathbb{C}}$$

$$=\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\left(-\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{X}+i\triangleright\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}\right)(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{\mathfrak{G}}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\mathrm{ad}^{(\tau)}_{(X\otimes 1+Y\otimes i)^*}(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{\mathfrak{G}}_{\mathbb{C}},$$

co kończy dowód. $\square$

Nim wywiedziemy z powyższego daleko idące wnioski, wyostrzymy język...

Str. 19. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$.

Niech $(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ będzie jak w Str. 18.

Jeżeli $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest ideałem, to także $\mathfrak{h}^\perp$ jest ideałem i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$ jako algebra Liego.

D: Bycie ideałem oznacza, że

$$\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h},$$

w szczególności więc $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}) \equiv \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{k}\otimes 1}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$.

W takim jednak razie

$$\left(ad^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{r}^{\perp}) \,\middle|\, \mathfrak{r}\right) = -\left(\mathfrak{r}^{\perp} \,\middle|\, \underbrace{ad^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{r})}_{\subset\, \mathfrak{r}}\right) = 0\,,$$

czyli $\mathfrak{r}^{\perp}$ jest $ad^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$-niezmiennicze,

a zatem także $ad^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}} \equiv ad^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}} + i \cdot ad^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$ -niezmiennicze.

Jako przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{r}^{\perp}$, a ponieważ

$\Rightarrow \mathfrak{r} \cap \mathfrak{r}^{\perp} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$

zarówno $\mathfrak{r}$, jak i $\mathfrak{r}^\perp$ są ideałami w $\mathfrak{g}$, przeto $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}^\perp] \subset \mathfrak{r}\cap\mathfrak{r}^\perp = \{0_{\mathfrak{g}}\}$, co oznacza właśnie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}\oplus\mathfrak{r}^\perp$ jako algebra Liego. $\square$

Relacje między algebrami redukcyjnymi i półprostymi reasumuje ...

Str. 20. Niech $\mathfrak{g}$ będzie redukcyjną (89)
zespoloną algebrą Liego o centrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.
Wówczas istnieje półprosta algebra Liego
$\delta\mathfrak{g}$ o własności $\mathfrak{g} \simeq \delta\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (jako algebry Liego).

D: Jako że $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$,
przeto także $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$ (wzgl. struktury
hermitowskiej i/w) jest ideałem w $\mathfrak{g}$
na mocy str. 19, a przy tym $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Pokażemy, że $\delta\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$ jest półprosta.

Oczywiście $\mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) = 0$, albowiem $[Z, \delta\mathfrak{g}] = 0$ z def.

bo to centrum

$\forall Z \in \mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) : Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (wobec $[Z, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0$,

czyli $Z \in \delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. a $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$)

Pozostaje wskazać zwartą formę rzeczywistą algebry Liego $\delta\mathfrak{g}$.

W tym celu zauważmy, że $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$\iff Z \in \operatorname{Ker} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{g})} \iff Z \in \operatorname{Ker} \operatorname{ad}_{\mathfrak{K}}^{c}$, a zatem

$$Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \iff Z^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Istotnie $Z = X \otimes 1 + Y \otimes i \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$$\iff \forall u \in \mathfrak{k} : \; 0 = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_u (X \otimes 1 + Y \otimes i)$$

$$= \mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i$$

$$\iff \forall u \in \mathfrak{k} : \; \mathrm{ad}_u(X) = 0 = \mathrm{ad}_u(Y)$$

$$\iff \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_u(Z^*) \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_u(-X \otimes 1 + Y \otimes i) =$$

$$\equiv -\mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i = 0.$$

Ponieważ zaś * jest inwolucją, (92)

przeto także $\delta\mathfrak{g}^* = \delta\mathfrak{g}$, to pociąga

implikuje $\delta\mathfrak{g} = \mathbb{C}\otimes(\delta\mathfrak{g}\cap k^{\otimes'}) = (\delta\mathfrak{g}\cap k^{\otimes'})^{\mathbb{C}}$ ← elementy rzeczywiste

Istotnie, niech $\delta\mathfrak{g} \ni v = X\otimes 1 + Y\otimes i \Rightarrow \frac{1}{2}\otimes(v+v^*) = X\otimes 1$ i $\frac{1}{2i}(v-v^*) = X\otimes 1$ generują $\delta\mathfrak{g}$!

(bo $v\in\delta\mathfrak{g} \Rightarrow v^*\in\delta\mathfrak{g}$!)

podobnie jest $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\otimes(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap k^{\otimes'}) = (\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap k^{\otimes'})^{\mathbb{C}}$. and $\mathbb{C}$ $\delta\mathfrak{g} \subset (\delta\mathfrak{g}\cap k^{\otimes})^{\mathbb{C}}$!

Wystarczy zatem okazać, że $\delta\mathfrak{g}\cap k^{\otimes'}$ i vice versa!

jest algebrą Liego zwartej grupy Liego.

Niech K będzie zwartą grupą Liego o algebrze

Liego $\mathfrak{k} \equiv \mathrm{Lie}\,K$. Oznaczmy

$$\delta K := T_e \mathrm{Ad}(K) \subset GL(\mathfrak{k}).$$

Jako ciągły obraz grupy zwartej δK jest zwarta, zatem domknięta. Na mocy Tw. Cartana 2-3-4-7.2 jest ona podgrupą Liego grupy Liego $GL(\mathfrak{k})$, więc w szczególności – grupą Liego.

Mouny Jottem

$$0 \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{k} \twoheadrightarrow \delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k} \to 0$$
$$(\mathfrak{k} \otimes 1)$$

conjugate

$$\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{k} \otimes 1$$
$$\cap$$
$$\mathfrak{k} \otimes 1 \cap \mathfrak{g}$$
$$\|$$
$$\mathfrak{k} \otimes 1 \cap (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \delta\mathfrak{g})$$
$$\cup$$
$$(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \otimes 1) \oplus (\delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k} \otimes 1)$$

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[rr, "T_e \mathrm{Ad}"] \arrow[dr, two heads, "T_e \mathrm{Ad}^*"'] & & GL(\mathfrak{k}) \\
 & & \delta K \arrow[ur] & \\
 & & \delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k} \arrow[u, "\exp^{\delta K}"] \arrow[dr] \arrow[r, "\simeq \mathrm{Lie}\,\delta K"] & 0 \\
\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \arrow[r] & \mathfrak{k} \arrow[uuu, "\exp^K"] \arrow[ur, two heads, "\mathrm{ad}"] \arrow[rr, "\mathrm{ad}"'] & & \mathfrak{gl}(\mathfrak{k}) \arrow[uuu, "\exp^{GL(\mathfrak{k})}"'] \\
0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

i.e. $\delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k} \simeq \mathfrak{k} / \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k}$

$$\ker \mathrm{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \otimes 1$$

stąd pojedynczy wniosek

$$\delta g \cap K \equiv \mathrm{Lie}\, \delta K$$

δK - zwarta. $\square$