Wykład VII

2023/24

I ALGEBRY LIEGO

Def. 1. Skończenie wymiarowa rzeczywista/zespolona **ALGEBRA LIEGO** to para $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ złożona z

* przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{R}/\mathbb{C} \equiv \mathbb{K}$

** odwzorowania $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (**NAWIAS LIEGO**)

∘ warunki:

(L1) $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \in L_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 2-lin. nad $\mathbb{K}$

(L2) $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ \tau = -[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ SKOŚNA SYMETRIA

(L3) $\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}} \equiv 0$ TOŻSAMOŚĆ JACOBIEGO

Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest KOMUTATYWNA ②
lub abelowa, gdy $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \equiv 0$.

PODALGEBRA LIEGO algebry Liego $\mathfrak{g}$
to podprzestrzeń $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o własności

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}.$$

Jeśli $\mathfrak{g}$ jest nad $\mathbb{C}$, a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
jest zespoloną podprzestrzenią o tej własności,
to mówimy, że $\mathfrak{h}$ jest zespoloną podalgebrą Liego $\mathfrak{g}$.

Podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest określana mianem **IDEAŁU**, gdy

3

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h} .$$

CENTRUM algebry Liego $\mathfrak{g}$ to jej podalgebra komutatywna

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall Y \in \mathfrak{g} : [X, Y]_{\mathfrak{g}} = 0 \}$$

Niechaj $\{X_A\}_{A \in \overline{1, \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}}}$ będzie bazą $\mathfrak{g}$, a wtedy stałe $f_{AB}{}^{C} \in \mathbb{K}$ w relacjach $[X_A, X_B]_{\mathfrak{g}} = f_{AB}{}^{C} X_C$ nazywamy **STAŁYMI STRUKTURY**.

Mamy oczywiste

Stw. 1. Niech $\mathfrak{g}$ - algebra Liego, $f_{AB}{}^{C}$ - jej stałe struktury.

Wówczas

$$f_{BA}{}^{C} = - f_{AB}{}^{C}$$

$$f_{AB}{}^{D} f_{DC}{}^{E} + f_{CA}{}^{D} f_{DB}{}^{E} + f_{BC}{}^{D} f_{DA}{}^{E} = 0.$$

Przykłady: (1) $(\mathbb{R}^3, \times)$ iloczyn wektorowy

(2) $(\mathcal{A}, [\cdot,\cdot])$ komutator

dowolna algebra łączna

w szczególności

(3) $(\mathrm{End}_{K}(V), [\cdot,\cdot]) \equiv \mathfrak{gl}(V)$

w szczególności

(6) $(T_eG, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{X}(G)})$

(4) $\mathfrak{sl}(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$: $\mathrm{tr}|_{\mathfrak{sl}(V)} \equiv 0$

(5) $(\mathfrak{X}(M), [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{X}(M)})$ nawias Liego pól wekt.

Def. 2. Niech $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ - algebry Liego (6)

HOMOMORFIZM ALGEBR LIEGO to odwzorowanie

$$\chi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$$

o własnościach

(LH1) $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$

(LH2) $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}_2} \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}_1}$.

W szczególności mówimy o mono-, epi-, izo-, endo- i auto-morfizmach algebr Liego.

Przykład: Str. 2 Niech (M, λ) będzie (7)

zgodnym z działaniem $\lambda : G \times M \to M$

grupy Liego G o algebrze Liego $\mathfrak{g} = T_e G$, a wtedy

POLE FUNDAMENTALNE (LEWOSTRONNE)

$$\mathcal{K}_{\cdot_1}(\cdot_2) \equiv T_{(e, \cdot_2)} \lambda (\cdot_1, 0_{T_{\cdot_2} M}) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$$

$$: X \mapsto T_{(e, \cdot_2)} \lambda (-X, 0_{T_{\cdot_2} M}) \equiv \mathcal{K}_X(\cdot_2)$$

o wartościach $\mathcal{K}_X(m) \equiv T_{(e, m)} \lambda (-X, 0_{T_x M})$

działa G-ekwiwariantny homomorfizm algebr Liego,

$$\forall X,Y \in \mathfrak{g}: \quad [\kappa_X, \kappa_Y]_{\mathfrak{X}(M)} = \kappa_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}$$

$$\forall (X,g) \in \mathfrak{g} \times G: \quad \lambda_{g*}\kappa_X = \kappa_{T_e \mathrm{Ad}_g(X)}$$

<u>NB</u>: $\forall (X,f,m) \in \mathfrak{g} \times C^1(M;\mathbb{R}) \times M$:

$$\kappa_X(f)(m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(\lambda_{\exp(-t\triangleright X)}(m)\right) \Rightarrow \kappa_X(m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \lambda_{\exp(-t\triangleright X)}(m)$$

O związku między homomorfizmami algebr Liego i ich ideałami, które stawia te ostatnie na pozycji analogonów podgrup normalnych w kategorii grup, mówi

Stw. 3. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ideałami algebr Liego i jądrami homomorfizmów —||— —||— .

D: Niech $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{g}$ – ideał. Wówczas $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$ opatrzony w strukturę algebry Liego z nawiasem

$$[X+\mathfrak{I}, Y+\mathfrak{I}]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{I}} := [X,Y]_{\mathfrak{g}} + \mathfrak{I},$$

względem której rzut kanoniczny

$$\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{I}} : \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{I} : X \longmapsto X+\mathfrak{I}$$

jest epimorfizmem algebr Liego. Jego

jądro to $\operatorname{Ker} \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} \equiv \mathfrak{k}$.

Odwrotnie, niech $\chi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Wówczas $\forall (X,Y) \in \operatorname{Ker} \chi \times \mathfrak{g}_1$:

$$\chi([X,Y]_{\mathfrak{g}_1}) = [\chi(X), \chi(Y)]_{\mathfrak{g}_2} = [0_{\mathfrak{g}_2}, \chi(Y)]_{\mathfrak{g}_2} = 0_{\mathfrak{g}_2} \qquad \square$$

12

<u>Def. 3</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ – algebra Liego,
$\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ – jej ideał.

Algebrę Liego $\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{r}}\right)$ nazywamy

ALGEBRĄ ILORAZOWĄ (LIEGO).

Naturalne operacje na algebrach Liego dziedziczone z kategorii $\mathrm{Vect}_K^{<\infty}$ ⑬

opisuje

Def. 4. Niechaj g_1, g_2 – algebry Liego

(ZEWN.) SUMA PROSTA ALGEBR LIEGO to algebra Liego

$$(g_1 \oplus g_2, [\cdot,\cdot]_\oplus) \text{ o nawiasie}$$

$$\forall\, X_1, X_2 \in g_1,\ Y_1, Y_2 \in g_2 : \quad [(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)]_\oplus := ([X_1, X_2]_{g_1}, [Y_1, Y_2]_{g_2})$$

Jeżeli $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}$ podalgebry Liego algebry Liego $\mathfrak{g}$ (14)

i $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]_{\mathfrak{g}} = 0$, mówimy, że

$\mathfrak{g}$ ROZKŁADA SIĘ NA SUMĘ PROSTĄ (WEWN.) $\mathfrak{g}_1$ i $\mathfrak{g}_2$.

Def. 5. Niech $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ rzeczywista algebra Liego

KOMPLEKSYFIKACJA $\mathfrak{g}$ to zespolona algebra Liego

$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}})$

∘ nawiasie Liego

$\forall\, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$:

$$[X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \,,\, X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$$

$$:= \left([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}} - [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{g}}\right) \otimes 1$$

$$+ \left([X_1, Y_2]_{\mathfrak{g}} + [Y_1, X_2]_{\mathfrak{g}}\right) \otimes i$$

$\{ X \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C}) \mid X^{\dagger} = -X \}$

<u>Przykład</u> : $\mathfrak{u}(n)^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$

Mamy

<u>Stw. 4</u>. Niechaj $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ – rzeczywiste algebry Liego, Dowolny $\chi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ – homomorfizm rzecz. algebr Liego indukuje kanoniczny homomorfizm $\chi^{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$, który nazywamy KOMPLEKSYFIKACJĄ HOMOMORFIZMU ALGEBR LIEGO.

<u>D</u>: $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_1 : \chi^{\mathbb{C}}(X \otimes 1 + Y \otimes i)$

$$= \chi(X) \otimes 1 + \chi(Y) \otimes i .$$

Szczególne i szczególnie istotne typy algebr Liego opisuje 17

Def. 6. Algebrę Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy NIEPRZYWIEDLNĄ /NIEROZKŁADALNĄ, gdy jedynymi w niej ideałami $\mathfrak{g}$ są $\mathfrak{g}$ i $\{0_{\mathfrak{g}}\}$. Nieprzywiedlną algebrę Liego wymiaru $\dim_K \mathfrak{g} \geq 2$ jest dalej zwane nazywaną PROSTĄ.

NB: Każda 1-wym. algebra Liego jest nieprzywiedlna z przyczyn oczywistych. Jest też – tym więcej – komutatywna. Ogólniej, żadna komutatywna algebra Liego nie jest nieprzywiedlna, gdyż każda podprzestrzeń takiej algebry jest jej ideałem.

<u>Przykład</u>: <u>Stw. 5.</u> Algebra Liego $sl(2;\mathbb{C})$ jest prosta.

D: Nie dowiedziemy.

Def. 7. Niechaj $\mathfrak{g}$ - algebra Liego (20)

Ideał $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}$ określony nazywa

IDEAŁU KOMUTATOROWEGO lub ALGEBRY POCHODNEJ.

Mieszający ciąg podalgebr

$\mathfrak{g}_\cdot : \mathbb{N} \to \mathrm{obj}\,\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{K}} : n \mapsto \mathfrak{g}_n$,

określony rekurencyjnie: $\mathfrak{g}_{n+1} = [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n]_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$,

w którym $\mathfrak{g}_n \subseteq \mathfrak{g}_{n-1}$ jako ideał,

nazywamy CIĄGIEM POCHODNYM $\mathfrak{g}$.

Ilekroć $\exists\, n \in \mathbb{N} : \mathfrak{g}_n = \{0_{\mathfrak{g}}\}$,

algebrę $\mathfrak{g}$ nazywamy **ROZWIĄZALNĄ**.

NB: $\mathfrak{g}_{n>1}$ nie są w ogólności ideałami

w $\mathfrak{g}$.

Def 8. Niech $\mathfrak{g}$ - algebra Liego

Mierzący ciąg ideałów w $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}^{\cdot} : \mathbb{N} \to \mathrm{Obj}\,\mathbf{Lie}\,\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}} : n \mapsto \mathfrak{g}^{n}$$

określony rekurencyjnie: $\mathfrak{g}^{n+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n}]_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g}$,

nazywamy GÓRNYM CIĄGIEM CENTRALNYM $\mathfrak{g}$.

Jeśli $\exists\, n \in \mathbb{N} : \mathfrak{g}^{n} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$,

algebrę $\mathfrak{g}$ nazywamy NILPOTENTNĄ.

Mamy proste

Stw. 6. Każda algebra nilpotentna jest rozwiązalna.

D:

Przykład: (1) **Stw. 7.** Podprzestrzeń $\mathfrak{g} \subset \mathbb{R}(3)$ macierzy ściśle górnotrójkątnych dziedziczy z $(\mathbb{R}(3), [\cdot,\cdot])$ struktury algebry Liego, względem której jest nilpotentna. **D:** Ćw.

(2) Stw. 8. Podprzestrzeń

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{C} \right\} < \mathbb{C}(2)$$

dziedziczy z $(\mathbb{C}(2), [\cdot,\cdot])$ strukturę algebry Liego, względem której jest rozwiązalna, lecz nie-nilpotentna.

D: Ćwicz.

Szczególny i szczególnie istotny typ homomorfizmu opisuje

Def. 9. Niech $\mathfrak{g}$ - algebra Liego nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

REPREZENTACJA $\mathfrak{g}$ (zw. tej $\mathfrak{g}$-MODUŁEM) to para (V, ρ) złożona z

* przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$

** homomorfizmu algebr Liego $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Jeśli $\mathfrak{g}$ jest rzeczywistą algebrą Liego, (26)
taką reprezentację nazywamy

RZECZYWISTĄ, jeśli zaś $\mathfrak{g}$ jest
zespoloną algebrą Liego, reprezentację
nazywamy ZESPOLONĄ, o ile

V jest zespoloną przestrzenią wektorową.

Wówczas ϱ jest monomorfizmem, reprezentację dualną
nazywamy WIERNĄ.

Podprzestrzeń $W \subseteq V$ nośnika reprezentacji (V,ρ) algebry $\mathfrak{g}$ spełniającą warunek

$$\rho(\mathfrak{g})(W) \subseteq W$$

nazywamy ($\mathfrak{g}$-) NIEZMIENNICZĄ. Przy tym jeśli $W \in \{\{0_V\}, V\}$, to mówimy o TRYWIALNEJ PODPRZESTRZENI NIEZMIENNICZEJ.

W przeciwnym razie podprzestrzeń niezmienniczą określonym wzorem NIETRYWIALNEJ. 28

Reprezentacja nieposiadająca nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych jest nazywana NIEPRZYWIEDLNA.

x

Niech (V_1, ρ_1) i (V_2, ρ_2) będą reprezentacjami algebry Liego g. SPLATACZ pomiędzy tymi reprezentacjami to odwzorowanie

$$X \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$$

o własności

$$\forall x \in \mathfrak{g} : \quad X \circ \rho_1(x) = \rho_2(x) \circ X .$$

Splotowy, który jest izomorfizmem nośników, określony mianem RÓWNOWAŻNOŚCI REPREZENTACJI. Ilekroć takie istnieje, odnośne reprezentacje nazywamy RÓWNOWAŻNYMI ; piszemy $\rho_1 \sim \rho_2$.

Mamy oczywiste

<u>Stw. 9.</u> Dowolna (rzeczywista) reprezentacja (V, ρ) rzeczywistej(!) algebry Liego $\mathfrak{g}$ na zespolonej przestrzeni wektorowej V rozszerza się jednoznacznie do (zespolonej) reprezentacji kompleksyfikacji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ tejże, $(V, \rho^{\mathbb{C}})$. Przy tym ρ jest nieprzywiedlna $\Longleftrightarrow$ $\rho^{\mathbb{C}}$ — " — .

D.: Pierwsza część jest trywialna.

Dla dowodu drugiej części wystarczy zauważyć, że

$$\rho^{\mathbb{C}}(g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \equiv \rho(g) + i \triangleright \rho(g) \qquad \square$$

W następnej kolejności poznamy istotne przykłady reprezentacji i algorytmy konstrukcji nowych reprezentacji ze starych.

Przykłady: (32)

(1) REPREZENTACJA TRYWIALNA $(\forall \rho \equiv 0)$

(2) REPREZENTACJA STANDARDOWA:

$$\left(\mathbb{C}^n, \rho \equiv \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\right) \text{ dla } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{C}(n)$$ – podalgebra Liego

(3) REPREZENTACJA DOŁĄCZONA:

$$\left(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}. : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) : X \mapsto [X, \cdot]_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}_X\right)$$

NB: Homomorficzny charakter ad. wynika z tożsamości Jacobiego.

(4) REPREZENTACJA KONTRAGREDIENTNA / DUALNA

33

$$\left(V^*,\ \rho^*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V^*): X \mapsto -\rho(X)^*\right),$$

gdzie $\forall (v,\varphi)\in V\times V^*:\ \langle \rho(X)^*(\varphi),\ v\rangle := \langle \varphi,\ \rho(X)(v)\rangle,$

czyli $\quad \rho(X)^*(\varphi) \equiv \varphi \circ \rho(X)\ .$

Mamy

Stw. 10 (V,ρ) nieprzywiedlna $\Longleftrightarrow$
(V^*,ρ^*) — " —

Stw. 11 $(V^{**},(\rho^*)^*) \sim (V,\rho)$

D: ⌂

Naturalne operacje na reprezentacjach (34)

grupy:

Def. 10. Niech $\{(V_\alpha, \varrho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ - reprezentacje algebry Liego $\mathfrak{g}$.

SUMA PROSTA REPREZENTACJI to reprezentacja

$$\Big(\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha \,,\, \overset{\text{"}\varrho_\oplus\text{"}}{\bigoplus_{\beta\in A}\varrho_\beta}\Big),\ \text{gdzie } pr_\alpha\circ\varrho_\oplus=\varrho_\alpha$$

czyli $\forall X\in\mathfrak{g}:\ \varrho_\oplus(X)(v_\alpha)=\big(\varrho_\alpha(X)v_\alpha\big),$

$J_\alpha: V_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha$

tj. $\varrho_\oplus(X)\circ J_\alpha=J_\alpha\circ\varrho_\alpha(X)$

Mamy także

Def. 11. Niech będą $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ – algebry Liego nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, (V_α, ρ_α) – reprezentacja $\mathfrak{g}_\alpha$ dla $\alpha \in \{1, 2\}$.

ILOCZYN TENSOROWY REPREZENTACJI to reprezentacja algebry $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (!) dana w postaci

SPR !

$$\left(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2,\ \rho_1 \otimes \rho_2 : \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2) : (X_1, X_2) \longmapsto \rho_1(X_1) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \rho_2(X_2)\right)$$

Wprowadzamy niezwykle istotne pojęcie (36)

Def. 12. Reprezentację (V, ρ) nazywamy (W PEŁNI) PRZYWIEDLNĄ / ROZKŁADALNĄ, gdy jest izomorficzna sumie prostej reprezentacji nieprzywiedlnych, tj. $\exists\ (V_\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha \in A} : (V, \rho) \sim \bigoplus_{\alpha \in A} (V_\alpha, \rho_\alpha)$.

Algebra Liego „liczy" wszędzie (skończenie wymiarowa) reprezentacja jest w pełni przywiedlna, jest określona mianem W PEŁNI PRZYWIEDLNEJ / REDUKOWALNEJ. (37)

NB: Powyższa uwaga nie jest generyczna — wyjście klasę algebr Liego, którą zajmiemy się w dalszej części kursu.

Wprowadźmy osobną kategorię

Def. 13. Niech $\mathfrak{g}$ - rzeczywista algebra Liego, $(V,(\cdot|\cdot))$ - przestrzeń! [illegible] unitarna

> KONWENCJA: $(\cdot_1|\cdot_2)$ jest liniowa w $\cdot_2$!!!

Reprezentację (V,ρ) nazywamy UNITARNĄ, gdy

$$\forall X\in\mathfrak{g}: \quad \rho(X)^\dagger = -\rho(X),$$

gdzie

$$\forall v,w\in V: \quad (\rho(X)^\dagger(v)\,|\,w) := (v\,|\,\rho(X)(w))$$

Mamy stałe

<u>Stw. 12.</u> Dowolna reprezentacja unitarna na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej jest w pełni przywiedlna.

<u>D</u>: Niech (V, ϱ) będzie unitarną reprezentacją skończenie wymiarowej algebry Liego $\mathfrak{g}$. Oznaczmy iloczyn skalarny na V przez $(\cdot|\cdot)$.

Niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią (40)

$\mathfrak{g}$-niezmienniczą, a $W^\perp$ jej dopełnieniem

$(\cdot|\cdot)$-ortogonalnym. Zachodzi

$$V = W \oplus W^\perp$$

Pokażemy, że $W^\perp$ także jest $\mathfrak{g}$-niezm.

Istotnie, $\forall (w,v) \in W \times W^\perp \ \forall X \in \mathfrak{g}$:

$$(w|\rho(X)v) \equiv (\rho(X)^\dagger(w)|v) = -(\rho(X)(w)|v)$$

$= 0$, gdyż $\rho(X)(w) \in W$ ($\Leftarrow W$ jest $\mathfrak{g}$-niezm.)

Jeśli (V, ρ) NIE jest nieprzywiedlna, 41
to istnieje podprz. $W \subsetneq V$, która jest
ρ-niezm., a wtedy $V = W \oplus W^{\perp}$
i $W^{\perp}$ ρ-niezm., czyli
$\left(W^{(\perp)}, \rho|_{W^{(\perp)}}\right)$ to (pod) reprezentacje unitarne.
Przy tym albo $(W, \rho|_{W})$ nieprzywiedlna,
albo rozkłada się na $\widetilde{W} \oplus \widetilde{W}^{\perp}$. Analogicznie

mnożeń jest otwarty dla $W^\perp$. (42)

Kontynuacja powyższej procedury prowadzi (w skończonej liczbie kroków) do pełnego rozkładu (V,ρ) na podreprezentacje nieprzywiedlne. $\square$