

Wykład XIV

2023/24

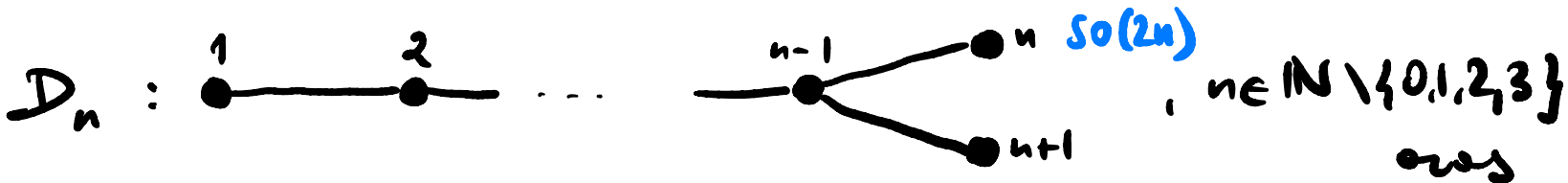
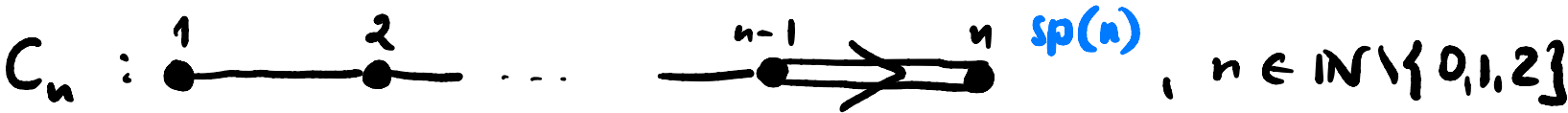
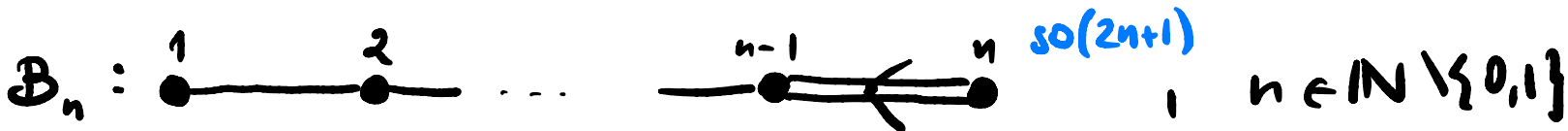


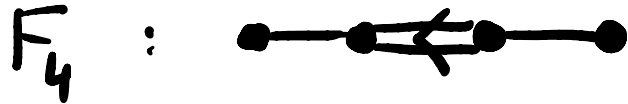
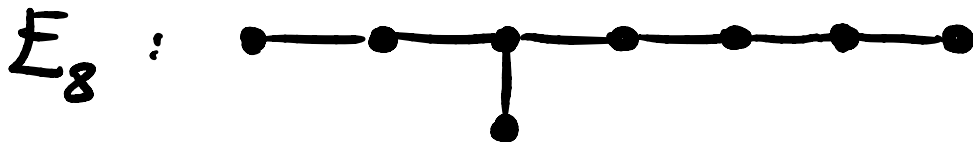
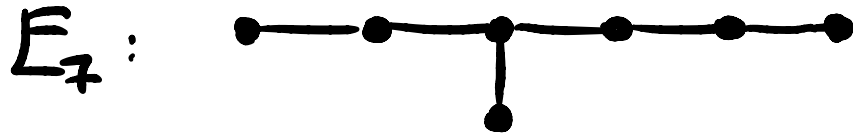
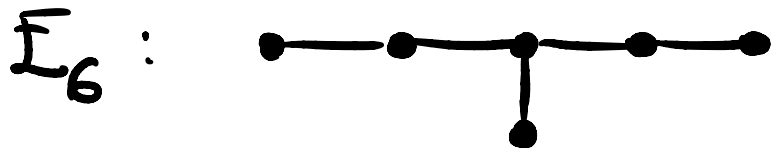
W podsumowaniu całej dotychczasowej
 dyskusji możemy powiedzieć sygnalnie

(249)

Th. 13. [Klasyfikacje dla systemów pierwiastków]

Jedynie spójne diagramy Dynkina to





ALGEBRY
WYJĄTKOWE

250

NB. : Wszystkie
te diagramy
odpowiadają systemom
ściwościowym
(sł) partii algebr
Liego!

D: Okazuje się, że zamiast klasyfikacji
Hilberta Dyubina, w której występuje
wielkość o rojnej dimensji, co znajduje
odzwierciedlenie w delonacji kwadratu
(podwójni)
o walencji > 1 , występuje związek między dobroci

(251)

Coxetera C , które dostajemy w wyniku
przenumeracji: $\alpha_i \mapsto \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$, co skutkuje
zbieżnością delonacji z kwadratu.

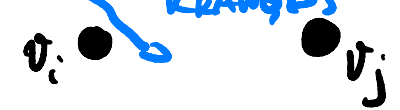
Ażby dobrze zrozumieć stopień zjed nami
zadanie, zrekapitulujemy dotychczasowe
ustalenia: Mamy do czynienia ze zbiorem wektorów
liniowo niezależnych $\{a_i\}_{i \in I}$ czyli trygucy niezależności

preju. Możliwe uszy między wektorami
względnie uosueli reye to (Def. 26
ony th. 175-178)
KRAWDZ

1° $\&(a_i, a_j) = \frac{1}{2}$

$A_{ij} = 0 = A_{ji}$

$n_j = A_j \cdot A_j$
LIGBA
Linii



2° $\&(a_i, a_j) = \frac{1}{3}$

$A_{ij} = -1 = A_{ji}$



3° $\&(a_i, a_j) = \frac{1}{4}$

$A_{ij} = -1, A_{ji} = -2$



4° $\&(a_i, a_j) = \frac{1}{6}$

$A_{ij} = -1, A_{ji} = -3$



Podobno mamy teraz zamiary:

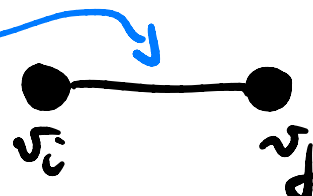
(253)

$$d_i \mapsto \frac{d_i}{\|d_i\|} \equiv \hat{d}_i, \quad i \in \overline{1, n}$$

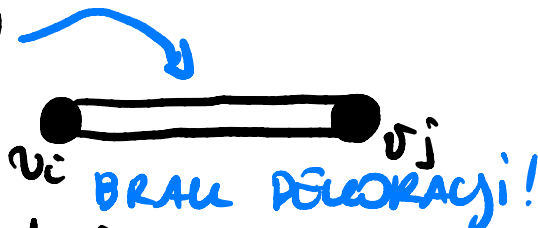
liczymy w powyższym przypadku: $\hat{A}_{ij} \equiv 2 \langle \hat{d}_i | \hat{d}_j \rangle$
(highly to same!)

$$1^\circ \langle \hat{d}_i | \hat{d}_j \rangle = 0 \quad \hat{A}_{ij} = 0 = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 0$$

$$2^\circ \langle \hat{d}_i | \hat{d}_j \rangle = \frac{\langle d_i | d_j \rangle}{\|d_i\| \cdot \|d_j\|} \stackrel{\|d_i\| = \|d_j\|}{=} \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \langle d_i | d_j \rangle}{\langle d_i | d_i \rangle} \equiv \frac{1}{2} A_{ij} = -\frac{1}{2}$$

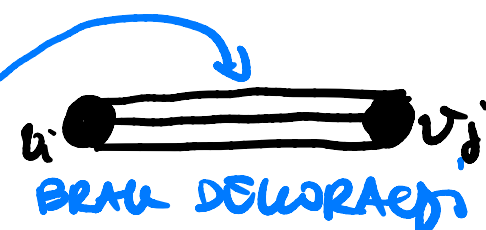
$$\hat{A}_{ij} = -1 = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 1$$


$$3^\circ \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} \stackrel{\|\alpha_i\| = \sqrt{2} \|\alpha_j\|}{=} \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{2 \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (254)$$

$$\hat{A}_{ij} = -\sqrt{2} = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 2$$


BRAU DEBORACI!

$$4^\circ \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} \stackrel{\|\alpha_i\| = \sqrt{3} \|\alpha_j\|}{=} \frac{\sqrt{3} \cdot 2 \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{2 \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{A}_{ij} = -\sqrt{3} = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 3$$


BRAU DEBORACI!

W dalszych rozważaniach będziemy używać określenia DIAGRAM DOPUSZCZALNY w odniesieniu do tych diagramów Costera, które spełniają warunki między innymi geometryczne wynikające z liniowej niezależności i dopuszczalności kątów między wektorami $\{\vec{a}_i\}$ i $\{\vec{b}_i\}$. Diagramy, które nie są dopuszczalne, nazywamy NIEDOPUSZCZALNYMI i odpowiadają. Nasze strategie sprowadza się do zaleźności wszystkich diagramów dopuszczalnych i sprawdzania, że

(255)

każdy z nich po przyjęciu do pracy (256)
odpowiada pewnemu systemowi pierwiastkowym.

W istocie ^(na przykład) pojawiają się, że każdy z nich odpowiada
systemowi pierwiastkowym pewnej (pół)prstej
algebry Liego.

Można rozumowanie zorganizować
w formie szeregu lematów, które zawrą
spektrum dopuszczalnych stopni Coxetera.

Lemma 0. Každý poddílagram diagramu
domuzovalnero jst domuzovalny.

(257)

DL 0 : Dyzniste. \blacksquare

Lemma 1.: Jeśli \mathcal{C} jest dopuszczalny,

to \mathcal{C} jest dyagonalny (tj. nie zawiera jedni). \square

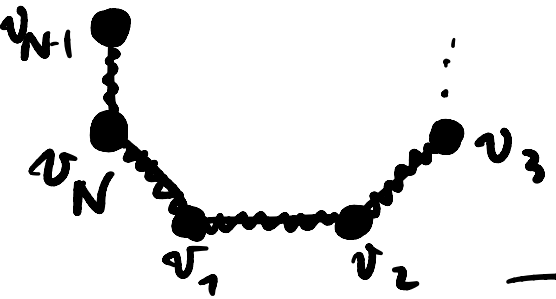
Dł 1: ^{A.a.} Niedłuj niezachodni $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ tworzą jedni,

(1) $\forall i \in \overline{1, N-1} : 2 \langle \hat{a}_i | \hat{a}_{i+1} \rangle \leq -1$

(2) $2 \langle \hat{a}_N | \hat{a}_1 \rangle \leq -1$

(3) dla pozostałych par (i, j) :

$\langle \hat{a}_i | \hat{a}_j \rangle = 0$



oraz $\forall_{i,j} \hat{A}_{ij} \equiv$ co najmniej 1 linia, czyli $\hat{A}_{ij} \in \{-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}$

liczymy: $\| \sum_{i=1}^N \hat{a}_i \|^2 = \sum_{i=1}^N \| \hat{a}_i \|^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \langle \hat{a}_i | \hat{a}_{i+1} \rangle + \langle \hat{a}_N | \hat{a}_1 \rangle + \sum_{\substack{i,j \in \overline{1, N} \\ i \neq j}} \langle \hat{a}_i | \hat{a}_j \rangle \right]$

$\leq N + (-1) + (-1) = N - 1 < 0$, czyli $\sum_{i=1}^N \hat{a}_i = 0_C$ (wzrost 22.3 są LN3). \square

Lemma 2.: Jeśli \mathcal{L} jest dopuszczalny, to \mathcal{L} nie zawiera
 więcej niż 3 wartości o wartości > 3 . (259)

Dłz: Rozważmy dowolny niezdeformowany v_0 położony
 z innymi wartościami $v_i, i \in \{1, \dots, N\}$ (i tylko tymi), przy czym
 założamy, że każda linia między v_0 i v_i to L_i .

W świetle Lemata 1. wartości v_i i $v_j, i, j \in \{1, \dots, N\}$



nie są połączone, czyli $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}: \langle \hat{a}_i | \hat{a}_j \rangle = 0$.
 Na tej podstawie możemy skorzystać z $\langle \hat{a}_0 | \hat{a}_i \rangle \in \mathbb{R}$

$$1 = \|\hat{a}_0\|^2 \geq \sum_{i=1}^N \langle \hat{a}_0 | \hat{a}_i \rangle^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N L_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N L_i < 4$$

□

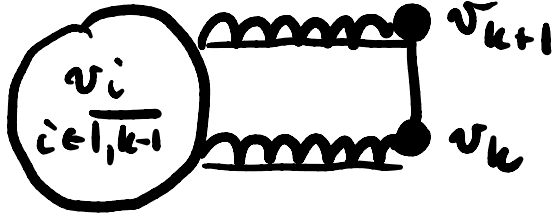
liczba linii:

$$L_i = \hat{A}_{0i} \hat{A}_{i0} = 4 \langle \hat{a}_0 | \hat{a}_i \rangle^2$$

Lemma 3. Niech \mathcal{C} będzie dopuszczalny i niech $v_k, v_{k+1} \in \mathcal{C}$ będą sąsiednie pojedyncze linie $e_{k,k+1}$. 260
 Wówczas diagram $\mathcal{C}_{k \times k+1}$ otrzymany z \mathcal{C} poprzez usunięcie $e_{k,k+1}$ i utożsamienie $v_k \equiv v_{k+1}$ jest dopuszczalny.

DL 3: Rozwijamy diagram \mathcal{C} :

(zawsze możemy tak ponumerować węzły)



Definiujemy:

$$\underline{\hat{d}}_k := \hat{d}_k + \hat{d}_{k+1}$$

$$\underline{\hat{d}}_i := \hat{d}_i, i \in \overline{1, k-1}$$

mm niedostawiony typ,

jeśli $k > 1$, to choć jedno z nich nie może!

Důležitý: $\|\underline{\hat{\alpha}}_k\|^2 = \|\hat{\alpha}_k\|^2 + \|\hat{\alpha}_{k+1}\|^2 + 2\langle \hat{\alpha}_k | \hat{\alpha}_{k+1} \rangle \equiv \hat{A}_{k,k+1} = -1$
 $= 1 + 1 - 1 = 1 \quad \checkmark, \quad (261)$

e každo

$\forall i \in \overline{1, k-1}: \langle \underline{\hat{\alpha}}_i | \underline{\hat{\alpha}}_k \rangle \equiv \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_k \rangle + \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_{k+1} \rangle$



\rightarrow jeden
 } iterymů
 $= 0$

$\left\{ 0, -\frac{1}{2}, -\frac{k}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

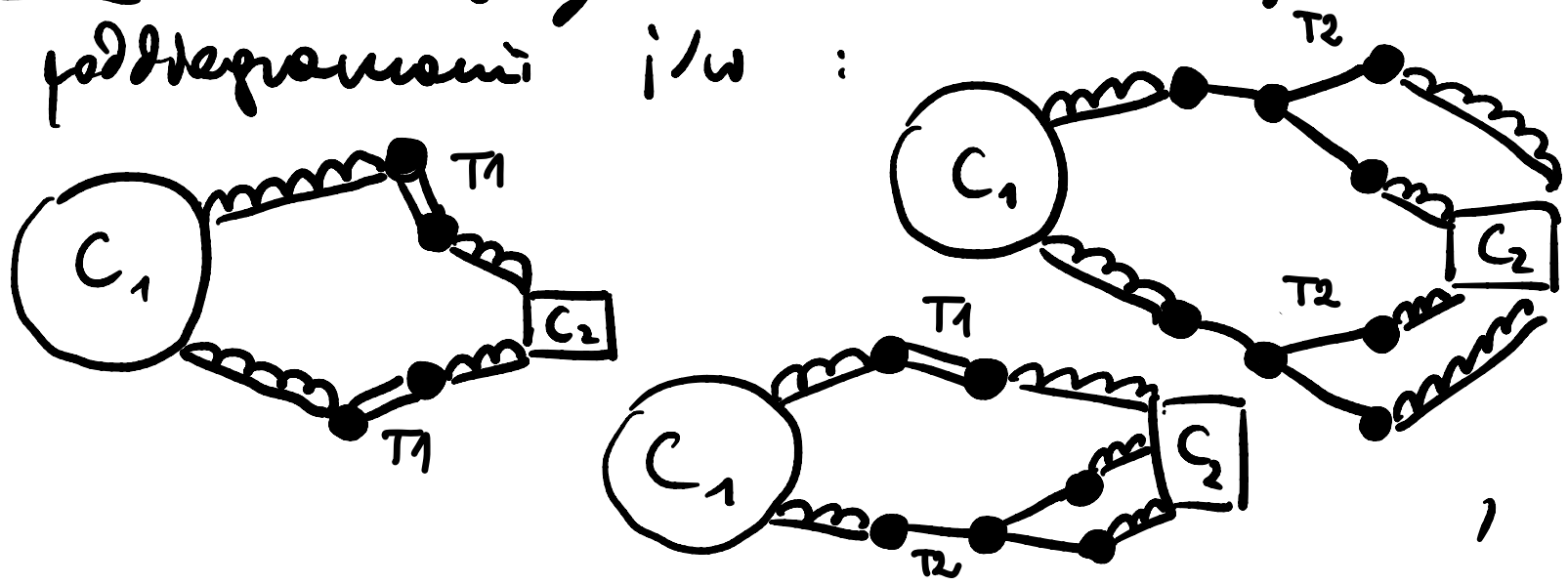
$\forall i, j \in \overline{1, k-1}: \langle \underline{\hat{\alpha}}_i | \underline{\hat{\alpha}}_j \rangle \equiv \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle \quad \checkmark$

Uvědomění: $\{\underline{\hat{\alpha}}_j\}_{j \in \overline{1, k}}$ tvoří každý unormované systém
 ortonormované. \square

Lemma 4. Jeśli \mathcal{C} jest dopuszczalny, to \mathcal{C} nie zawiera dwóch lub więcej podciągów postaci (262)

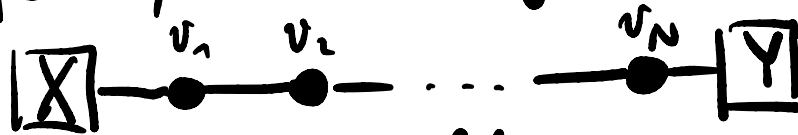


DL4. ^{A.e.} Rozważmy \mathcal{C} z co najmniej dwoma podciągami i/w :





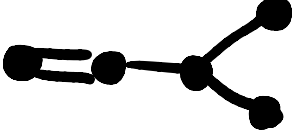
przy tym założeniu, że na ścieżce w kierunku
 z pomiędzy podzięrami nie ma 263
 innych podzięrami tego typu (tj. wybieramy
 dwa podzięramy najbliższe), a wtedy

Trasy jest pewien ciąg krawędzi postaci
 $X, Y \in \{T_1, T_2\}$

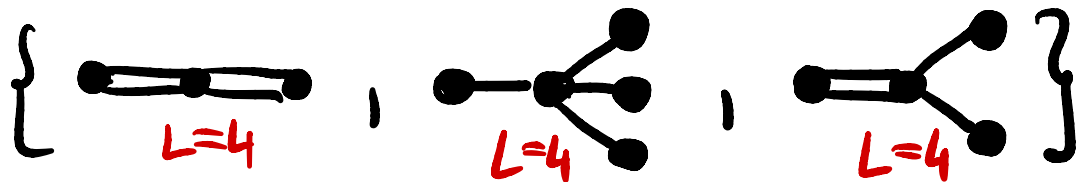



(krawędź pozioma - wpływowa przy temacie 2,
 krawędź pionowa - wpływowa przy założeniu,
 krawędź gołędnia sąsiadująca - j/w).

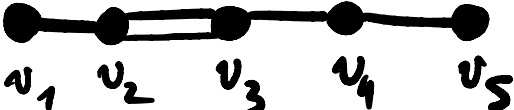
Dla dowolnego dzielenia niezerowego
 $\{U; \zeta_i \in \mathbb{N}\}$ otrzymujemy diagram dopływu, 264

ale w nim: $\boxed{X|Y} \in \{$  ,  ,
 $\}$,

co po dalszym dzieleniu daje



Ćwiczenie 5. Dwiegram  jest niedopuszczalnym, w szczególności jeden 265 dwiegram dopuszczalny nie zawiera go jako poddwiegramu.

DłS.: Określmy , a wtedy $\langle \hat{a}_2 | \hat{a}_3 \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\langle \hat{a}_1 | \hat{a}_2 \rangle = \langle \hat{a}_3 | \hat{a}_4 \rangle = \langle \hat{a}_4 | \hat{a}_5 \rangle = -\frac{1}{2}$, natomiast pozostałe iloczyny skalarne = 0. Zdefiniujmy $\alpha := \hat{a}_1 + 2\hat{a}_2$ i $\beta := 3\hat{a}_3 + 2\hat{a}_4 + \hat{a}_5$.

Zadanie

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle 2\hat{a}_2 | 3\hat{a}_3 \rangle = 6 \langle \hat{a}_2 | \hat{a}_3 \rangle = -3\sqrt{2}, \quad (266)$$

a wtedy

$$\|\alpha\|^2 = \|\hat{a}_1\|^2 + \|2\hat{a}_2\|^2 + 2\langle \hat{a}_1 | 2\hat{a}_2 \rangle = 1 + 4 - 2 = 3$$

$$\begin{aligned} \|\beta\|^2 &= \|3\hat{a}_3\|^2 + \|2\hat{a}_4\|^2 + \|\hat{a}_5\|^2 + 2(\langle 3\hat{a}_3 | 2\hat{a}_4 \rangle + \langle 2\hat{a}_4 | \hat{a}_5 \rangle) \\ &= 9 + 4 + 1 + 2(-3 - 1) = 6. \end{aligned}$$

Dlategoż zatem $|\langle \alpha | \beta \rangle| \equiv \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$,

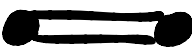
co - jak wiemy z lemmu algebry liniowej - oznacza,
że $\beta \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$. \Downarrow (wszystkie wektory $\{\hat{a}_i\}_{i=1,5}$ są LNZ) \square


Wniosek 1.: Jeśli \mathcal{C} jest dopuszczalny i zawiera
krawędź wielokrotną, to jest typu B_n, C_n, F_4 lub G_2 . (267)

Uzasadnienie: W świetle Lemata 3 podanym
diagramem z krawędzią potrójną jest

$$\text{---} \equiv G_2.$$

W przypadku linii podwójnej Lemat 4
zabrania wystąpienia dwóch lub więcej
krawędzi tego typu, a Lemat 5
dopuszcza jedynie kontynuację diagramu.

po jednej ze stron krawędzi , czyli

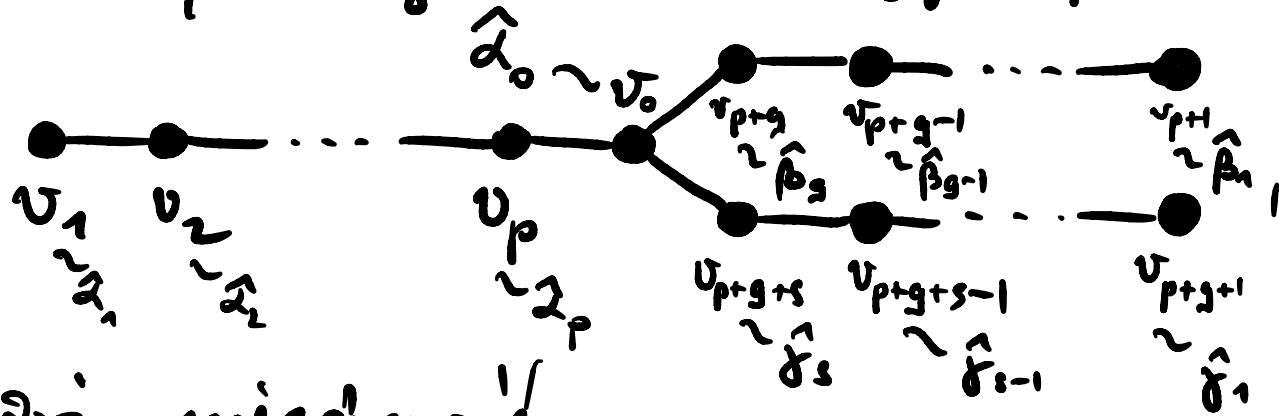
 B_n/C_n (nieosobliwość)

(bez odciętej)

lub  $\equiv F_4$. □ (268)

Na obecnym etapie pozostałe skomplikowane doposażenie drzewa o krawędziach pojedynczych.

Lemat 6. Jeśli \mathcal{C} jest doprzyszalnym diagramem o krawędziach gęstościowych (269) zamierzonym poddiagramem T_2 , czyli jest postaci



to zachodzi nierówność

$$\frac{p}{1+p} + \frac{q}{1+q} + \frac{s}{1+s} < 2.$$

DL6: {definiierung

$$X := \sum_{k=1}^p k \triangleright \hat{\alpha}_k, \quad Y := \sum_{k=1}^q k \triangleright \hat{\beta}_k, \quad Z := \sum_{n=1}^s m \triangleright \hat{\gamma}_n. \quad (270)$$

obliczenie

$$\begin{aligned} \langle X | X \rangle &= \sum_{k=1}^p \langle k \triangleright \hat{\alpha}_k | k \triangleright \hat{\alpha}_k \rangle + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \langle k \triangleright \hat{\alpha}_k | (k+1) \triangleright \hat{\alpha}_{k+1} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^p k^2 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} k(k+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^p k^2 - \sum_{k=1}^{p-1} (k^2 + k) \\ &= p^2 - \frac{(p-1) \cdot p}{2} = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2} \end{aligned}$$

analogicznie $\langle Y|Y \rangle = \frac{g(g+1)}{2}$, $\langle Z|Z \rangle = \frac{s(s+1)}{2}$.

Na tej podstawie wyznaczamy

$$\langle \hat{\alpha}_0 | \frac{1}{\|X\|} X \rangle^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{p(p+1)}} \cdot \sum_{k=1}^p \langle \hat{\alpha}_0 | k \alpha_k \rangle \right)^2 \quad (271)$$
$$= \frac{2}{p(p+1)} \cdot p^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{p}{2(p+1)}$$

oraz - analogicznie -

$$\langle \hat{\alpha}_0 | \frac{1}{\|Y\|} Y \rangle^2 = \frac{g}{2(g+1)}, \quad \langle \hat{\alpha}_0 | \frac{1}{\|Z\|} Z \rangle^2 = \frac{s}{2(s+1)}$$

Ponieważ $X \perp Y$, $X \perp Z$, $Y \perp Z$,

a wiado $\hat{\alpha}_0 \in \langle X, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}$, mamy

(272)

$$1 = \|\hat{\alpha}_0\|^2 = \left\langle \hat{\alpha}_0 \left| \frac{1}{\|X\|} X \right. \right\rangle^2 + \left\langle \hat{\alpha}_0 \left| \frac{1}{\|Y\|} Y \right. \right\rangle^2 + \left\langle \hat{\alpha}_0 \left| \frac{1}{\|Z\|} Z \right. \right\rangle^2,$$

co jest właśnie gotulowaniem mierności.

Na tym etapie pozostałe już tylko rozpatrzyć
względnie ewentualności przemierzane przez
te mierności.

Wniosek 2.: Jeśli \mathcal{C} jest dopuszczalnym
i zawiera poddrzewem T_2 , to jest typu (273)
 D_n, E_6, E_7 lub E_8 .

Uzasadnienie: Wobec pełnej symetrii pomog'dy

Wybami p, q i s ustalony: $p \geq q \geq s$.

Jeśli $s \geq 2$, to $\frac{s}{s+1} \geq \frac{2}{3}$, zatem także

$$\frac{p}{p+1} \geq \frac{2}{3} \text{ i } \frac{q}{q+1} \geq \frac{2}{3}, \text{ a wtedy } \frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} + \frac{s}{s+1} \geq \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{p}{p+1} \geq \frac{q}{q+1} \geq \frac{s}{s+1} \left(\geq \frac{2}{3} \right)$$



Wobec powyższego $s = 1$, ^(s=0 nie daje T2!) $e \text{ nie daje } 2^2$

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} < 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad (274)$$

Jeśli $q \geq 3$, to $\frac{q}{q+1} \geq \frac{3}{4}$, a wtedy

$$\frac{p}{p+1} < \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow p < 3, \text{ ale } p \geq q \geq 3 \quad \text{⚡}$$

Pozostają zatem przypadki: $(q=0 \text{ nie daje } B!)$

$$q=1 \Rightarrow p \geq 1 \quad (D_n)$$

$$q=2 \Rightarrow 2 \leq p < 5 \quad (E_6, E_7, E_8). \quad \square$$

Dotychczasowe rozważanie wykluczało wszelkie
skrajności inne niż te, o których mowa (275)
w teście Thiersteina. Konstruktynego dowodu
na to, że każdy \mathbb{Z} wchłonięty jest skrajnością
jennego systemu pierwiastków, istnieje
studium (P.T.) postęps algebr tego (lub'ya
zoforališnyj nę na dnicznie). \square

(CECI N'EST PAS)

LA FIN ...
