Wykład XIII

2023/24

Dotychczasowe ustalenia dostarczają narzędzi do techniki weryfikacji korzystających z twierdzenia: 225

<u>Stw. 38.</u> Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komór Weyla jest <u>swobodne</u>. Ponadto $\forall C$ – otwarta komora Weyla $\forall v \in C \ \forall \chi \in W(E,R)$:

$$\chi(v) = v \implies \chi = \mathrm{id}_E .$$

punkt stały w zbiorze komór

<u>D</u>: Niech C będzie otwartą komorą Weyla i niech $\chi \in W(E,R)$ takie, że $\chi(C) = C$, a wtedy $\forall v \in C$: $\chi(v) \in C$, więc na mocy

Str. 37 zachodzi $\forall v \in C : \chi(v) = v$, stąd też

$\chi\restriction_C = \mathrm{id}_C$, ale to oznacza, że $\chi \equiv \mathrm{id}_E$, bo

χ : komnaty Weyla ↺ wraz ze ścianami, potem – z racji ciągłości χ –

$\chi\restriction_{\overline{C}} = \mathrm{id}_{\overline{C}}$, ale $\partial C = \overline{C} \setminus C$ ma postać Π_α, $\alpha \in \Delta_C$ – baza E (!),

więc $\Pi_\alpha = \chi(\Pi_\alpha) = \Pi_{\chi(\alpha)}$, a skoro $\chi : R$ ↺, to $\chi(\alpha) = \pm\alpha$, gdyby

jednak było $\chi(\alpha) = -\alpha$, to dla $v \in \Pi_\alpha$ byłoby: $v + \varepsilon\alpha \in C \xmapsto{\chi} \underbrace{\chi(v)}_{\equiv v} - \varepsilon\alpha \notin C$ ↯,

zatem $\forall \alpha \in \Delta_C : \chi(\alpha) = \alpha$, to jednak oznacza – wobec bazowości Δ_C – $\chi \equiv \mathrm{id}_E$.

Ponadto, gdy dla pewnego $v \in C$ jest $\chi(v) = v$, to w świetle Obserwacji 2) ze str. 202 (χ : komnaty $\to$ komnaty) jest $\chi(C) = C$, a to na mocy wyżej udowodnionej tezy implikuje $\chi = \mathrm{id}_E$. □

Mamy też

str. 39. $\forall \Delta_1, \Delta_2$ - bazy R $\exists! \, X \in W(E,R)$:

$$\Delta_2 = X(\Delta_1).$$

D: Baza Δ_A, $A \in \{1,2\}$ wyznacza obszar komory Weyla — $\mathfrak{E}(E,R;\Delta_A)$. Wobec swobodnego i przechodniego działania grupy $W(E,R)$ na zbiorze obszarów komór Weyla [str. 38 i 36, odpowiednio) $\exists! \, X \in W(E,R)$:

$\mathfrak{E}(E,R;\Delta_2) = X\big(\mathfrak{E}(E,R;\Delta_1)\big)$. Ale X przeprowadza

$\chi(\partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta_1)) = \partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta_2)$, więc

$\langle\alpha_1\rangle^{\perp}_{\mathbb{R}} = \Pi_{\alpha_1}, \alpha_1\in\Delta_1$ $\Pi_{\alpha_2}, \alpha_2\in\Delta_2$

$\chi(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\alpha_2} = \langle\alpha_2\rangle^{\perp}_{\mathbb{R}}$

$= \chi(\langle\alpha_1\rangle^{\perp}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\chi\in O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)} \chi(\langle\alpha_1\rangle_{\mathbb{R}}) = \langle\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}}$

też $\chi(\Delta_1) = \Delta_2$. $\square$

Doprecyzowujemy

Str. 40. Niech C – otwarta komora Weyla i niech $v\in E$. $\exists!\,\alpha\in\overline{C}\cap W(E,R)(v)$.

orbita

D: Niech $v\in E$, więc też $v\in\overline{C_v}$, gdzie C_v jest pewną otwartą komorą Weyla. Na mocy str. 36 $\exists\,\chi\in W(E,R): C=\chi(C_v)$, a wtedy także $\chi(\overline{C_v}) = \overline{C}$, zatem $\chi(v)\in\overline{C}$, czyli $W(E,R)(v) \cap \overline{C} \neq \emptyset$.

Przy tym jeśli takie $w \in W(E,R)(v) \cap \overline{C}$

to $X(v)$ i w są w tej samej orbicie (w orbicie v),

czyli $\exists\, \tilde{X} \in W(E,R)$: $w = \tilde{X}(X(v))$,

a to oznacza — w świetle str. 37 —

$w \equiv X(v)$, bo $X(v), w \in \overline{C}$. $\square$

Na zakończenie tej części wszystkich rozważań dowodzimy ...

Str. 41. Niechaj Δ będzie bazą R i niech $\alpha \in \Delta$. $\forall \beta \in R_+^\Delta : \left(\beta \neq \alpha \Rightarrow w_\alpha(\beta) \in R_+^\Delta \right)$, (230)
czyli w_α jest permutacją pierwiastków dodatnich różnych od α.

D: Niech $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} n^\gamma \triangleright \gamma$, przy czym $\beta \neq \alpha$ $\overset{\circ}{\underset{\wedge}{\text{ii}}}$ implikuje $\exists\, \gamma_* \in \Delta \setminus \{\alpha\} : n^{\gamma_*} > 0$.
Na mocy aksjomatu (SP3) $w_\alpha(\beta) = \beta - N \triangleright \alpha$ dla pewnej liczby $N \in \mathbb{Z}$, a wobec tego

$$w_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma\in\Delta} \tilde{n}^{\gamma}\gamma \quad , \text{ gdzie } \tilde{n}^{\gamma} = \begin{cases} n^{\alpha} - N & \text{dla } \gamma = \alpha \\ n^{\gamma} & \text{w p.p.} \end{cases} \tag{231}$$

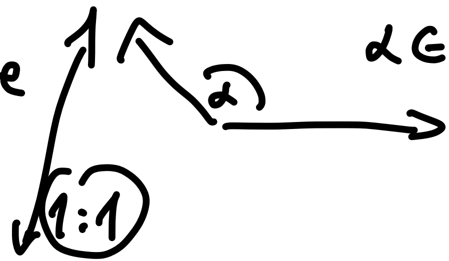
W szczególności $\tilde{n}^{\gamma_*} = n^{\gamma_*}$.

Ale $R = R_+^{\Delta} \cup R_-^{\Delta}$, skoro więc $\tilde{n}^{\gamma_*} > 0$, to także pozostałe $\tilde{n}^{\gamma\neq\gamma_*} \geq 0$, zatem $w_\alpha(\beta) \in R_+^{\Delta}$. $\square$

Dotychczasowe rozważania przygotowały nas do podjęcia wyzwania klasyfikacji systemów pierwiastkowych...

Rekapitulacja:

- SYSTEM Γ $\supset$ BAZA SYSTEMU Γ $\leftarrow$ elementy NIEROZKŁADALNE
- wektory bazowe

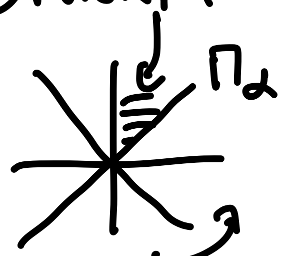


$\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$

wa∂ $\Pi \cap R = \emptyset$

$\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1$

- KOMNATY WEYLA $\ni$ FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA



$, \alpha \in R$

$\wr$

BAZA $\partial \mathfrak{C} = \bigcup_i \tilde{\Pi}_{\alpha_i}$

$W(E,R)$ działa na nich

- Γ: każdy może być bazowym!

Def. 26. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym o bazie $\Delta = \{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$.

DIAGRAM DYNKINA s.p. (E,R) to graf o r wierzchołkach $\{v_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ połączonych krawędziami $e_{ij} = (\overrightarrow{v_i, v_j})$, $i,j\in\overline{1,r}$ wedle przepisu:

$n_1 : n_2$ linii (patrz: str. 176)

(patrz: Str. 29. i 31.)

- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{\pi}{2} \implies e_{ij} = \underset{v_i}{\circ} \quad \underset{v_j}{\circ}$
- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{2\pi}{3} \implies e_{ij} = \underset{v_i}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{v_j}{\circ}$: $\|v_i\| = \|v_j\|$
- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{3\pi}{4} \implies e_{ij} = \underset{v_i}{\circ}\!\!\Longrightarrow\!\!\underset{v_j}{\circ}$: $\|v_i\| = \sqrt{2}\,\|v_j\|$
- $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{5\pi}{6} \implies e_{ij} = \underset{v_i}{\circ}\!\!\Rrightarrow\!\!\underset{v_j}{\circ}$: $\|v_i\| = \sqrt{3}\,\|v_j\|$

$n_1 \cdot \|\alpha_i\|_E^2 = 2\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle$

$n_2 \cdot \|\alpha_j\|_E^2 = 2\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle$

Dwa diagramy Dynkina nazwiemy RÓWNOWAŻNYMI, jeśli istnieje bijekcja między zbiorami ich wierzchołków zachowująca łączące je krawędzie (walencję i „zwrot"). (233)

$(\forall \Delta_1, \Delta_2$ - bazy $(E,R)\ \exists!\ \chi \in W(E,R) : \Delta_2 = \chi(\Delta_1))$

OBSERWACJA: W świetle str. 39. i w konsekwencji zachowywania przez $W(E,R)$ kątów i długości dowolne dwie bazy (E,R) dają równoważne diagramy Dynkina, w tym zatem sensie diagram Dynkina jest stowarzyszony z systemem pierwiastkowym, nie zaś — z konkretną bazą.

Nowy Klucz

Tw. 12. System pierwiastkowy jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego diagram Dynkina jest spójny.

Ponadto diagramy Dynkina dwóch systemów pierwiastkowych są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy te systemy są izomorficzne.

D: Jeżeli $\boxed{\Rightarrow}$ system pierwiastkowy (E,R) rozkłada się na podsystemy:

$$(E,R) = (E_1,R_1) \oplus (E_2,R_2),$$

wybieramy bazę (E,R) w postaci $\Delta_1 \uplus \Delta_2$, gdzie Δ_A jest bazą (E_A,R_A), $A \in \{1,2\}$. Wtedy jednak krawędzie między wierzchołkami należącymi do dwóch różnych podbaz: Δ_1 i Δ_2 są puste, zatem diagram jest niespójny.

$\boxed{\Leftarrow}$ I odwrotnie, jeśli diagram Dynkina (E,R) jest niespójny, baza Δ rozpada się na podzbiory wzajem ortogonalne, $\Delta_1 \uplus \Delta_2 = \Delta$.

W takim jednak razie $E = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\cong \underset{E_1}{\underbrace{\langle \Delta_1 \rangle_{\mathbb{R}}}} \oplus \underset{E_2}{\underbrace{\langle \Delta_2 \rangle_{\mathbb{R}}}}.$$

Oznaczmy $R_A := R \cap E_A$.

Łatwo widać, że (E_A, R_A), $A \in \{1,2\}$ są systemami pierwiastkowymi. Jedyna własność wymagająca sprawdzenia to (SP3), a ściślej: Musimy pokazać, że

$$\forall \alpha, \beta \in R_A : \underbrace{\beta - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha}_{= w_\alpha(\beta)} \in R_A.$$

Oczywiście $w_\alpha(\beta) \in R$, pozostaje zatem upewnić się, że

$w_\alpha(\beta) \perp R_{A'}$, gdzie A' jest indeksem dopełniającym.

Ale $\forall \gamma \in R_{A'}$: $\left(w_\alpha(\beta)\,|\,\gamma\right) = \underbrace{(\beta|\gamma)}_{=\,0,\ \text{bo}\ \beta\perp\gamma} - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\cdot\underbrace{(\alpha|\gamma)}_{=\,0,\ \text{bo}\ \alpha\perp\gamma}$

$$\equiv 0 .\ \checkmark$$

Jest przy tym oczywiste, że Δ_A jest bazą (E_A, R_A).

Pozostaje pokazać, że $\forall \alpha\in R : \alpha\in R_1 \ \underline{\vee}\ \alpha\in R_2$.

W świetle str. 36 : $W(E,R) = \langle w_\alpha \,|\, \alpha\in\Delta_1 \sqcup \Delta_2\rangle$,

a ponieważ $\forall \alpha\in\Delta_A : w_\alpha\restriction_{E_{A'}} = \mathrm{id}_{E_{A'}}$, przeto

$W(E,R) = W(E_1,R_1)\times W(E_2,R_2)$, przy czym $W(E_A,R_A) = \langle w_\alpha \,|\, \alpha\in\Delta_A\rangle$ działa trywialnie na $E_{A'}$.

Skoro jednak $\forall \alpha \in R$ jest – na mocy Stw. 35 – elementem pewnej kostki, a $W(E,R)$ działa – w świetle Stw. 34 i 35 – przechodnio na zbiorze kostek R, to jest pewne, że $\exists\, X = (X_1, X_2) \in W(E,R)$:

$$\alpha \in X(\Delta_1 \uplus \Delta_2) \equiv X_1(\Delta_1) \uplus X_2(\Delta_2)$$ (wszak X jest izometrią),

czyli $\alpha \in X_A(\Delta_A) \subset R_A$ dla $A=1 \vee A=2$. ☒

Przechodząc do drugiej części tezy Twierdzenia, konstatujemy dozwolność uzyskania $K\boxed{=}$.

Istotnie, ...

Niech $\chi : (E_1, R_1) \to (E_2, R_2)$ będzie izomorfizmem.

Obrazem bazy Δ_1 systemu (E_1, R_1) jest baza systemu (E_2, R_2) (χ jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych, a takie przeprowadza bazę dziedziny Δ_1 w bazę przeciwdziedziny $\chi(\Delta_1)$ (BSP1) i ponadto $R_2 = \chi(R_1) = \chi(\langle \Delta_1 \rangle_+ \cup \langle \Delta_1 \rangle_-)$

$$= \langle \chi(\Delta_1) \rangle_+ \cup \langle \chi(\Delta_1) \rangle_- \quad \text{(BSP2)}).$$

Mamy też $\forall \alpha,\beta \in R_1 : \; w_{\chi(\alpha)}(\chi(\beta)) = \chi(w_\alpha(\beta))$. (240)

W szczególności $\forall \alpha_i,\alpha_j \in \Delta_1 : \; w_{\chi(\alpha_i)}(\chi(\alpha_j)) = \chi(w_{\alpha_i}(\alpha_j))$

$$w_{\chi(\alpha_i)}(\chi(\alpha_j)) = \chi(\alpha_j) - 2\frac{(\chi(\alpha_j)|\chi(\alpha_i))}{(\chi(\alpha_i)|\chi(\alpha_i))} \triangleright \chi(\alpha_i)$$

$$\chi(w_{\alpha_i}(\alpha_j)) = \chi\left(\alpha_j - 2\frac{(\alpha_j|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)} \triangleright \alpha_i\right) = \chi(\alpha_j) - 2\frac{(\alpha_j|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)} \triangleright \chi(\alpha_i)$$

BAZA

$$\chi(\Delta_1) \to \chi(\alpha_i) \equiv \tilde{\alpha}_i$$

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{(\tilde{\alpha}_i|\tilde{\alpha}_j)}{(\tilde{\alpha}_i|\tilde{\alpha}_i)} = \frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_i|\alpha_i)} =: a_{ij} \quad \forall i,j$$

Zbadamy kąty między $\tilde{\alpha}_i$ i $\tilde{\alpha}_j$ i ich względ. długości (dla nieprostopadłych).

1) Na gruncie stw. 31 wystarczy zbadać kwadraty cosinusów kątów wg 12) $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}_j$. (241)

$$\left(\frac{(\tilde{\alpha}_i|\tilde{\alpha}_j)}{\|\tilde{\alpha}_i\|\cdot\|\tilde{\alpha}_j\|}\right)^2 \equiv \tilde{\alpha}_{ij}\cdot\tilde{\alpha}_{ji} = \alpha_{ij}\cdot\alpha_{ji} \equiv \left(\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{\|\alpha_i\|\cdot\|\alpha_j\|}\right)^2 \quad \checkmark$$

2) $$\left(\frac{\|\tilde{\alpha}_i\|}{\|\tilde{\alpha}_j\|}\right)^2 \equiv \frac{\|\tilde{\alpha}_i\|^2}{(\tilde{\alpha}_i|\tilde{\alpha}_j)}\cdot\frac{(\tilde{\alpha}_j|\tilde{\alpha}_i)}{\|\tilde{\alpha}_j\|^2} \equiv \frac{\tilde{\alpha}_{ji}}{\tilde{\alpha}_{ij}} = \frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ij}} = \left(\frac{\|\alpha_i\|}{\|\alpha_j\|}\right)^2 \quad \checkmark$$

Widzimy więc, że – istotnie – X przeprowadza diagram Dynkina (E_1, R_1) na diagram Dynkina (E_2, R_2). □

W przypadku $\boxed{\Leftarrow}$ ograniczamy się do sytuacji, w której oba diagramy Dynkina są spójne, więc też — w świetle wcześniejszych ustaleń — oba systemy pierwiastkowe są nieprzywiedlne. 242

Rozważmy zatem systemy (E_A, R_A) o dwóch bazach $\Delta_A = \{\alpha_i^A\}_{i\in\overline{1,r}}$ uporządkowanych tak, że izomorfizm diagramów Dynkina przyporządkowuje $v_i^1 \longleftrightarrow v_i^2$, $i\in\overline{1,r}$.

Na (E_2, R_2) skalujemy iloczyn skalarny wedle schematu: $\langle\cdot|\cdot\rangle_2 \longmapsto \dfrac{\langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2}\cdot\langle\cdot|\cdot\rangle_2 \equiv \langle\cdot|\cdot\rangle_2^\sim$,

uzyskując tym sposobem równość

(*) $\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2^\sim = \langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1$. Jako że krawędzie $e^1_{1j\neq1}$ są identyczne z odnośnymi krawędziami $e^2_{1j\neq1}$, przeto

$$(1)\quad \frac{\langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^2}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2\cdot\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2} = \frac{\langle\alpha_1^1|\alpha_j^1\rangle_1^2}{\langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1\cdot\langle\alpha_j^1|\alpha_j^1\rangle_1}$$

$$\parallel$$

(*) $\langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim 2} = \dfrac{\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2^\sim}{\langle\alpha_j^1|\alpha_j^1\rangle_1}\cdot\langle\alpha_1^1|\alpha_j^1\rangle_1^2$ $\Bigg|$ $\dfrac{\langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim 2}}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2^\sim\cdot\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2^\sim}$: równość kątów $\measuredangle(\alpha_1^2,\alpha_j^2)=\measuredangle(\alpha_1^1,\alpha_j^1)$

(2) $$\frac{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2} = \frac{\langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1}{\langle \alpha_1^1 | \alpha_1^1 \rangle_1} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \underline{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1} \qquad (244)$$

$$\equiv$$

$$\frac{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim}}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2^{\sim}}$$: równość stosunków długości dla wszystkich pozostałych (X)

Z kombinacji powyższych warunków odzyskujemy:

$$\begin{cases} \langle \alpha_1^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_1^1 | \alpha_j^1 \rangle_1 \\ \langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1 \quad (\text{dla } j \neq 1) \end{cases}$$

Powtarzając to rozumowanie w odniesieniu do każdego z wierzchołków $\neq 1$ (245)

ustalimy – wobec spójności obu diagramów – tożsamość wszystkich (odnośnych) wektorów i długości w bazach obu systemów, stwierdzając tym samym, że jedyne $\mathbb{R}$-liniowe rozszerzenie przyporządkowania

$$\alpha_i^1 \longmapsto \alpha_i^2$$

jest izometrią $: (E_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_1) \underset{\iota}{\cong} (E_2, \langle\cdot|\cdot\rangle_2^{\sim})$, a zatem — w szczególności —

$$\forall i \in \overline{1,r} : \iota \circ W_{\alpha_i^1} = W_{\alpha_i^2} \circ \iota$$ (co jest warunkiem koniecznym równoważności).

Istotnie, $\forall \beta \in E_1 : \quad \iota \circ W_{\alpha_i^1}(\beta) = \iota\left(\beta - 2\frac{\langle \beta | \alpha_i^1 \rangle_1}{\langle \alpha_i^1 | \alpha_i^1 \rangle_1} \triangleright \alpha_i^1\right)$

$$= \iota(\beta) - 2\frac{\langle \beta | \alpha_i^1 \rangle_1}{\langle \alpha_i^1 | \alpha_i^1 \rangle_1} \triangleright \iota(\alpha_i^1) = \iota(\beta) - 2\frac{\langle \iota^{-1}\circ\iota(\beta) | \iota^{-1}(\alpha_i^2) \rangle_1}{\langle \iota^{-1}(\alpha_i^2) | \iota^{-1}(\alpha_i^2) \rangle_1} \triangleright \alpha_i^2$$

przenormowanie w liczniku i mianowniku skracają się verte

$$= \iota(\beta) - 2\frac{\langle \iota(\beta) | \alpha_i^2 \rangle_2^\sim}{\langle \alpha_i^2 | \alpha_i^2 \rangle_2^\sim} \triangleright \alpha_i^2 \equiv W_{\alpha_i^2} \circ \iota(\beta).$$

Wyjaśnienie:

$$\frac{\langle \iota(\beta) | \alpha^2_i\rangle_2^{\sim}}{\langle \alpha^2_i|\alpha^2_i\rangle_2^{\sim}} = \frac{\dfrac{\langle\alpha^1_1|\alpha^1_1\rangle_1}{\langle\alpha^2_1|\alpha^2_1\rangle_2}\cdot\langle\iota(\beta)|\alpha^2_i\rangle_2}{\dfrac{\langle\alpha^1_1|\alpha^1_1\rangle_1}{\langle\alpha^2_1|\alpha^2_1\rangle_2}\cdot\langle\alpha^2_i|\alpha^2_i\rangle_2}$$

$$= \frac{\langle\iota(\beta)|\alpha^2_i\rangle_2}{\langle\alpha^2_i|\alpha^2_i\rangle_2}$$

W dowodzie str. 34 i 35 dowolny pierwiastek $\alpha \in R_1$ możemy zapisać w postaci (247)

$$\alpha = W_{\alpha^1_{i_1}} \circ W_{\alpha^1_{i_2}} \circ \ldots \circ W_{\alpha^1_{i_N}} (\alpha^1_j)$$

dla pewnych $j, i_1, i_2, \ldots, i_N \in \overline{1,r}$. W takim razie jednak

$$\iota(\alpha) = W_{\alpha^2_{i_1}} \circ W_{\alpha^2_{i_2}} \circ \ldots \circ W_{\alpha^2_{i_N}} (\alpha^2_j) \in R_2$$

(grupa $W(E_2, R_2)$ zachowuje R_2). Analogicznie pokazujemy, że $\iota^{-1}(R_2) \subset R_1$, skąd ostatecznie wniosek $\iota|_{R_1} : R_1 \cong R_2$, który kończy dowód. $\square$

Z połączenia Tw. 10 i 12. wyprowadzamy istotne dla nas (248)

<u>Corollarium</u> Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą a.L. o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{h}$ będzie jej podalgebrą Cartana odpowiadającą wyborowi $\mathfrak{t}$ maksymalnej podalgebry przemiennej w $\mathfrak{k}$. Wówczas $\mathfrak{g}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy diagram Dynkina $(\mathfrak{t}\otimes i, Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}))$ jest spójny.