Wykład XII

2023/24

Dotychczasowe rozważania doprowadzają nas do

Def. 25. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastków i niech $\Pi_\alpha = \mathrm{Ker}\,\langle\alpha|\cdot\rangle$, $\alpha\in R$. (OTWARTA) KOMNATA WEYLA systemu pierwiastkowego (E,R) to spójna składowa $E\setminus\bigcup_{\alpha\in R}\Pi_\alpha$. (OTWARTA) FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA s.p. (E,R) wzgl. bazy $\Delta=\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ to zbiór

$$\mathcal{C}(E,R;\Delta)=\left\{ v\in E \;\middle|\; \forall_{i\in\overline{1,r}}:\ \langle\alpha_i|v\rangle>0 \right\}.$$

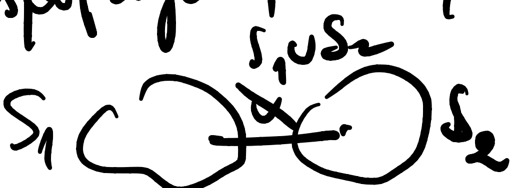
(NB: $\langle\alpha_i|v\rangle=0 \Leftrightarrow v\in\Pi_{\alpha_i}$, czyli jest to obszar ograniczony przez Π_{α_i}, $i\in\overline{1,r}$)

Pokażemy, że $\mathfrak{C}$ jest komorą Weyla...

NB: $\forall\, v_1, v_2 \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)\ \forall t\in[0,1]:$

$$v := t\triangleright v_1 + (1-t)\triangleright v_2 \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$$

W rzeczy samej $t,\ 1-t \geq 0$ i przynajmniej jedna z liczb $t,\ 1-t$ jest >0, co jednak oznacza, że $\forall i\in\overline{1,r}:\ \langle \alpha_i | v\rangle > 0$, czyli $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ jest zbiorem wypukłym, więc też spójnym, a ponadto istnieje 1-forma φ na E: verte 1° $\varphi(\alpha_i)=1,\ i\in\overline{1,r}$, przeto istnieje wektor v: $\langle\alpha_i|v\rangle = 1,\ i\in\overline{1,r}$, czyli $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)\neq\emptyset$. Wreszcie też



$\partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta) = \{v\in E \mid \exists i\in\overline{1,r}: \langle\alpha_i|v\rangle = 0\}$, zatem $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ jest komorą Weyla.

verte 3° verte 2°

1° Chcemy $\forall i \in \overline{1,r} : \varphi(e_i) = 1$. Bierzemy $\{\varphi^i\}_{i\in\overline{1,r}} : \varphi^i(e_j) = \delta^i_j$ (do 1½)

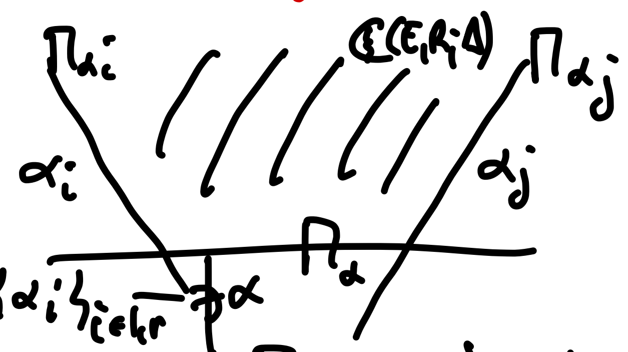
i kładziemy $\varphi := \sum_{i=1}^{r} \varphi^i$.

2° Niech $v \in \mathcal{E} \cap \Pi_\alpha$, $\alpha \in R$, czyli $\langle v|\alpha\rangle = 0$, ale $\underset{(i)}{\alpha \in \langle\Delta\rangle_{\mathbb{N}}} \veebar \underset{(ii)}{\alpha \in \langle\Delta\rangle_{-\mathbb{N}}}$

(i) $\Rightarrow 0 = \langle v|\alpha\rangle = \sum_i |n^i| \cdot \langle v|\alpha_i\rangle > 0 \overset{!}{\Rightarrow} \forall i : n_i = 0$ ↯

(ii) $\Rightarrow 0 = \langle v|\alpha\rangle = -\sum_i |n^i| \cdot \langle v|\alpha_i\rangle \overset{>0\,!}{\Rightarrow} \forall i : n_i = 0$ ↯

3° Dokładnie, nie może być



$\Delta = \{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}} \not\ni \alpha$,

bo wtedy opuszczenie $\mathcal{E}$ przez Π_α nie wiązałoby się ze złamaniem żadnego z warunków $\langle \alpha_i|v\rangle > 0$, $i \in \overline{1,r}$!

OBSERWACJE:

1) $\forall v \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)\ \forall \alpha \in R_+ : \langle \alpha | v \rangle > 0$

$(\Leftarrow\ \alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}})$

2) $\forall \chi \in W(E,R) : \chi(R) = R \ \wedge\ \chi \in O(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$

$\Rightarrow \chi(\{\Pi_\alpha\}_{\alpha \in R}) = \{\Pi_\alpha\}_{\alpha \in R}$

bo $\chi(\Pi_\alpha) = \{\chi(v) \mid (v|\alpha) = 0\}$

$\equiv \{\chi(v) \mid (\chi(v)|\chi(\alpha)) = 0\}$

$\equiv \Pi_{\chi(\alpha) \in R}$ i χ odwracalne!

$\Rightarrow \forall \bar{C}$ - otwarta komora Weyla : $\chi(\bar{C})$ - otwarta komora Weyla

($W(E,R)$ przeprowadza komory w komory.)

Okazuje się, że związek pomiędzy bazami i (fundamentalnymi) komorami Weyla jest 1:1...

Str. 34. $\forall C$ – otwarta komnata Weyla (E,R) $\exists!\, \Delta_C$ – baza R: (203)

$$C \equiv \mathfrak{C}(E,R;\Delta_C) \wedge R_+^{(\Delta_C)} \equiv \{\alpha\in R \mid \forall v\in \mathfrak{C}(E,R;\Delta_C) : \langle\alpha|v\rangle>0\}$$

Istnieje zatem jedno-jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy bazami R i otwartymi komnatami Weyla.

D: Niechaj $v\in C$ i rozważmy $\Pi_v = \langle v\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

Wprost z definicji C: v nie jest $\perp$ do żadnego pierwiastka (v ∈ DOPEŁNIENIE $\bigcup_{\alpha\in R}\Pi_\alpha$, tu $\perp\alpha$), zatem $\Pi_v \subset E\setminus R$ (nie zawiera pierwiastków, bo $\Pi_v \ni \alpha \Leftrightarrow v\in\Pi_\alpha$!). Na mocy Tw. 11 (1. część) istnieje baza $\Delta_C=\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ w części $E\setminus\Pi_v$ zawierającej v.

Jeśli jest $\operatorname{sign}\langle \alpha_i, \cdot\rangle\big|_C = \mathrm{const}$ (w p.p. przecięlibyśmy któryś z $\Pi_{\alpha_i} \in \{\Pi_\alpha\}_{\alpha\in R}$), przeto — wobec wyboru $v \in C$ tak, by miał położenie Δ_C — $\forall w \in C \ \forall i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | w \rangle > 0$, czyli też $\forall w \in C \ \forall \alpha \in R_+^{\Pi_v} : \langle w | \alpha \rangle > 0$, bo $R_+^{\Pi_v}$, $\hat{\Delta}_C \subset \underline{N}$
a ponieważ $R_\pm^{\Pi_v} \subset \langle \Delta_C \rangle_{\pm\mathbb{N}}$, więc $R_+^{\Pi_v}$ składa się z tych i tylko tych (czyli zawiera wszystkie i tylko te) pierwiastków, które mają dodatni iloczyn skalarny z elementami C.

Ostatecznie $C \equiv \mathfrak{C}(E, R; \Delta_C)$. Pozostaje upewnić się co do jedyności Δ_C.

Niech Δ_c' będzie dowolną bazą o fundamentalnej komorze Weyla $C = \mathfrak{C}(E, R; \Delta_c')$. Wówczas (205)

$\forall \alpha \in \Delta_c' \; \forall v \in C : \langle \alpha | v \rangle > 0$, czyli $\Delta_c' \subset R_+^{\Pi r}$, tj. w tej samej części co Δ_c.

Δ_c są nierozkładalne (tak że wykazaliśmy), ale Δ_c' jest bazą E (z zał.), więc elementy Δ_c rozkładają się w tejże bazie Δ_c'. Gdyby te rozkłady NIE były trywialne (z jedynym tylko $n^i \neq 0$, co właśnie daje $\Delta_c = \Delta_c'$), to oznaczałoby rozkładalność odnośnych elementów Δ_c (na sumy innych pierwiastków z dodatniej pół-przestrzeni). ↯ □

<u>Str. 35.</u> $\forall \alpha \in R \ \exists \Delta$-baza E : $\alpha \in \Delta$.

<u>D:</u> Zauważmy, że ściany $\partial \mathcal{C}(E, R; \Delta \equiv \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}})$ są fragmentami hiperpłaszczyzn Π_{α_i}, $i \in \overline{1,r}$.
(PATRZ: (201½))
Wystarczy zatem pokazać, że $\forall \alpha \in R$:
Π_α ma przecięcie $\Pi_\alpha \cap \partial C$, $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}}(\Pi_\alpha \cap \partial C) = 1$
z brzegiem pewnej komory Weyla C.
Rozważmy zatem $\alpha \in R$ i odnośną Π_α.
Ta ostatnia jest przestrzenią $\mathbb{R}$-liniową

wymiaru $\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha = \dim_{\mathbb{R}} E - 1$. Jej przecięcie z hiperpłaszczyznami Π_β, $\beta \in R \setminus \{\pm\alpha\}$ są podprzestrzeniami w Π_α wymiaru co najwyżej $\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha - 1$ (bo $\beta \notin \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$), zatem ich skończona suma <u>mnogościowa</u>, $\bigcup_{\beta \in R\setminus\{\pm\alpha\}} (\Pi_\beta \cap \Pi_\alpha)$ $|R\setminus\{\pm\alpha\}| < \infty$!
jest <u>właściwym</u> podzbiorem Π_α,

$$\bigcup_{\beta \in R\setminus\{\pm\alpha\}} (\Pi_\beta \cap \Pi_\alpha) \subsetneq \Pi_\alpha \quad \begin{pmatrix}\text{elementarna} \\ \text{algebra} \\ \text{liniowa}\end{pmatrix},$$

czyli $\exists\, v \in \Pi_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in R\setminus\{\pm\alpha\}} \Pi_\beta$.

patrz: str. 186

Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zachodzi wówczas $v_\varepsilon \equiv v + \varepsilon \triangleright \alpha \in C$ dla pewnej otwartej komory Weyla C (wszak $v_\varepsilon \in E \setminus \bigcup_{\beta \in R} \Pi_\beta$).

Połóżmy, że $\alpha \in \Delta_C$, gdzie $\underset{\{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}}{\overset{}{\Delta_C}}$ jest bazą, o której mówi Str. 34.

Zauważmy $\langle \alpha | v_\varepsilon \rangle \overset{v \in \Pi_\alpha}{=} \langle \alpha | \varepsilon \triangleright \alpha \rangle = \varepsilon \langle \alpha | \alpha \rangle > 0$, jest z pewnością $\alpha \in R_+^{\Delta_C}$. Zapiszmy przeto

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n^i \triangleright \alpha_i \,, \quad n^i \in \mathbb{N} \,,$$ a wtedy

bo $v_\varepsilon \in C$ (patrz: Str. 34)

→ skoro $\langle \alpha | v_\varepsilon \rangle > 0$, to nie ma $\tilde{v} \in C$: $\langle \alpha | \tilde{v} \rangle < 0$, bo byłoby $\langle \alpha | \tilde{v} \rangle = 0$ gdzieś po drodze, czyli $\Pi_\alpha \cap C \neq \emptyset$ ↯

$0 = \langle \alpha | v \rangle = \sum_{i=1}^{r} n^i \cdot \langle \alpha_i | v \rangle$, a ponieważ (209)

$v \in \partial C$, przeto $\langle \alpha_i | v \rangle \geq 0$, czyli

$\forall i \in \overline{1,r} : \left(n^i > 0 \Rightarrow \langle \alpha_i | v \rangle = 0 \right)$. Jednocześnie

bo $v \perp \beta \Leftrightarrow v \in \Pi_\beta$ ↯ (patrz: def. (207))

$\forall \beta \notin \{\pm \alpha\} : v \not\perp \beta$, przeto jeśli α nie jest w bazie, to ma rozkład w tejże, $\alpha = \sum n^i \triangleright \alpha_i$ z $n^i \geq 0$ i co najmniej dwa $n^i \neq 0 \neq n^j$, $i \neq j$,

ale wtedy $\langle \alpha_i | v \rangle = 0 = \langle \alpha_j | v \rangle$, tymczasem $\alpha_i, \alpha_j \notin \{\pm \alpha\}$, zatem $\alpha_i, \alpha_j \not\perp \beta$, więc sprzeczność.

W następnej kolejności zbadamy działanie $W(E,R)$ na zbiorze komór Weyla (patrz: obserwacja 2) ze str. 202), co doprowadzi nas do diagramatycznej reprezentacji systemów pierwiastkowych...

<u>Stw. 36.</u> Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym.

$$\forall \Delta\text{-baza } (E,R): \ W(E,R) = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle .$$

Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komór Weyla jest przechodnie.

D: Ustalmy bazę Δ i rozważmy podgrupę $W_\Delta \equiv \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \subset W(E,R)$.

Niechaj C będzie dowolną otwartą komorą Weyla. Wybierzmy $v \in \mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w \in C$. Pokażemy, że $\exists\, \chi \in W_\Delta : \chi(w) \in \mathcal{E}(E,R;\Delta)$. W tym celu wybierzmy $\chi_* \in W_\Delta$ spełniające warunek

$$\|\chi_*(w) - v\|_E = \min_{\chi \in W_\Delta} \|\chi(w) - v\|_E$$

(jest dobrze określone, gdyż $|W_\Delta| \leq |W(E,R)| < \infty$).

Załóżmy, że $\chi_*(w) \notin \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$, a wtedy

$\exists\, \alpha \in \Delta : \langle \alpha | \chi_*(w) \rangle < 0$, co jednak oznacza, że

(← $\Pi_\alpha, \alpha\in\Delta$ ograniczają $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ (warunki $\langle v|\alpha\rangle > 0$)) wobec $\langle v|\alpha\rangle > 0$ −

$$\|\chi_*(w) - v\|_E^2 - \|w_\alpha \circ \chi_*(w) - v\|_E^2$$

$$= \big(\chi_*(w) - v \,\big|\, \chi_*(w) - v\big) - \big(w_\alpha \circ \chi_*(w) - v \,\big|\, w_\alpha \circ \chi_*(w) - v\big)$$

$$= \cancel{(w|w)} - 2\big(\chi_*(w)\,|\,v\big) + \cancel{(v|v)}$$

$$- \cancel{(w|w)} + 2\big(w_\alpha \circ \chi_*(w)\,|\,v\big) - \cancel{(v|v)}$$

$$= 2\Big(\overbrace{\cancel{\chi_*(w)} - 2\frac{(\chi_*(w)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha - \cancel{\chi_*(w)}}\,\Big|\, v\Big) = -4\,\frac{(\chi_*(w)|\alpha)\cdot(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)},$$

czyli $\|u_\alpha \circ X_*(w) - v\| < \min\limits_{X \in W_\Delta} \|X(w) - v\|$ ↯

(wszak $u_\alpha \circ X_* \in W_\Delta$).

Zatem $X_*(w) \in \mathfrak{E}(E,R;\Delta)$, co wobec dowolności w oznacza, że C wnętrze odwzorowuje w $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ używając W_Δ, a ponieważ $X_* \in W_\Delta$ zachowuje kąty, jest jasne, że X_* przeprowadza całą komorę C w $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ ← ściany w ściany!, czyli $X_*(C) = \mathfrak{E}(E,R;\Delta)$.

W takim razie …

$\forall\, C_1, C_2$ – otwarte komory Weyla

$\exists\, \chi \in W_\Delta$: $\chi(C_1) = C_2$, co oznacza,

że W_Δ – tym bardziej więc W – działa

przechodnio na zbiorze komór.

Pozostaje przekonać się, że $W_\Delta = W$.

Rozważmy $\alpha \in R$. W świetle Stw. 35 $\left(\begin{array}{l}\forall \alpha \in R \\ \exists \text{ baza } \Delta \ni \alpha\end{array}\right)$

$\exists\, \Delta_{(\alpha)}$ – baza : $\alpha \in \Delta_{(\alpha)}$, więc też – $\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})$.

Ustalmy $\chi \in W_\Delta$: $\chi(\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})) = \mathfrak{C}(E, R; \Delta)$.

Skoro jednak $\chi(\alpha) \in \Delta$, co wynika z $\chi\big(\partial\mathfrak{E}(E,R;\Delta_{(\alpha)})\big) = \partial\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$, to zarówno χ (z zał.), jak i $w_{\chi(\alpha)}$ należą do W_Δ, ale...

<u>Lemat</u>: $\forall_{\alpha \in R}\ \forall_{\chi \in W(E,R)} : w_{\chi(\alpha)} = \chi \circ w_\alpha \circ \chi^{-1}$

<u>Dd</u>: $\forall_{v \in E}$:

$$w_{\chi(\alpha)}(v) \equiv v - 2\,\frac{(v|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$$

$$= \chi(\chi^{-1}(v)) - 2\,\frac{(\chi(\chi^{-1}(v))|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$$

$\mathbb{R}$-liniowość i izometryczność χ

$$\overset{\downarrow}{=} \chi\left(\chi^{-1}(v) - 2\,\frac{(\chi^{-1}(v)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \equiv \chi\big(w_\alpha(\chi^{-1}(v))\big) \quad \square$$

Wobec poprzedniego dostajemy zatem:

$$w_\alpha = \chi^{-1} \circ w_{\chi(\alpha)} \circ \chi \in W_\Delta^{-1} \cdot W_\Delta \cdot W_\Delta \subset W_\Delta ,$$

dla $\alpha \in R$ dowolne i $w_\alpha, \alpha \in R$ generują $W(E,R)$. $\square$

Pójdziemy teraz w kierunku dowodu swobody działania $W(E,R)$ na zbiorze komór...

W następnej kolejności dowodzimy – pomocniczo –

str. 37. $\forall C$ – otwarta komora Weyla (217)

$$\forall v, w \in \overline{C} \ \forall \chi \in W(E,R) : \big(w = \chi(v) \implies w = v \big).$$

<u>D</u>: Zaczniemy od

<u>Lemat</u>: Niechaj Δ będzie bazą R i niech $\chi \in W(E,R) \setminus \{ \mathrm{id}_E \}$. Ustalmy ROZKŁAD MINIMALNY $\chi = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \ldots \circ w_{\alpha_M}$, $\alpha_i \in \Delta$, tj. taki, w którym M jest najmniejsze z możliwych. Wówczas $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $\chi(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ leżą po przeciwległych stronach Π_{α_1}.

(indukcyjny wzgl. M)

<u>Dl:</u> Słowo $X \neq \mathrm{id}_E$, to $M \geq 1$. Jeśli $M=1$, (218)

to $X = W_{\alpha_1}$, a wtedy $X(\mathfrak{C}(E,R;\Delta)) \equiv W_{\alpha_1}(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$

jest odbiciem $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ w hiperpłaszczyźnie Π_{α_1},

zgodnie z tezą.

Załóżmy, że teza jest słuszna dla X

o rozkładach minimalnych o długości $< M$.

Niech $X = W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_2} \circ \ldots \circ W_{\alpha_M}$ i rozważmy $\underline{X} := W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_2} \circ \ldots \circ W_{\alpha_{M-1}}$.

Rozkład $\underline{X}$ jest minimalny, gdyby bowiem

nie był, rozkład X nie byłby minimalny, wbrew założeniu. Na mocy założenia indukcyjnego $\underline{\chi}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ i $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ leżą po przeciwnych stronach Π_{α_1}. Gdyby zatem $\chi(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ leżał po tej samej stronie Π_{α_1} co $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$, to również $\underline{\chi}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ i $\chi(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ leżałyby po przeciwnych stronach Π_{α_1}, $\underline{\chi}(w_{\alpha_M}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta)))$ czyli też – wobec odwracalności $\underline{\chi}$ – $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ leżałyby po przeciwnych stronach $\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$.

Okazuje się jednak, że istnieje dokładnie (220)
jedna hiperpłaszczyzna Π_β, $\beta \in R$ o tej własności,
że $\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ są po przeciwnych
stronach Π_β — jest to Π_{α_M}. Istotnie,
$\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ ~~są~~ po przeciwnych leżą
~~stronach~~ Π_{α_M}, a gdy tym $\Pi_{\alpha_M} \cap \partial\mathcal{E}(E,R;\Delta) \cap \partial w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta)) \neq \emptyset$
domknięte ... $w_{\alpha_M}(\Pi_{\alpha_M}) = \Pi_{\alpha_M}$
można więc $\sigma \in \partial\mathcal{E}(E,R;\Delta) \cap \Pi_{\alpha_M} \setminus \bigcup_{\beta \in R\setminus\{\pm\alpha_M\}} \Pi_\beta$,
a wtedy odcinek $\{v + t\alpha_M \mid t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$
dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zawiera pary wektorów

Istotnie, $\Pi_{\alpha_M} \cap \partial \mathcal{E}(E, R; \Delta) \neq \emptyset$, bo $\alpha_M \in \Delta$ (220½)

$$\Downarrow$$

$$w_{\alpha_M}(\Pi_{\alpha_M}) \cap w_{\alpha_M}\big(\partial \mathcal{E}(E, R; \Delta)\big) \neq \emptyset$$

$$\shortparallel$$

$$\Pi_{\alpha_M} \cap \partial\, w_{\alpha_M}\big(\mathcal{E}(E, R; \Delta)\big) \neq \emptyset$$

z $\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ i nie przecina żadnej Π_β, $\beta \in R \setminus \{\pm\alpha_M\}$, czyli wszystkie pary wektorów $(v + t\Delta\alpha_M, v - t\Delta\alpha_M)$ są po tej samej stronie wszystkich Π_β, $\beta \in R \setminus \{\pm\alpha_M\}$. (221)

Wracając do wcześniejszego rozumowania konstatujemy, że gdyby $\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ leżały po przeciwnych stronach $\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$, to byłoby $\Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)} \equiv \Pi_{\alpha_M}$, czyli też – w świetle Lematu ze str. 215 –

$$W_{\alpha_M} \equiv W_{\underline{X}^{-1}(\alpha_1)} = \underline{X}^{-1} \circ W_{\alpha_1} \circ \underline{X}$$, a to daje (222)

$$X \equiv \underline{X} \circ W_{\alpha_M} = W_{\alpha_1} \circ \underline{X} \equiv (W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_1}) \circ W_{\alpha_2} \circ \dots \circ W_{\alpha_{M-1}}$$

$$= W_{\alpha_2} \circ W_{\alpha_3} \circ \dots \circ W_{\alpha_{M-1}}$$, czyli reprezentacja

X krótsza (o 2) od minimalnej. ↯ ☒

Możemy więc przystąpić do dowodu twierdzenia.

Przeprowadźmy go metodą indukcji wzgl. długości L rozkładu minimalnego $\mathcal{X}$ na odbicia $w_\alpha, \alpha \in \Delta_C$. (2.2.3)

Jeśli $L = 0$, to $\mathcal{X} = id_E$ i teza jest spełniona trywialnie. Załóżmy, że jest ona spełniona także, gdy $L < M$. Niech teraz $\mathcal{X} = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \ldots \circ w_{\alpha_M}$ będzie rozkładem minimalnym. W świetle Lematu $\mathcal{E}(E; R; \Delta_C) \equiv C$ i $\mathcal{X}(\mathcal{E}(E; R; \Delta_C))$ leżą po przeciwnych stronach Π_{α_1} i

$$\overline{\mathcal{X}(\mathcal{E}(E; R; \Delta_C))} \cap \overline{\mathcal{E}(E; R; \Delta_C)} \subset \Pi_{\alpha_1},$$

co oznacza, że $\chi(v) \equiv w \in \Pi_{\alpha_1}$, skąd dalej

$$w_{\alpha_1} \circ \chi(v) = w_{\alpha_1}(w) = w$$

$$\overset{L}{=} \underbrace{w_{\alpha_2} \circ w_{\alpha_3} \circ \ldots \circ w_{\alpha_M}}_{\underline{\chi}}(v)\text{, czyli}$$

$$\underline{\chi}(v) = w \quad \text{dla} \quad v, w \in \mathcal{E}(E, R; \Delta_c) \equiv C,$$

ale rozkład $\underline{\chi}$ ma długość $M-1$, więc możemy zastosować założenie indukcyjne, aby stwierdzić, że w takim razie $v = w$.

$\square$