Wykład XI

2023/24

Możemy wreszcie sformułować

<u>Tw. 10.</u> Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą a.L. o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ będzie podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$ stowarzyszoną z maksymalną podalgebrą przemienną $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$. Wówczas $\mathfrak{g}$ <u>nie</u> jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{h}$ rozkłada się na ortogonalną sumę prostą podprzestrzeni

$$\mathfrak{h} = \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_1} \oplus \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_2}$$

o własności

$$\forall \alpha \in R(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) : \left(\alpha \in \mathfrak{h}_1 \ \underline{\vee}\ \alpha \in \mathfrak{h}_2\right).$$

<u>D</u>: $\boxed{\Rightarrow}$ Załóżmy najpierw, że $\mathfrak{g}$ <u>nie</u> jest proste, więc też – w świetle Tw. 9 – $\mathfrak{k}$ nie jest proste. Istnieje zatem nietrywialny ideał $\mathfrak{k}_1 \subsetneq \mathfrak{k}$. W świetle adaptacji dowodu ⊛ Stw. 19 i przy dodatkowym wyborze iloczynu skalarnego na $\mathfrak{k}$ (Ad$_K$-niezmienniczego) stwierdzamy, że także $\mathfrak{k}_1^\perp$ jest ideałem w $\mathfrak{k}$, czyli

verte!

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \,, \quad \mathfrak{k}_2 \equiv \mathfrak{k}_1^\perp \,,$$

a zatem $$\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{k}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \,.$$

(*) Niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ ideał $\Leftrightarrow [\mathfrak{k},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}$
(dla $\mathbb{R}$-algebry Liego)

Oczywiście jako przestrzenie $\mathbb{R}$-lin.: $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$.

Niech $X \in \mathfrak{h}^{\perp} \Leftrightarrow (X|\mathfrak{h}) = \{0\}$, ale wtedy

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}}(X)|\mathfrak{h}) = -(X|\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})) \subset (X|\mathfrak{h}) = \{0\},$$

czyli $[\mathfrak{k},\mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}^{\perp} \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} [\mathfrak{h},\mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} & \subset \mathfrak{h}^{\perp} & \\ \| \text{ ale też} & \cap & = \{0\}, \\ -[\mathfrak{h}^{\perp},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{k}} & \subset \mathfrak{h} & \end{array}$$

czyli $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} = \{0\} \Rightarrow \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ jako A.L.

Niechaj $\mathfrak{t}$ będzie maksymalną podalgebrą przemienną w $\mathfrak{k}$. Pokażemy, że $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$, gdzie $\mathfrak{t}_A \subset \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$. Przypuśćmy, że

NIE zwęczy bo że $X_A, \tilde{X}_A \in \mathfrak{t}$!!!!

$H = X_1 + X_2$, $\tilde{H} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 \in \mathfrak{t}$, gdzie $X_A, \tilde{X}_A \in \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$.

Wówczas
$$0 = [H, \tilde{H}]_{\mathfrak{k}} = \underbrace{[X_1, \tilde{X}_1]_{\mathfrak{k}}}_{\in\, \mathfrak{k}_1} + \underbrace{[X_2, \tilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}}_{\in\, \mathfrak{k}_2}$$
(wszak $[\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2]_{\mathfrak{k}} = 0$),

zatem $[X_1, \tilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}} = [X_2, \tilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}$, a w takim razie

$[X_1, \tilde{H}]_{\mathfrak{k}} = [X_1, \tilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$, czyli $[X_1, \mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$, co wobec nierozkładalności $\mathfrak{t}$ oznacza, że $X_1 \in \mathfrak{t}$. Analogicznie pokazujemy, że $X_2 \in \mathfrak{t}$. To jednak oznacza, że $\mathfrak{t} = \underset{\mathfrak{t}_1}{\underbrace{(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{k}_1)}} \oplus \underset{\mathfrak{t}_2}{\underbrace{(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{k}_2)}}$, a zatem także $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$.

Dla dowolnych $\alpha \in Q(\underset{\mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}}}{\mathfrak{g}_1}; \underset{\mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}}{\mathfrak{h}_1})$ i $X \in \overset{\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_{1\alpha}}$ oraz $\underset{\in\mathfrak{h}}{H} = \underset{\in\mathfrak{h}_1}{H_1} + \underset{\in\mathfrak{h}_2}{H_2}$ obliczamy

$$[H,X]_\mathfrak{g} = [H_1,X]_\mathfrak{g} + \overset{=0}{[\underset{\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_2}{H_2}, \underset{\mathfrak{g}_1}{X}]_\mathfrak{g}} = [H_1,X]_\mathfrak{g} = (\alpha|H_1) \triangleright X \equiv (\alpha|H) \triangleright X \quad \left(\begin{array}{c}\text{wszak}\\ \alpha \perp \mathfrak{h}_2\end{array}\right),$$

$$\mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{t}_2 \otimes \mathbb{C} \;\perp\; \alpha \in \mathfrak{t}_1 \otimes i$$

a stąd wniosek, że także $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$.

Analogicznie dowodzimy, że każdy $\beta \in Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{h}_2)$ jest też w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$. (171)

Pokażemy, że każdy $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$ jest albo w $Q(\mathfrak{g}_1;\mathfrak{h}_1)$, albo w $Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{h}_2)$. Niech $X = \underset{\mathfrak{g}_1}{X_1} + \underset{\mathfrak{g}_2}{X_2} \in \mathfrak{g}_\alpha$ i weźmy $H_1 \in \mathfrak{h}_1$ (dowolne), a wtedy

$$\underset{\mathfrak{g}_1}{[H_1, X_1]_{\mathfrak{g}}} \equiv [H_1, X_1]_{\mathfrak{g}} + \underbrace{[H_1, X_2]_{\mathfrak{g}}}_{0} = [H_1, X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_1) \triangleright X$$

$$\equiv \underset{\mathfrak{g}_1}{(\alpha|H_1) \triangleright X_1} + \underset{\mathfrak{g}_2}{(\alpha|H_1) \triangleright X_2},$$

zatem albo $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, albo $(\alpha|H_1) = 0$, co wobec dowolności H_1 oznacza $\alpha \perp \mathfrak{h}_1$. Jeśli $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, to $\forall H_2 \in \mathfrak{h}_2 : 0_{\mathfrak{g}} = [H_2, X_1]_{\mathfrak{g}} \overset{X_2 = 0_{\mathfrak{g}}}{\equiv} [H_2, X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_2) \triangleright \underset{\neq}{X}$, czyli $\alpha \perp \mathfrak{h}_2$, czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_1$, wtedy jednak $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_1; \mathfrak{t}_1)$. (172)

W przeciwnym razie (gdy $x_2 \neq 0_{\mathfrak{g}}$), $\alpha \perp \mathfrak{t}_1$, czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_2$,

co implikuje $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_2; \mathfrak{t}_2)$. $\boxtimes$

$\boxed{\Leftarrow}$ Przyjmijmy teraz, że $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1^{\times 0} \oplus \mathfrak{t}_2^{\times 0}$ $A \in \{1,2\}$

i $\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) : (\alpha \in \mathfrak{t}_1 \ \underline{\vee}\ \alpha \in \mathfrak{t}_2)$. Oznaczmy $R_A = Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) \cap \mathfrak{t}_A^{*}$,

i zdefiniujmy $\mathfrak{g}_A := \mathfrak{t}_A \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_A} \mathfrak{g}_\alpha$, $A \in \{1,2\}$, a wtedy

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, ale też $\begin{cases} \forall \alpha \in R_2 : [\mathfrak{t}_1, \mathfrak{g}_\alpha]_{\mathfrak{g}} = (\alpha | \mathfrak{t}_1) \triangleright \mathfrak{g}_\alpha = 0_{\mathfrak{g}} \\ \forall \alpha \in R_1 : [\mathfrak{t}_2, \mathfrak{g}_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}} \end{cases}$

jako przestrzeni $\mathbb{C}$-lin.!

i oczywiście $[\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}}$. Ponadto $\forall \alpha_A \in R_A : [\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}}$, albowiem

$\alpha_1 + \alpha_2 \notin R_1 \cup R_2 \equiv Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t})$. Ostatecznie więc $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako algebry Liego. $\square$

Przeprowadzimy obecnie studium

dostrukcyjnego systemu pierwiastkowego...

Zaczniemy od elementarnego

<u>Stw. 28.</u> Niechaj (E_A, R_A), $A \in \{1,2\}$ będą systemami

pierwiastkowymi. Wówczas $(E_1 \oplus E_2, R_1 \cup R_2)$, czyli $\oplus$!

nowe proste przestrzeni $\square$!

gdzie $R_A = j_{R_A}(R_A)$, $j_{R_A} : R_A \hookrightarrow E_A$, jest

$r_1 = (r_1, 0)$, $r_2 = (0, r_2)$

systemem pierwiastkowym, zwanym

SUMĄ PROSTĄ systemów pierwiastkowych

(E_A, R_A).

$\underline{D}$: Jako że $E_A = \langle R_A \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto 174

$\langle R_1 \cup R_2 \rangle_{\mathbb{R}} = E_1 \oplus E_2$, względnie (SP1) v.

(SP2) jest spełniony, gdyż R_A jest SP dla E_A.

Jeśli $\alpha, \beta \in R_A$, to $w_\alpha(\beta) \in R_A \subset R_1 \cup R_2$.

Jeśli natomiast $\alpha_A \in R_A$, to $w_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2$

i $w_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1$, bo $(\alpha_1 | \alpha_2) = 0$ w $E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2$.

W sumie mamy (SP3) v.

Prawdziwość (SP4) wynika z tożsamości

$$A^{E_1 \oplus E_2}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} A^{E_A}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z} & \text{dla } \alpha,\beta \in R_A \\ 0 & \text{dla } \alpha \in R_1,\ \beta \in R_2 . \end{cases} \qquad \square$$

Uwagi dla wyrażeń klasyfikacyjnych:

<u>Stw. 29.</u> Niechaj $\alpha,\beta \in R$, przy czym $\beta \notin \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$, a ponadto $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\beta|\beta\rangle$. Wówczas zachodzi dysjunkcja

(1) $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$

$\veebar$ (2) $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle \wedge \measuredangle(\alpha,\beta) \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

$\veebar$ (3) $\langle\alpha|\alpha\rangle = 2\langle\beta|\beta\rangle \wedge \measuredangle(\alpha,\beta) \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

$\veebar$ (4) $\langle\alpha|\alpha\rangle = 3\langle\beta|\beta\rangle \wedge \measuredangle(\alpha,\beta) \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

D: Oznaczmy $n_1 := 2\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$, $n_2 := 2\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$.

Wiemy, że $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Jest

wersory

$$n_1\cdot n_2 = 4\frac{\langle\alpha|\beta\rangle^2}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle} \equiv 4\langle\hat{\alpha}|\hat{\beta}\rangle^2 \equiv 4\cos^2\underbrace{\sphericalangle(\alpha,\beta)}_{\equiv\,\Theta}$$

oraz

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \geq 1,$$ o ile $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$ (założenie).

p.p. $n_1 = 0 = n_2$

W takim razie $0 \leq \overset{\mathbb{Z}}{n_1\cdot n_2} \leq 4$, czyli $n_1\cdot n_2 \in \{0,1,2,3,4\}$.

Przy tym jeśli $n_1\cdot n_2 = 0$, to $\cos\Theta = 0$, czyli $\alpha\perp\beta$, a jeśli $n_1\cdot n_2 = 4$, to $\cos^2\Theta = 1$, czyli $\beta\in\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$.

(tego liczę!)

Rozważymy pozostałe przypadki:

(*) $n_1 \cdot n_2 = 1 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{4} \iff \theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$,

ale $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, więc $(n_1, n_2) \in \{(1,1), (-1,-1)\}$.

$(n_1, n_2) = (1,1) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle > 0$, zatem $\theta = \frac{\pi}{3}$

$(n_1, n_2) = (-1,-1) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle < 0$, zatem $\theta = \frac{2\pi}{3}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1} = 1$, czyli $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle$.

(**) $n_1 \cdot n_2 = 2 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{2} \iff \theta \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$, ale

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ i $|n_2| \geq |n_1|$ (bo $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\beta|\beta\rangle$), zatem

$(n_1, n_2) \in \{(1,2), (-1,-2)\}$, [...] czyli

$(n_1,n_2)=(1,2) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle>0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$(n_1,n_2)=(-1,-2) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle<0 \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1}=2 \Leftrightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle=2\langle\beta|\beta\rangle$.

(***) Analogicznie jak w przypadku (**). $\square$

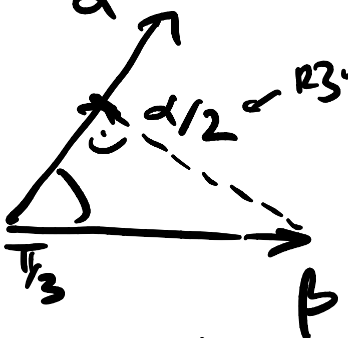
<u>Corollarium</u>: Niech $\alpha,\beta\in R$.

(i) $\measuredangle(\alpha,\beta)\in\,]\frac{\pi}{2},\pi[$ (rozwarty) $\Rightarrow \alpha+\beta\in R$

(ii) $\measuredangle(\alpha,\beta)\in\,]0,\frac{\pi}{2}[$ (ostry) $\Longrightarrow \alpha-\beta,\ \beta-\alpha\in R$.

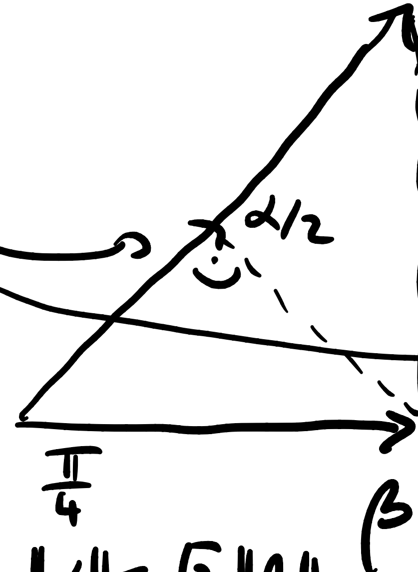
<u>DC</u>: Rozważamy po kolei możliwości (1)-(4) ze str. 29, zakładając $\langle\alpha|\alpha\rangle\geq\langle\beta|\beta\rangle$.

$\langle \alpha | \beta \rangle \neq 0 \implies$



$\|\alpha\| = \|\beta\|$

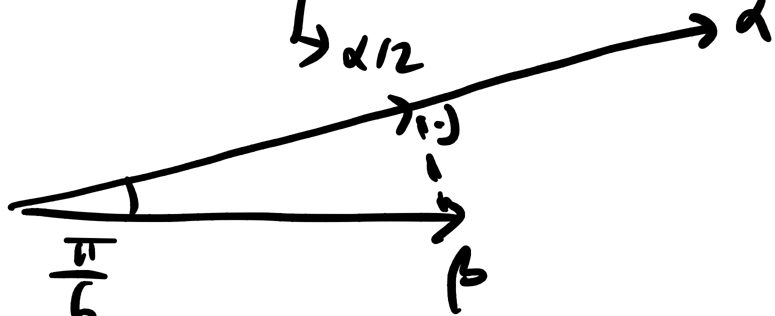
α/2 – rzut β na α



$\|\alpha\| = \sqrt{2}\,\|\beta\|$

kąt ostry

$\vee$



$\vee$

$\implies w_\alpha(\beta) = \beta - 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$
$\equiv \beta - \alpha \in R$,
a stąd także
$-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in R$.

Jeżeli $K(\alpha,\beta)$ rozwarty, jest $K(-\alpha,\beta)$ jest ostry i równy poprzednim wartościom, przeto 180

$$P^{\langle\alpha\rangle^\perp}_{\langle\alpha\rangle}(\beta) = -\frac{\alpha}{2},$$ a stąd $w_\alpha(\beta) = \beta - 2\cdot\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha+\beta \in R$. □

(POMINIĘTE!)

W naszych studiach systemów pierwiastkowych półprostych algebr Liego natrafiliśmy na obiekty „dualne", tj. kopierwiastki. Te wpiszę w nasze obecne rozważania.

Stw. 30 Niech (E,R) będzie systemem pierwiastkowym. Wówczas $(E,R^\vee)$, gdzie $R^\vee = \left\{ \alpha^\vee = \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle}\cdot\alpha \;\middle|\; \alpha\in R \right\}$

takiż jest systemem pierwiastkowym, gdyż czym $W(E,R^\vee) = W(E,R)$ i $(R^\vee)^\vee = R$. System ten określamy mianem **DUALNEGO SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO**, a jego elementy nazywamy **KOPIERWIASTKAMI**.

(181)

$\underline{D}$: obliczamy $\langle\alpha^\vee|\alpha^\vee\rangle = 4\frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle^2} = \frac{4}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$,

zatem $(\alpha^\vee)^\vee \equiv \frac{2}{\langle\alpha^\vee|\alpha^\vee\rangle} \triangleright \alpha^\vee = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{2} \cdot \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \triangleright \alpha = \alpha$.

Ponadto $A_{\alpha^\vee,\beta^\vee} \equiv 2\frac{\langle\alpha^\vee|\beta^\vee\rangle}{\langle\alpha^\vee|\alpha^\vee\rangle} = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{2} \cdot \langle \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \triangleright \alpha | \frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright \beta\rangle$

$$= \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \equiv A_{\beta|\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

(182)

transpozycja w macierzy Cartana

Wobec $\alpha^\vee \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$ mamy też $W_{\alpha^\vee} \equiv W_\alpha$, a przy tym

$$W_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) \equiv W_\alpha\left(\frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright \beta\right) = \frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright W_\alpha(\beta)$$

$$= \frac{2}{\langle W_\alpha(\beta)|W_\alpha(\beta)\rangle} \triangleright W_\alpha(\beta) \equiv W_\alpha(\beta)^\vee,$$

co ma sens,

$W_\alpha \in O(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$

bo R jest zachowywana przez $W(E,R)$.

W takim razie $\forall\, w \in W(E,R^\vee) \equiv W(E,R)$:

$$w(R^\vee) \subset R^\vee .$$

Przy tym $\langle \alpha^\vee \mid \alpha^\vee \in R^\vee \rangle \equiv \langle \alpha \mid \alpha \in R \rangle = E$.

Wreszcie tej jedyne R-krotności $\alpha^\vee$ to te, które pochodzą od R-krotności α, czyli

$$(\pm\alpha)^\vee = \pm\alpha^\vee . \qquad \square$$

N.B. $\forall\, \alpha,\beta \in R : \|\alpha\| = \|\beta\| \Rightarrow R^\vee \cong R$.

Izomorfizm taki może mieć miejsce nawet gdy równość jednakiej długości pierwiastków nie jest spełniona (izomorfizmy nie muszą być identycznościami)

KONIEC OBJAZDU

Pojęcie porządkujące nasze rozważania wprowadza

Def. 23. Niech (E,R) będzie systemem pierwiastkowym.

BAZA SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO to podzbiór $\Delta \subset R$

o własnościach: (BSP1) Δ jest bazą E

rozkład jest jednoznaczny (BSP2) $R = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \setminus \{0\} \cup \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \setminus \{0\}$

Pierwiastki $\alpha \in \underbrace{\langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \setminus \{0\}}_{R_+}$ nazywamy pierwiastkami **DODATNICH**.

Pierwiastki $\alpha \in \underbrace{\langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \setminus \{0\}}_{R_-}$ nazywamy pierwiastkami **UJEMNYCH**.

Elementy Δ nazywamy **DODATNIMI PIERWIASTKAMI PROSTYMI**.

W dalszej części wykładu zakładamy geometrię kąty... oraz E i R w relacji do Δ ...

Str. 31. $\forall \alpha,\beta \in \Delta : \left(\alpha \neq \beta \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle \leq 0 \right).$

(czyli $\measuredangle(\alpha,\beta) \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$).

D: A.a. Niech $\langle \alpha | \beta \rangle > 0$, a wtedy $\measuredangle(\alpha,\beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

więc na mocy Corollarium $\alpha - \beta$ i $\beta - \alpha \in R$.

Jednoznaczny rozkład $\alpha - \beta$ w bazie Δ byłby

jednak niezgodny z (BSP2). $\lightning$ $\square$

Następnie dowodzimy

Pomocniczo rozważymy...

Stw. 32. $\exists\, \Pi \subset E$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1 : \Pi \cap R = \emptyset$.

86

D: Niechaj $\alpha \in R$ i niech $\Pi_\alpha := \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \equiv \operatorname{Ker}\langle \alpha | \cdot \rangle$

$(\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\langle \alpha | \cdot \rangle \equiv \dim_{\mathbb{R}} E - 1)$.

$|R| < \infty \Longrightarrow \exists\, h \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \Pi_\alpha$ (intuicja: $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}} \cup \langle e_2 \rangle_{\mathbb{R}} \neq \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ dla e_1, e_2 LNZ).

Niechaj teraz $\Pi_h = \langle h \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, a wtedy $\alpha \in \Pi_h$ oznacza $h \in \Pi_\alpha$, co nie może zachodzić dla $\alpha \in R$. Π_h jest poszukiwaną hiperpłaszczyzną. $\square$

Możemy użyć poniższego w

(187)

Def. 24. Niech (E, R) będzie systemem pierwiastkowym i niech $\Pi \subset E$ jak w str. 32, a wówczas $R = R_+^\Pi \sqcup R_-^\Pi$, gdzie $R_\pm^\Pi$ jest zawarty w spójnej składowej $E_\pm^\Pi$ rozkładu $E \setminus \Pi = E_+^\Pi \sqcup E_-^\Pi$.

Pierwiastek $\alpha \in R_\pm^\Pi$ nazywamy ROZKŁADALNYM, wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists\, \beta, \gamma \in R_\pm^\Pi : \beta + \gamma = \alpha$. W przeciwnym razie mówimy, że α jest NIEROZKŁADALNY.

Mamy ulepszone...

Tw. 11. Niechaj (E,R) będzie SP, a $\Pi \subset E$ jak w stw. 32, R_+^{Π} zaś – jak w Def. 24. Wówczas zbiór nierozkładalnych elementów R_+^{Π} jest bazą R. I odwrotnie, dla dowolnej bazy $\Delta \subset R$ istnieje $\Pi_\Delta \subset E$: Δ jest podzbiorem nierozkładalnych elementów $R_+^{\Pi_\Delta}$ („generuje" Π_Δ).

D: $|\Rightarrow|$ Niechaj $\Delta_\Pi \subset R_+^{\Pi}$ będzie zbiorem elementów nierozkładalnych. Wybrawszy $h_{\neq 0} \perp \Pi$, mamy
$$E_+^{\Pi} = \{ v \in E \mid \langle h | v \rangle > 0 \}.$$

Po pierwsze zauważamy, że czyli: Δ_Π generuje R^Π_+ nad $\mathbb{N}$

189

* $\forall \alpha \in R^\Pi_+ \; \exists \{n_\delta\}_{\delta\in\Delta_\Pi} \subset \mathbb{N} : \alpha = \sum_{\delta\in\Delta_\Pi} n_\delta \cdot \delta.$

Załóżmy przeciwnie i wybierzmy pośród elementów R^Π_+, dla których nie istnieją takie współczynniki — oznaczmy je $N\Delta_\Pi$ —, takie $\alpha \in R^\Pi_+$, które ma minimalny ($\exists$, bo $|R|<\infty$) rzut $\langle h|\alpha\rangle$.

Oczywiście $\alpha \notin \Delta_\Pi$ (bo elementy Δ_Π mają takie (trywialne) współczynniki), zatem α jest rozkładalny, $\exists\, \beta_1, \beta_2 \in R^\Pi_+ : \alpha = \beta_1 + \beta_2$. Przy tym gdyby oba pierwiastki β_1 i β_2 były kombinacjami elementów Δ_Π ze współczynnikami z $\mathbb{N}$, to mamy własność wadliwy α.

W takim jednak razie jeden z nich, np. β_1, należy do $N\Delta_\Pi$. Ale

$$\underbrace{\langle h|\alpha\rangle}_{>0} = \underbrace{\langle h|\beta_1\rangle}_{>0} + \underbrace{\langle h|\beta_2\rangle}_{>0}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle h|\beta_1\rangle < \langle h|\alpha\rangle \quad ↯$$

(wszak α ma minimalny rzut na h!)

** Jeśli teraz $\alpha, \beta \in \Delta_\Pi$ i $\alpha \neq \beta$, to $\langle \alpha|\beta\rangle \leqslant 0$ (co nie jest oczywiste na obecnym etapie, bo nie pokazaliśmy, że Δ_Π jest bazą). Istotnie, gdyby było $\langle \alpha|\beta\rangle > 0$, to $\alpha-\beta, -(\alpha-\beta) \in R$, ale w jeden [dokładnie!] $\exists$ nie należy do R^Π_+.

$\alpha-\beta\in R^\Pi_+ \Rightarrow \alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ — rozkładalny ↯

$\beta-\alpha\in R^\Pi_+ \Rightarrow \beta=(\beta-\alpha)+\alpha$ — " — ↯

Ponadto zbiór Δ_Π jest LNZ. ***

Istotnie, niech $\sum_{\alpha\in\Delta_\Pi}\lambda_\alpha\rhd\alpha=0$, przy czym

(usuwamy $\alpha \ni \lambda_\alpha = 0$)

$$\left(\underset{\Delta^1_\Pi}{\Delta^1_\Pi} \cap \underset{\Delta^2_\Pi}{\Delta^2_\Pi} = \emptyset\right) \longrightarrow \;=\; \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_\Pi}\underset{\geq 0}{|\lambda_{\alpha_1}|}\rhd\alpha_1-\sum_{\alpha_2\in\Delta^2_\Pi}\underset{\geq 0}{|\lambda_{\alpha_2}|}\rhd\alpha_2$$

≥ 0: zał. ≥ 0

czyli $\underbrace{\sum_{\alpha_1\in\Delta^1_\Pi}|\lambda_{\alpha_1}|\rhd\alpha_1}_{v} = \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_\Pi}|\lambda_{\alpha_2}|\rhd\alpha_2$, a wtedy

$$\langle v|v\rangle \equiv \Big\langle \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 \,\Big|\, \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_n} |\lambda_{\alpha_2}| \triangleright \alpha_2 \Big\rangle$$ 192

$$= \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_n} |\lambda_{\alpha_1}|\cdot|\lambda_{\alpha_2}|\cdot\langle \alpha_1|\alpha_2\rangle \underset{**}{\leq} 0 \text{, zatem}$$

$v=0$, tj. $\sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 = 0 = \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_n} |\lambda_{\alpha_2}| \triangleright \alpha_2$,

wtedy jednak $0 = \Big\langle h \,\Big|\, \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 \Big\rangle$

$$= \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \cdot \underset{\underset{0}{\vee}}{\langle h|\alpha_1\rangle} \quad (\text{bo } \alpha_i \in \mathbb{R}^n_+)$$ skąd

więc $|\lambda_{\alpha_1}| = 0$; analogicznie $|\lambda_{\alpha_2}| = 0$.

↯ (wszystkie $\lambda_{\alpha_i} \neq 0$) ↯

Skoro jednak $R^{\Pi}_{+} \subset \langle \Delta_{\Pi} \rangle_{\mathbb{N}}$, to także

$\alpha \mapsto -\alpha$ zachowuje R i zmienia znaki zgodnie $\langle \alpha | h \rangle \mapsto -\langle \alpha | h \rangle$

$R^{\Pi}_{-} \equiv -R^{\Pi}_{+} \subset \langle \Delta_{\Pi} \rangle_{-\mathbb{N}}$, a ponieważ $E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto $E = \langle \Delta_{\Pi} \rangle_{\mathbb{R}}$, co pokazuje, że Δ_{Π} jest bazą E. ■

$\boxed{\Leftarrow}$ Niechaj teraz $\Delta = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$ będzie bazą R, czyli też bazą E. Ustalmy (dowolne) liczby $\lambda_i > 0$, $i \in \overline{1,r}$ i odpowiadający im (jednozn.) element $\gamma \in E$: $\forall_{i \in \overline{1,r}} : \langle \gamma | \alpha_i \rangle = \lambda_i$.

Komentarz: Niech $\{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$ baza V, $\{\lambda_i\}_{i \in \overline{1}} \subset \mathbb{K}$ (dow.) (193½)

Szukamy $\varphi \in V^*$: $\forall i \in \overline{1,r} : \varphi(\alpha_i) = \lambda_i$.

Jest $\varphi = \lambda_i \triangleright a^i$, gdzie $a^i(\alpha_j) = \delta^i{}_j$.

Niezwyrodnienie $\langle \cdot | \cdot \rangle$ pozwala przypisać

φ jedyny wektor γ : $\varphi \equiv \langle \gamma | \cdot \rangle$.

Mając γ, stwierdzamy, iż na $R_+ \equiv R \cap \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}} \ni \alpha$ jest $\langle \gamma | \alpha \rangle > 0$, czyli $R_+ \subset E_+^{\Pi_\gamma}$ (str. 187), gdzie $\Pi_\gamma = \langle \gamma \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \subset E$.

Niechaj teraz $\alpha \in \Delta^{c R_+}$ i załóżmy, iż α rozkładalny na co najmniej dwa elementy R_+ (oczywiście ze współczynnikami z $\mathbb{N}^\times$). Oba elementy nie mogą być z $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$, bo $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}} \cap R = \{\pm\alpha\}$, zatem $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i $\beta_1 \neq \alpha$ (np.), czyli w rozkładzie bazowego! α występuje $\neq \alpha$ 195

pierwiastek $\tilde{\alpha} \in \Delta$ (z $\neq 0$ współczynnikiem)

– wszak β_1 rozkładalny w bazie Δ. verte

To jednak oznacza, że Δ <u>nie</u> jest LNZ. ↯

Każdy zatem $\alpha \in \Delta$ jest nierozkładalny.

W takim razie na mocy udowodnionej

części $\boxed{\Rightarrow}$ twierdzenia $\Delta \subset \Delta_{\Pi_\gamma}$. Ale

Δ_{Π_γ} jest bazą E, zatem $|\Delta_{\Pi_\gamma}| = \dim_{\mathbb{R}} E \equiv |\Delta|$,

czyli $\Delta \equiv \Delta_{\Pi_\gamma}$. $\square$

Gdyby było: $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i składowa $\sim \alpha_i$ w β_1 (195½)

znosiłaby się ze składową $\sim \alpha_i$ w β_2

(Innymi słowy: α nie ma takiej składowej),

to jeden z β_1, β_2 byłby z R_- !
$\qquad \qquad \sim R \cap \langle \Delta \rangle_{-\mathbb{N}}$

Założyliśmy tymczasem, że oba $\in R_+$.

———— x ————

Zachodzi też

Str. 33. Niech Δ będzie bazą R. (196)

Wówczas $\{\alpha^\vee\}_{\alpha\in\Delta}$ jest bazą $R^\vee$.

D: Zaczniemy od

Lemat: Niech Δ będzie bazą R, a $R_+ \equiv R\cap\langle\Delta\rangle_{\mathbb{N}}$ – zbiorem pierwiastków dodatnich.

$$\forall_{\alpha\in\Delta} : \alpha\notin\langle R_+\setminus\{\alpha\}\rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}.$$

DL: A.a. Oznaczmy dla wygody $\alpha_1=\alpha$ i $\Delta\setminus\{\alpha\}=\{\alpha_j\}_{j\in\overline{2,r}}$.

Przyjmijmy, że $\alpha_1 = \sum_{\beta\in R_+\setminus\{\alpha\}} \lambda_\beta \cdot \beta$, $\lambda_\beta\in\mathbb{R}$.

Skoro $R_+\subset\langle\Delta\rangle_{\mathbb{N}}$, to dostajemy układ

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \triangleright \alpha_i \quad , \quad \mu_i \geq 0$$ 197

Wobec liniowej niezależności $\{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$

musi być $\mu_i = \delta_{i1}$, ale każdy $\beta \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}$ ≥ 0, w rozkładzie

zatem to implikuje $\forall \beta$ w rozkładzie : $\beta \in \langle \alpha_1 \rangle_{\mathbb{R}}$!

czyli $\forall \beta$ w rozkładzie : $\beta = \alpha_1$ (innych $\mathbb{R}$-krotności

nie ma w R_+). $\lightning$ (wszak $\beta \in R_+ \setminus \{\alpha_1\}$) $\boxtimes$

Wracamy do dowodu twierdzenia...

Ustalmy $\Pi_\Delta \subset R$, $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \Pi_\Delta = 1$ w relacji z Δ

jak w $\overline{\mathrm{Tw.}\ 1\,1}$ (str. 188), oznaczając przy tym jako E_+

podzbiór E zawierający Δ, tj. R_+ są pierwiastkami dodatnimi wzgl. Δ.

Wtedy zachodzi $\{\alpha^\vee\}_{\alpha\in R_+} \subset E_+$ i $\{\beta^\vee\}_{\beta\in R_-} \subset E_-$.

Na mocy Tw. 11 : $\exists\, \Delta^\vee$ bazą $R^\vee$: $R^\vee_+ \equiv \{\alpha^\vee\}_{\alpha\in R_+}$

to pierwiastki dodatnie wzgl. $\Delta^\vee$

Jeśli teraz $\alpha \in R_+ \setminus \Delta$, to $\alpha \in \bigoplus_{i=1}^{r} \langle \alpha_i \rangle_{\mathbb{N}}$ i przy czym przynajmniej dwa współczynniki w jego rozkładzie w bazie $\neq 0$. Wówczas $\alpha^\vee \in \bigoplus_{i=1}^{r} \langle \alpha_i^\vee \rangle_{\mathbb{R}\geq 0}$ i przynajmniej dwa współczynniki w jego rozkładzie są $\neq 0$. Ale (199)

$\forall i \in \overline{1,r} : \alpha_i^\vee \in R_+^\vee \wedge \alpha_i^\vee \neq \alpha^\vee$ (gdyż $\alpha^\vee$ nie jest jednym z $\alpha_i^\vee$, a dał się rozpisać na nich (+)), bo

byłoby $\underbrace{(\alpha^\vee)^\vee}_{\equiv \alpha} = (\alpha_i^\vee)^\vee \equiv \alpha_i$ (str. 181). Możemy

zatem przywołać tezę Lematu, i

by stwierdzić, że $\alpha^\vee \notin \Delta^\vee$ (nie jest z bazy $\Delta^\vee$). W takim

razie $\Delta^\vee \subset \{\alpha_i^\vee\}_{i\in\overline{1,r}}$, a ponieważ $\Delta^\vee$

jest bazą E, przeto $|\Delta^\vee| = |\Delta| = r$,

czyli $\Delta^\vee = \{\alpha_i^\vee\}_{i\in\overline{1,r}}$. $\square$