Wykład X

2023/24

Przyjrzyjmy się teraz geometrii $Q(g; T_x)$ (w duchu Kleina). W tym celu wprowadźmy ...

Def. 21. Przyjmijmy dotychczasowy język. 139

Z dowolnym pierwiastkiem $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ stowarzyszony endomorfizm

$$w_\alpha : \mathfrak{t} \circlearrowleft : H \longmapsto H - 2 \cdot \frac{(\alpha|H)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha .$$

GRUPA WEYLA $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to grupa

swobodnie generowana przez w_α,

$$W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) := \langle w_\alpha \mid \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \rangle .$$

Zauważmy, że element $H \in \mathfrak{t} \otimes i$,

jedności – w świetle stw. 23 (str. 118)

i rzeczywistości $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{k}$ (str. 79) –

relacja $$w_\alpha(H) = \underset{\uparrow \atop \mathfrak{t}\otimes i}{H} - \underset{\in \mathbb{R}}{2\frac{\overbrace{(\alpha|H)}^{\in\mathbb{R}}}{(\alpha|\alpha)}} \triangleright \underset{\uparrow \atop \mathfrak{t}\otimes i}{\alpha} \in \mathfrak{t}\otimes i.$$

nad $\mathbb{R}$!!!

Jako endomorfizm $\mathfrak{t}\otimes i$ odwzorowanie to jest odbicie w hiperpłaszczyźnie ortogonalnej do α, tj. $w_\alpha(H) = \begin{cases} H & \text{dla } H \perp \alpha \\ -H & \text{dla } H \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \end{cases}$

Odbicie to określamy mianem (141)

ODBICIA WEYLA. Rzecz jasna odbicie

jest izometrią $(\cdot|\cdot)$, to jest przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa, nie $\mathbb{C}$-lin.!

$$W \subset O(\mathfrak{t}\otimes i, (\cdot|\cdot)|_{\mathfrak{t}\otimes i \times \mathfrak{t}\otimes i})$$

Bez trudu dowodzimy nad $\mathbb{R}$!!!

Tw. 7 $\forall w \in W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : w(Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})) \subset Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$

D: Zdefiniujmy automorfizm $\mathfrak{g}$ wzorem (dla dowolnego $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$):

macierzowy!

$$S_\alpha := \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha})$$

(z którego odczytujemy $S_\alpha^{-1} = \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha})$).

Dla dowolnego $H \in \mathfrak{h}$ o własności $H \perp \alpha$ zachodzi $[X_\alpha, H] = 0 = [Y_\alpha, H]$, a zatem także

$$\underbrace{[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_H]}_{=\mathrm{ad}_{[X_\alpha,H]}} = \underbrace{0}_{=\mathrm{ad}_0} = \underbrace{[\mathrm{ad}_{Y_\alpha}, \mathrm{ad}_H]}_{=\mathrm{ad}_{[Y_\alpha,H]}},$$

Przeto – w tym przypadku –

$$S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1} = \mathrm{ad}_H .$$

W bezpośrednim rachunku (ćwiczenie!) sprawdzamy dalej

$$S_\alpha \circ \mathrm{ad}_{H_\alpha} \circ S_\alpha^{-1} = -\mathrm{ad}_{H_\alpha} ,$$ zatem w sumie – wobec liniowości ad. i rozkładu $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$

$$\forall H \in \mathfrak{h} : S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1} = \mathrm{ad}_{W_\alpha(H)} .$$

Niechaj teraz $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$ i $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

144

$$[H, S_\alpha^{-1}(X)]_{\mathfrak{g}} \equiv ad_H \circ S_\alpha^{-1}(X) = S_\alpha^{-1} \circ (S_\alpha \circ ad_H \circ S_\alpha^{-1})(X)$$

$$= S_\alpha^{-1} \circ ad_{w_\alpha(H)}(X) \equiv S_\alpha^{-1}([\underset{\mathfrak{h}}{w_\alpha(H)}, \underset{\mathfrak{g}_\beta}{X}]_{\mathfrak{g}})$$

$$= (\beta | w_\alpha(H)) \triangleright S_\alpha^{-1}(X) \equiv (w_\alpha(w_\alpha^{-1}(\beta)) | w_\alpha(H)) \triangleright S_\alpha^{-1}(X)$$

Ale w_α jest $\mathbb{C}$-liniowe, jotem jest izometrią na całym $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, przeto

$[H, S_\alpha^{-1}(X)] = (w_\alpha^{-1}(\beta) | H) \triangleright S_\alpha^{-1}(X)$, skąd wniosek, je $w_\alpha^{-1}(\beta) = w_\alpha(\beta) \in Q(\mathfrak{g};\mathbb{T})$ jest pierwiastkiem 145

w_α jest odbiciem $\Rightarrow w_\alpha^2 = id_{\mathfrak{t}}$

o wektorze pierwiastkowym $S_\alpha^{-1}(X)\ (\neq 0)$.

Skoro zaś generatory zachowują $Q(\mathfrak{g};\mathbb{T})$,

to $W(\mathfrak{g};\mathbb{T})$ – takoż. $\square$

W istocie – wobec odwracalności w_α –

$$W(\mathfrak{g};\mathbb{T}) \subset G_{Q(\mathfrak{g};\mathbb{T})},$$ co wyprowadza

Stw. 25. $|W(\mathfrak{g};\mathbb{T})| < \infty$ (grupa skończona)

D: Wynika to wprost z $|Q(\mathfrak{g};\mathbb{T})| < \infty$ ($\Leftarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} < \infty$) $\square$

Zanim poddamy dotychczasowe rozważania przydatnej abstrakcji, wzbogacimy język

Stw. 26.

$$\forall \alpha, \beta \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) : 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \equiv (\beta|H_\alpha) \in \mathbb{Z}.$$

Liczby $A_{\alpha,\beta} := 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$ nazywamy LICZBAMI CARTANA.

147

D: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_\mathfrak{g}\}$ (wektor pierwiastkowy), a wówczas
$$[H_\alpha, X]_\mathfrak{g} = (\beta|H_\alpha) \triangleright X \underset{\equiv A_{\alpha,\beta} \triangleright X}{}\,,$$
zatem $A_{\alpha,\beta}$ jest wartością własną H_α w reprezentacji (dołączonej) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)}$ na $\mathfrak{g}$.
Teza jest teraz konsekwencją Tw. [ówiężenia] (i) (str. 131). □

Powyższy wynik ma prostą geometryczną interpretację: (148)

Rzut prostopadły $\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \cdot \alpha$ pierwiastka β na $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$ jest $\frac{\mathbb{Z}}{2}$ - krotnością α.

$$\Updownarrow$$

$$W_\alpha(\beta) - \beta \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{Z}} .$$

$$\underline{=} - 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \cdot \alpha = -A_{\alpha\beta} \cdot \alpha$$

Podsumujemy obecnie dotychczasowe ustalenia dotyczące $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ ... (149)

<u>Tw. 8.</u> $R \equiv Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to skończony podzbiór niezwyrodniałej $\mathbb{R}$-liniowej przestrzeni kwadratowej $\left(E \equiv \mathfrak{t}\otimes i \,, (\cdot|\cdot)\restriction_{E\times E}\right)$ o własnościach

(1) $E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$

(2) $\forall_{\alpha\in R}\, \forall_{\lambda\in\mathbb{R}} : \left(\lambda\cdot\alpha\in R \Longrightarrow \lambda\in\{-1,1\}\right)$

(3) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : W_\alpha(\beta)\in R$

(4) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : A_{\alpha,\beta}\in\mathbb{Z}$

Abstrakcja:

Def. 22. SYSTEM PIERWIASTKOWY

to para $((E, \langle\cdot|\cdot\rangle), R)$ złożona z:

- $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle) \in \mathrm{Ob}\,\square\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{<\infty}$, niezerowymiarowa
- $R \subset E$ – podzbiór PIERWIASTKÓW

o własnościach: (SP1) $E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$

(SP2) $\forall_{\alpha \in R} \forall_{\lambda \in \mathbb{R}} : (\lambda \triangleright \alpha \in R \Rightarrow \lambda \in \{-1, 1\})$

(SP3) $\forall_{\alpha, \beta \in R} : W_\alpha(\beta) := \beta - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha \in R$ ODBICIE WEYLA

(SP4) $\forall_{\alpha, \beta \in R} : A_{\alpha\beta} := 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Przy tym $\dim_{\mathbb{R}} E$ nazywamy RZĘDEM SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO

Podgrupa $W((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R) := \langle w_\alpha \mid \alpha\in R\rangle \subset O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ (151)

Skończona

określony mianem **GRUPY WEYLA** $\curvearrowright$ Gr

SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO.

MORFIZM SYSTEMÓW PIERWIASTKOWYCH $((E_A,\langle\cdot|\cdot\rangle_A),R_A)$, $A\in\{1,2\}$

to $\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1,E_2)$ o własnościach

$$\text{(MSP1)}\quad \chi(R_1)\subset R_2$$

$$\text{(MSP2)}\quad \forall_{\alpha\in R_1}:\ \chi\circ\hat{w}^1_\alpha = \hat{w}^2_{\chi(\alpha)}\circ\chi$$

dla rozszerzenia $\hat{w}^A_\alpha$ odbicia Weyla do E_A.

System pierwiastkowy nazywamy **PRZYWIEDLNYM**, ilekroć

(152)

ortog!

$$\exists\, E_1, E_2 \subset E : \left(E \simeq E_1 \oplus E_2 \ \wedge\ \forall \alpha \in R : \alpha \in E_1 \ \veebar\ \alpha \in E_2 \right)$$

$E_1 \neq \emptyset$, $E_2 \neq \emptyset$

W przeciwnym razie mówimy o **NIEPRZYWIEDLNYM SYSTEMIE PIERWIASTKOWYM.**

X

W dalszej części będziemy analizować anatomię systemów pierwiastkowych. Przedtem jednak zbadamy dokładniej relację między algebrami półprostymi i prostymi.

W ramach przypomnień terminologicznych

Str. 27. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą a.L.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \text{ - prosta } \not\Longrightarrow \mathfrak{g} \text{ - prosta}.$$

D: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ - prosta $\overset{ex}{\underset{def}{\Longrightarrow}} \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \geqslant 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \geqslant 2$. ✓

Ponadto jeśli $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ jest nietrywialnym ideałem $\Longrightarrow \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — 〃 —

— 〃 — ↯ □

Mamy wnioski

Tw. 9. Niechaj K będzie zwartą grupą Liego o algebrze Liego $\mathrm{Lie}K \equiv \mathfrak{k}$. Jeśli $\mathfrak{k}$ jest prosta, to $\underset{\equiv \mathfrak{g}}{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}$ jest prosta (jako $\mathbb{C}$-algebra).

D: W pierwszej kolejności musimy sformułować pojęcie struktury $\mathbb{C}$-liniowej.

Lemat 1. Niechaj V będzie grupą przemienną. Wówczas poniższe zdania są równoważne:

(C1) Na V jest określone działanie $\mathbb{C}$, które czyni z niej przestrzeń $\mathbb{C}$-liniową.

(C2) — ,, — — ,, — $\mathbb{R}$ — — ,, — $\mathbb{R}$-liniową,

a nadto $\exists\, I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V : I \circ I = -\mathrm{id}_V$.
Endomorfizm taki określamy mianem **STRUKTURY ZESPOLONEJ** na V.

Dl 1.: $(C1) \Rightarrow (C2)$ Działanie $\mathbb{C}$ indukuje działanie $\mathbb{R}$ poprzez $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r,0)$.
Mamy też $I = (0,1) \triangleright \cdot$.

$(C2) \Rightarrow (C1)$ Działanie $\mathbb{R}$ wraz z I indukuje

$$\mathbb{C} \times V \to V : ((x,y), v) \mapsto x \triangleright v + I(y \triangleright v).$$

$\square$

Powyższy wynik uogólnia się prosto (456) do kategorii algebr Liego:

Lemat 2. Algebra Liego nad $\mathbb{R}$ $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ jest algebrą Liego nad $\mathbb{C}$ $\Longleftrightarrow$

$$\underset{\text{STRUKTURA ZESPOLONA}}{\exists\, I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})} : \left(I \circ I = -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \;\wedge\; [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (I \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) = I \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \mathfrak{h} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{C}},\; \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) : \left(\exists\, \chi^{-1} \;\wedge\; [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}} \right).$$

Dk2: Proste ćwiczenie.

<u>Lemat</u>. Niech K będzie zwartą grupą Liego o <u>nieprzemiennej</u> algebrze Liego $\mathfrak{k}$. Wówczas na $\mathfrak{k}$ <u>nie istnieje</u> struktura zespolona.

<u>Dd</u>: Załóżmy, przeciwnie, że $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$ jest strukturą zespoloną. Wówczas ad_X, $X \in \mathfrak{k}$ jest $\mathbb{C}$-liniowe. Istotnie,

$$\forall Y \in \mathfrak{k}: \quad ad_X \circ I(Y) \equiv [X, I(Y)]$$

$$= -[I(Y), X] = -I([Y,X]) = I([X,Y]) \equiv I \circ ad_X(Y).$$

Ale w świetle konstruktywnego (158)
dowodu Stw. 18. na $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ istnieje niejednoznaczna
struktura hermitowska, względem której
$ad^{\mathbb{C}}_X$ jest skośnie hermitowski, zatem
diagonalizowalny z $Sp\, ad^{\mathbb{C}}_X \subset i\mathbb{R}$, o ile
więc wybierzemy $X \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$, dostaniemy
$Sp\, ad^{\mathbb{C}}_X \neq \{0\}$, czyli $ad^{\mathbb{C}}_X$ <u>NIE</u>
jest nilpotentny, co oznacza, że

ad_X nie jest nilpotentny.

Przechodząc do $(\mathbb{K}, I)$, stwierdzamy, że $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{K})$ jako operator NIE-nilpotentny ma niezerową wartość własną $\lambda = (a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Istnieje zatem $V \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$:

$$[X, V] \equiv \mathrm{ad}_X(V) = \lambda \triangleright V \equiv a \triangleright V + b \triangleright I(V)$$

Rozważmy $\tilde{X} := \bar{\lambda} \triangleright X \equiv a \triangleright X - b \triangleright I(X)$.

(160)

Zachodzi $[\tilde{X}, V] \equiv [\bar{\lambda} \triangleright X, V] = \bar{\lambda} \triangleright [X, V]$

$$= \bar{\lambda} \triangleright (\lambda \triangleright V) = |\lambda|^2 \triangleright V .$$

Ale $\mathrm{ad}_{\tilde{X}}$ jest skośnie symetryczny względem struktury hermitowskiej (oczywiście) na $\mathbb{K}$, zatem

$$|\lambda|^2 (V|V) \equiv (\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V)|V) = -(V|\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V))$$

$$= -|\lambda|^2 (V|V) \implies (V = 0 \vee \lambda = 0) \ ↯ \ \square$$

Możemy już teraz przystąpić do dowodu

Twierdzenie... $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ jest – wprost z definicji – reduktywna, ale tej zauważmy, że $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, bo w przeciwnym razie $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) - \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^* \neq 0$, bo inaczej $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{k} \otimes i$ – <u>nie</u> jest $\mathbb{C}$-podprzestrzenią

$$\cap\ \mathfrak{g} - \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{k} \otimes 1$$ byłoby centrum $\mathfrak{k}(\otimes 1)$ ↯ (wszak $\mathfrak{k}$ prosta).

Po drugie: załóżmy, przeciwnie, że $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ <u>NIE</u> jest prosta, tj. – skoro jest półprosta – istnieją <u>przynajmniej</u> dwie podalgebry proste $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}$, $j \in \overline{1,N}$, $N \geq 2$

o własności $\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{j=1}^{N} \mathfrak{g}_j$.

W świetle Tw. 3 rozkład powyższy jest jedyny z dokładnością do permutacji składników. Ale też $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą podalgebr $\overline{\mathfrak{g}}_j$, gdzie $\overline{X_1\otimes 1 + X_2\otimes i} = X_1\otimes 1 - X_2\otimes i$. Istotnie, „sprzężenie" (skośnie $\mathbb{C}$-liniowe) $\overline{\cdot}: \mathfrak{g} \circlearrowleft$ zachowuje nawias Liego,

$$\overline{[X,Y]}_{\mathfrak{g}} = \overline{[X_1\otimes 1, Y]_{\mathfrak{g}} + i\triangleright[X_2\otimes 1, Y]_{\mathfrak{g}}}$$

$$= [X_1\otimes 1, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} - i\triangleright[X_2\otimes 1, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} = [\overline{X}, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} ,$$

(163)

Zatem $\overline{g_j}$ spełniają te same relacje co g_j. Wobec powyższego

$$\forall j\in\overline{1,N}\ \exists k\in\overline{1,N}:\ \overline{g_j}=g_k.$$

Przypuśćmy, że $\exists j\in\overline{1,N}:\ \overline{g_j}=g_j$.

Wówczas $\forall X\in g_j:\ X+\overline{X}\in g_j\cap k$ i $g_j\cap k$

$$[Y\otimes 1,\ X+\overline{X}]_g=[Y\otimes 1,X]_g+[Y\otimes 1,\overline{X}]_g=\underbrace{[Y\otimes 1,X]_g}_{\in g_j}+\overline{[Y\otimes 1,X]}_g$$

dom.

jest $\neq 0$ ideałem w k. Ale $g_j\cap k\neq k$, bo w.p.p. $g_j=(g_j\cap k)^{\mathbb{C}}=k^{\mathbb{C}}=g$.

$=0$ dla każdego $X=x\otimes i$ $\forall x\in g_j$, a to nie jest $\mathbb{C}$-podprz.!

W takim razie $\mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{k}$ jest nietrywialnym ideałem w $\mathfrak{k}$. ↯
(wszak $\mathfrak{k}$ – prosta)

Wniosek: $\neg \exists\, j \in \overline{1,N} : \overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_j$.

Niechaj $j,k \in \overline{1,N}$, $j \neq k$: $\overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_k$, a wtedy
$(\mathfrak{g}_j \oplus \mathfrak{g}_k) \cap \mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$ jest niezerowym ideałem, (rozumowanie j/w, tylko teraz $\mathfrak{g}_j \tilde{\oplus} \mathfrak{g}_k$)
który wobec prostoty $\mathfrak{k}$ jest tożsamy z $\mathfrak{k}$.
Stąd jedyny wniosek: $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_j \oplus \overline{\mathfrak{g}_j}$.

Mamy zatem <u>dwa</u> składniki proste, wzajem „sprzężone", $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_2 = \overline{\mathfrak{g}_1}$.

Zdefiniujmy następnie odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe:

$$\chi : \mathfrak{g}_1 \to \underset{\cong\, \mathfrak{k}\otimes 1}{\mathfrak{k}} : X \mapsto X + \overline{X} .$$

Wobec $\overline{X} \in \overline{\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{g}_2$ jest $[Y, \overline{X}]_{\mathfrak{g}} = 0 \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}_1$, przeto

$$[\chi(X), \chi(Y)]_{\mathfrak{g}} = [X+\overline{X}, Y+\overline{Y}]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{g}} + [\overline{X},\overline{Y}]_{\mathfrak{g}}$$
$$= [X,Y]_{\mathfrak{g}} + \overline{[X,Y]_{\mathfrak{g}}} = \chi([X,Y]_{\mathfrak{g}}).$$

Przy tym X jest mono, gdyż

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_1}}{X} + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_2}}{\overline{X}} = 0 \iff X = 0 \quad \text{wobec } \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}.$$

Rachunek wymiarów (rzeczywistych)

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}$$

pokazuje, że X jest izo, zatem w świetle Lematu 2. $\mathfrak{k}$ ma strukturę zespoloną, co stoi w sprzeczności z Lematem 3. ∎