METODY ALGEBRY I GEOMETRII WYŻSZEJ W FIZYCE II
W CZASACH ZARAZY
9., 10. I 11. WYKŁAD ZDALNY
PRAWO O STOWARZYSZENIACH

Spis treści

Konstrukcja rozmaitości ilorazowej przedstawiona drobiazgowo na poprzednim wykładzie stanowi jeden z kluczowych elementów geometryzacji rozmaitych bytów algebraicznych, w szczególności zaś: algebr Clifforda, modułów spinorowych i działania tych pierwszych na tych drugich. Jej zastosowanie w interesującym nas kontekście wymaga wprowadzenia procedury zwanej stowarzyszaniem rozmaitości wyposażonej w działanie grupy Liego z wiązką główną o grupie strukturalnej tożsamej z tą grupą. A że spektrum zastosowań fizykalnych rzeczonej procedury wykracza daleko poza kontekst cliffordowski (i obejmuje tak istotne zagadnienia jak cechowanie, czyli ulokalnianie symetrii globalnych w teoriach pola oraz modelowanie różnorodnych zjawisk w teoriach z symetrią wycechowaną, jak choćby efekt Higgsa, którym poświęcony jest wykład monograficzny Autora pt. „Zastosowania teorii wiązek włóknistych w fizyce"), przeto omówimy ją ze szczegółami.

1. Motywacja

Okazuje się, że wiązkę wektorową $\mathbb{V}$ można odtworzyć (z dokładnością do izomorfizmu) z odnośnej wiązki reperów $\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}$ przez pewną sprytną konstrukcję, którą przedstawiamy poniżej. Jak wynika wprost z definicji $\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}$, jest dobrze określone odwzorowanie (punktowej) ewaluacji

$$\widehat{\rm ev}\ :\ \mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n}\longrightarrow\mathbb{V}\ :\ \big((\beta_x,x),v\big)\longmapsto\beta_x(v)\,.$$

Odwzorowanie to jest stałe na orbitach działania

$$\begin{aligned}\widetilde{\rm ev}\quad&:\quad {\rm GL}(n;\mathbb{K})\times\big(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n}\big)\longrightarrow\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n}\\ &:\quad \big(\chi,\big((\beta_x,x),v\big)\big)\longmapsto\big((\beta_x\circ\chi^{-1},x),\chi(v)\big)\,,\end{aligned}$$

zapisanego w terminach naturalnego (definiującego) działania grupy ${\rm GL}(n;\mathbb{K})$ na $\mathbb{K}^{\times n}$,

$${\rm ev}\ :\ {\rm GL}(n;\mathbb{K})\times\mathbb{K}^{\times n}\longrightarrow\mathbb{K}^{\times n}\ :\ (\chi,v)\longmapsto\chi(v)\,.$$

To oznacza, że $\widehat{\rm ev}$ zstępuje na rozmaitość ilorazową $(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K})$ zdefiniowaną w odniesieniu do działania $\widetilde{\rm ev}$, której istnienie zapewnia Cor. 7-8.1 (na gruncie Tw. 7-8.3). Innymi słowy, $\widehat{\rm ev}$ zadaje odwzorowanie

$$\begin{aligned}[\widehat{\rm ev}]\quad&:\quad(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K})\longrightarrow\mathbb{V}\\ &:\quad\big[\big((\beta_x,x),v\big)\big]\longmapsto\widehat{\rm ev}\big((\beta_x,x),v\big)\equiv\beta_x(v)\end{aligned}\tag{2}$$

które domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{V} \\ \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n} \arrow[urr, "\widehat{\mathrm{ev}}"] \arrow[rr, "\pi_{(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}"'] & & (\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \arrow[u, "{[\widehat{\mathrm{ev}}]}"'] \end{tikzcd} .$$

Zapisany na nim rzut kanoniczny $\pi_{(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}$ na przestrzeń orbit jest – w świetle Twierdzenia 7-8.3 o rozmaitości ilorazowej – gładką submersją, przeto wprost na mocy Twierdzenia o kwazi-uniwersalnej własności submersji (z Niezbędnika różniczkowo-geometrycznego – Stw. 29) gładkość odwzorowania indukowanego $[\widehat{\mathrm{ev}}]$ jest implikowana przez gładkość odwzorowania $\widehat{\mathrm{ev}}$. Przy tym bez trudu przekonujemy się, że w ograniczeniu do dowolnego włókna $(\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, $x\in B$ odwzorowanie to jest bijekcją. Istotnie, wybierzmy dowolną bazę $\beta_x^*\in\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)$ i rozważmy zbiór $S:=\{\ ((\beta_x^*,x),v)\ \ |\ \ v\in\mathbb{K}^{\times n}\ \}$. Orbity dwóch dowolnych jego elementów, $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright((\beta_x^*,x),v_1)$ i $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright((\beta_x^*,x),v_2)$, albo pokrywają się ze sobą, albo też są rozłączne (jako klasy abstrakcji relacji równoważności). Pierwsza z tych ewentualności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} & \big((\beta_x^*,x),v_2\big)\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright\big((\beta_x^*,x),v_1\big) \\ \Longleftrightarrow\quad & \exists_{\chi\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}\ :\ \big((\beta_x^*,x),v_2\big)=\big((\beta_x^*\circ\chi^{-1},x),\chi(v_1)\big) \\ \Longleftrightarrow\quad & (\ \chi=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}\quad\wedge\quad v_2=v_1\ ), \end{aligned}$$

zatem nietożsame elementy zbioru S należą do rozłącznych orbit. Moc włókna $(\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ jest więc nie mniejsza niż moc włókna $\mathbb{V}_x$. Pozostaje sprawdzić injektywność $[\widehat{\mathrm{ev}}]$. W tym celu rozważmy konsekwencje równości

$$\beta_x^1(v_1)\equiv[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\big]\big)=[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_x^2,x),v_2\big)\big]\big)\equiv\beta_x^2(v_2)\,.$$

Ta jest równoważna równości

$$v_2=\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1(v_1)\,,$$

która implikuje relację

$$v_2\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright v_1\,,$$

a dalej także

$$\big((\beta_x^2,x),v_2\big)=\big((\beta_x^1\circ\big(\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1\big)^{-1},x),\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1(v_1)\big)\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\,.$$

Na tej podstawie wyciągamy wniosek o równości argumentów,

$$\big[\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\big]=\big[\big((\beta_x^2,x),v_2\big)\big]\,,$$

która przesądza o injektywności $[\widehat{\mathrm{ev}}]$. Mamy zatem do czynienia z gładką bijekcją. Skonstruujemy jej gładką odwrotność. W tym celu użyjemy lokalnych trywializacji $\tau_i\ :\ \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, $i\in I$ wiązki reperów stowarzyszonych z pokryciem $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, które w odwołaniu do tezy Stw. 5-6.3 pozwalają nam skonstruować lokalnie gładkie cięcia

$$\sigma_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\ :\ x\longmapsto\tau_i^{-1}(x,e)\equiv\big(\beta_i(x),x\big)\in\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\{x\}\,,$$

przy czym pole baz β_i zależy (lokalnie) gładko od punktu w $\mathcal{O}_i\subset B$. Łatwo przekonujemy się, że odwzorowanie zadane lokalnie (nad $\mathcal{O}_i\ni x$) w postaci

$$\Sigma_i\restriction_{\mathbb{V}_x}\ :\ \mathbb{V}_x\longrightarrow(\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\ :\ \nu\longmapsto\big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]$$

jest (lokalną) odwrotnością $[\widehat{\mathrm{ev}}]$, oto bowiem

$$\begin{aligned} & \Sigma_i\circ[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_x,x),v\big)\big]\big)=\Sigma_i\circ\beta_x(v)=\big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x(v)\big)\big] \\ \equiv\quad & \big[\big((\beta_x\circ\big(\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x\big)^{-1},x),\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x(v)\big)\big]=\big[\big((\beta_x,x),v\big)\big] \end{aligned}$$

a nadto – dla $\nu \in \mathbb{V}_x$ –

$$[\widehat{\mathrm{ev}}] \circ \Sigma_i(\nu) = [\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]\big) = \beta_i(x)\big(\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big) = \nu\,.$$

I wreszcie na koniec upewniamy się, że odwzorowania lokalne Σ_i stanowią ograniczenia (do odnośnych elementów $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ pokrycia przestrzeni totalnej $\mathbb{V}$) odwzorowania globalnie gładkiego. W tym celu musimy najpierw ustalić regułę transformacyjną dla lokalnych wyborów bazy β_i. Niechaj $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ będą odwzorowaniami przejścia dla wybranych wcześniej trywializacji lokalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$, tj. – dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ oraz $\chi \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ –

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, \chi) = \big(x, g_{ij}(x) \circ \chi\big)\,.$$

Obliczamy wówczas

$$\begin{aligned}\big(\beta_j(x), x\big) &\equiv \tau_j^{-1}(x, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}) = \tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x)\big) = \tau_i^{-1}(x, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}) \triangleleft g_{ij}(x) \\ &= \big(\beta_i(x), x\big) \triangleleft g_{ij}(x) \equiv \big(\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x\big)\,,\end{aligned}$$

czyli

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x)\,,$$

a stąd już łatwo wyprowadzamy – dla dowolnego punktu $\nu \in \mathbb{V}_x,\ x \in \mathcal{O}_{ij}$ – pożądaną tożsamość

$$\begin{aligned}\Sigma_j(\nu) &= \big[\big((\beta_j(x), x), \beta_j(x)^{-1}(\nu)\big)\big] = \big[\big((\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big] \\ &= \big[\big((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big] \equiv \Sigma_i(\nu)\,.\end{aligned}$$

Dotychczasowe nasze rozważania pozwalają nam wypisać wprost trywializacje lokalne

$$\begin{aligned}[\tau_i] &: \big(\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{\times n}\big)/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \\ &: \big[\big((\beta_x, x), v\big)\big] \longmapsto \big(x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v)\big)\end{aligned}$$

o odwrotnościach

$$\begin{aligned}[\tau_i]^{-1} &: \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \big(\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{\times n}\big)/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \\ &: (x, v) \longmapsto \big[\big((\beta_i(x), x), v\big)\big]\end{aligned}$$

i tym samym zidentyfikować strukturę wiązki włóknistej na rozmaitości ilorazowej $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, przy czym jest jasne, że jest to wiązka wektorowa nad B o ciele bazowym $\mathbb{K}$. Odnotujmy na marginesie, że odwzorowania przejścia dla wypisanych tu trywializacji przyjmują – w dowolnym punkcie $(x, v) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{K}^{\times n}$ – postać

$$\begin{aligned}[\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, v) &= [\tau_i]\big(\big[\big((\beta_j(x), x), v\big)\big]\big) = \big(x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_j(x)(v)\big) \\ &= \big(x, g_{ij}(x)(v)\big)\,,\end{aligned}$$

identyczną jak w przypadku $\mathbb{V}$. Wobec swojej oczywistej $\mathbb{K}$-liniowości odwzorowanie $[\widehat{\mathrm{ev}}]$ jawi się nam jako izomorfizm wiązek wektorowych

$$[\widehat{\mathrm{ev}}] : (\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}\,.$$

Na gruncie powyższych i wcześniejszych rozważań możemy wyartykułować proste, acz strukturalne

Stwierdzenie 1. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi (a zatem także trywializacjami lokalnymi) wiązki reperów wiązki wektorowej i trywializacjami lokalnymi wiązki wektorowej.

Dowód: Dowolne cięcie lokalne $\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V},\ \mathcal{O} \in \mathscr{T}(B)$ pozwala zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n} : v \longmapsto \big(\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big)\,,$$

jawnie $\mathbb{K}$-liniowe i gładkie, o oczywistej odwrotności

$$\tau_\sigma^{-1} \ :\ \mathcal{O}\times\mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \ :\ (x,V)\longmapsto \sigma(x)(V)\,,$$

także gładkiej (i $\mathbb{K}$-liniowej). Własności te pozwalają zidentyfikować τ_σ jako trywializację lokalną wiązki $\mathbb{V}$ stowarzyszoną z cięciem lokalnym σ wiązki reperów.

Odwracając powyższe rozumowanie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau\ :\ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}\times\mathbb{K}^{\times n}$ przyporządkowujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau \ :\ \mathcal{O}\longrightarrow \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \ :\ x\longmapsto \tau^{-1}(x,\cdot)\,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że skonstruowane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, stwierdzamy równość

$$\forall_{(x,V)\in\mathcal{O}\times\mathbb{K}^{\times n}} \ :\ \sigma_{\tau_\sigma}(x)(V) = \tau_\sigma^{-1}(x,V) = \sigma(x)(V)\,,$$

a z niej wyprowadzamy tożsamość

$$\sigma_{\tau_\sigma} = \sigma\,.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\forall_{v\in\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O})} \ :\ \tau_{\sigma_\tau}(v) &= \big(\pi_{\mathbb{V}}(v),(\sigma_\tau\circ\pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big) = \big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\cdot\big)^{-1}(v)\big)\\ &\equiv \tau\circ\tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\cdot\big)^{-1}(v)\big) = \tau(v)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau} = \tau\,.$$

□

oraz

Stwierdzenie 2. Dowolna rodzina trywializacji lokalnych wiązki reperów wiązki wektorowej indukuje rodzinę trywializacji lokalnych wiązki wektorowej (stowarzyszonych z tą samą rodziną podzbiorów otwartych ich wspólnej bazy) o tych samych odwzorowaniach przejścia.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $(\mathbb{V},B,\mathbb{K}^{\times n},\pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem $\mathbb{K}$), $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V},\,B,\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}),\,\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}})$ zaś – wiązką jej reperów i niech $\tau_i\ :\ \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, $\mathcal{O}_i\in\mathscr{T}(B)$, $i\in\{1,2\}$ będą dwiema trywializacjami lokalnymi drugiej z nich, o niepustym przecięciu dziedzin, $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2$, nad którym są określone odwzorowania przejścia $g_{12}\ :\ \mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2\longrightarrow\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$. Z każdą z trywializacji stowarzyszamy cięcie lokalne wedle formuły podanej w dowodzie Stw. 5-6.3,

$$\sigma_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\subset\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\ :\ y\longmapsto\tau_i^{-1}(y,\mathbf{1}_n)\,,$$

a następnie używamy ich do skonstruowania odnośnych gładkich trywializacji lokalnych wiązki $\mathbb{V}$ zgodnie z przepisem sformułowanym w dowodzie Stw. 1,

$$\tau_{\sigma_i}\ :\ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathbb{K}^{\times n}\ :\ v\longmapsto\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),(\sigma_i\circ\pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big)\,,\quad i\in\{1,2\}\,.$$

O tym, że są to trywializacje o postulowanych odwzorowaniach przejścia, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnych $(y,V)\in\mathcal{O}_{12}\times\mathbb{K}^{\times n}$,

$$\begin{aligned}&\tau_{\sigma_1}\circ\tau_{\sigma_2}^{-1}(y,V) = \tau_{\sigma_1}\big(\sigma_2(y)(V)\big)\\ =\ &\big(\pi_{\mathbb{V}}\big(\sigma_2(y)(V)\big),(\sigma_1\circ\pi_{\mathbb{V}})\big(\sigma_2(y)(V)\big)^{-1}\big(\sigma_2(y)(V)\big)\big)\\ =\ &\big(y,\sigma_1(y)^{-1}\circ\sigma_2(y)(V)\big)\,,\end{aligned}$$

który po uwzględnieniu ciągu równości

$$\begin{aligned}\sigma_2(y) &\equiv \tau_2^{-1}(y,\mathbf{1}_n) = \tau_1^{-1}\big(y,g_{12}(y)\big) = \tau_1^{-1}(y,\mathbf{1}_n)\triangleleft g_{12}(y)\equiv\tau_1^{-1}(y,\mathbf{1}_n)\circ g_{12}(y)\\ &\equiv \sigma_1(y)\circ g_{12}(y)\end{aligned}$$

odtwarza pożądany wynik

$$\tau_{\sigma_1} \circ \tau_{\sigma_2}^{-1}(y, V) = \big(y, \sigma_1(y)^{-1} \circ \sigma_1(y) \circ g_{12}(y)(V)\big) \equiv \big(y, g_{12}(y)(V)\big)\,.$$

□

2. Abstrakcja

Z przedstawionego w poprzednim rozdziale studium (kanonicznego) przypadku możemy wyabstrahować strukturalne własności konstrukcji będącej jego przedmiotem, kluczowe dla konstrukcji tej powodzenia. Mamy zatem do czynienia z konstrukcją wiązki włóknistej „stowarzyszonej" z daną wiązką główną poprzez działanie grupy strukturalnej tej ostatniej na ustalonej rozmaitości różniczkowalnej, przy czym owa rozmaitość jest promowana do rangi włókna typowego konstruowanej wiązki, a dane lokalne (trywializacje lokalne i odpowiadające im odwzorowania przejścia) wyjściowej wiązki głównej indukują odnośne dane lokalne tejże. Stosownej formalizacji tych naszych spostrzeżeń dostarcza

Definicja 1. Niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną, M zaś – rozmaitością z gładkim działaniem (lewostronnym) $\lambda\ :\ \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ grupy Liego G. **Wiązka stowarzyszona z P_{G} poprzez λ** to wiązka włóknista

$$\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M, B, M, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}\big)$$

o składowych:

- przestrzeń totalna $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \equiv (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}$ będąca rozmaitością ilorazową określoną – według schematu opisanego w Cor. 5.2 (na gruncie Tw. 4.2) i w użytym tam zapisie – przez działanie z Równ. (5.2);
- rzut na bazę

$$\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \longrightarrow B\ :\ [(p, m)] \longmapsto \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\,.$$

Przy tym trywializacje lokalne $\tau_i\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G},\ i \in I$ wiązki głównej P_{G} stowarzyszone z pokryciem $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B indukują trywializacje lokalne

$$\widetilde{\tau}_i\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times M\ :\ [(p, m)] \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda_{\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p)}(m)\big)\,,$$

o odwzorowaniach przejścia

$$\widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_j^{-1}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \times M \circlearrowleft\ :\ (x, m) \longmapsto \big(x, \lambda_{g_{ij}(x)}(m)\big)\,.$$

Ustaliwszy (dowolnie) punkt $x \in B$, wybierzmy (także dowolnie) $p_* \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$. Dyfeomorfizmy

$$[p_*]_\lambda\ :\ M \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x\ :\ m \longmapsto [(p_*, m)]\,,$$

o odwrotnościach

$$[p_*]_\lambda^{-1}\ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \xrightarrow{\cong} M\ :\ [(p, m)] \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*, p)}(m)$$

i oczywistej własności

$$\forall_{g \in \mathrm{G}}\ :\ [p_* \triangleleft g]_\lambda = [p_*]_\lambda \circ \lambda_g\,, \tag{3}$$

noszą miano **izomorfizmów modelujących włókna**. Indukują one **izomorfizmy transportu włókna**

$$\begin{aligned} [p_2, p_1]_\lambda \equiv [p_2]_\lambda \circ [p_1]_\lambda^{-1} \quad &: \quad (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)} \\ &: \quad [(p, m)] \longmapsto \big[\big(p_2, \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p)}(m)\big)\big]\,, \end{aligned}$$

określone dla dowolnej pary $(p_1, p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$.

Dla dowolnej pary $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_\alpha} M_\alpha, B, M_\alpha, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_\alpha} M_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ wiązek stowarzyszonych z tą samą wiązką główną $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ określamy także **niezmiennik wiązek stowarzyszonych** jako morfizm wiązek włóknistych

$$(\Phi, \mathrm{id}_B) \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny, wypisany dla dowolnej pary punktów $p_1, p_2 \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$,

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \arrow[r, "{[p_2,p_1]_{\lambda_1}}"] \arrow[d, "\Phi\restriction_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)}}"'] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)} \arrow[d, "\Phi\restriction_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)}}"] \\
\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \arrow[r, "{[p_2,p_1]_{\lambda_2}}"'] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)}
\end{tikzcd} .$$

Uwaga 1. Istnienie struktury rozmaitości na przestrzeni orbit $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ działania $\widetilde{\lambda}$ jest bezpośrednią konsekwencją Tw. 7-8.3, na którego przywołanie w powyższym kontekście pozwala Cor. 7-8.1. Przy tym gładkość rzutu na bazę $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}$ wynika tu wprost ze Stw. Niezb-29, kiedy zauważyć, że rzut ten domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
 & B \\
\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M \arrow[ur, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \arrow[u, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}"']
\end{tikzcd} ,$$

w którym $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}}$ jest surjektywną submersją (na mocy tegoż Tw. 7-8.3), a $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_1$ jest jawnie gładkie. Jako że to ostatnie odwzorowanie także jest submersją, przeto własność tę ma $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}$, o czym przekonuje tożsamość uzyskana w obrazie powyższego diagramu względem funktora stycznego.

Przejdziemy do zbadania trywializacji lokalnych, zaczynając od sprawdzenia sensowności ich definicji. Musimy w tym celu pokazać, że wartość przyjmowana przez odwozrowanie $\widetilde{\tau}_i$ na klasie $[(p,m)]$ nie zależy od wyboru reprezentanta tej ostatniej. Obliczamy przeto

$$\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p \triangleleft g), \lambda\big(g^{-1}, m\big)\big)\big) = \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g, \lambda\big(g^{-1}, m\big)\big)\big)$$
$$= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g \cdot g^{-1}, m\big)\big) = \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p), m\big)\big) .$$

Ponadto ponieważ odwzorowania

$$\underline{\tau}_i \;:\; \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M \longrightarrow \mathcal{O}_i \times M \;:\; (p,m) \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda_{\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p)}(m)\big) , \quad i \in \{1,2\}$$

są jawnie gładkie, a przy tym pozostają z $\widetilde{\tau}_i$ w relacji opisywanej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_i \times M \\
\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M \arrow[ur, "\underline{\tau}_i"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}}"'] & \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[u, "\widetilde{\tau}_i"']
\end{tikzcd} ,$$

w którym rzut kanoniczny $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}}$ jest – wprost na mocy Tw. 7-8.3 i Cor. 7-8.1 – gładki, przeto w świetle Stw. Niezb-29 także odwzorowania $\widetilde{\tau}_i$ są gładkie. Gładkość (także lokalna) ich odwrotności

$$\widetilde{\tau}_i^{-1} \;:\; \mathcal{O}_i \times M \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \;:\; (x,m) \longmapsto \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), m\big)\big]$$

nie budzi wątpliwości. We wszystkich dotychczasowych rozważaniach zakładamy *implicite* sensowność definicji odwzorowań $\widetilde{\tau}_i$ i $\widetilde{\tau}_i^{-1}$, która wymaga odrębnej weryfikacji – ta usprawiedliwia *a posteriori* dokonaną przez nas identyfikację włókna typowego

$$\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}\big(\{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}([(p,m)])\}\big) \cong M\,,\qquad [(p,m)]\in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$$

rekonstruowanej tu wiązki włóknistej. Bez trudu dowodzimy pożądanych tożsamości: oto więc dla $(x,m)\in\mathcal{O}_i\times M$ zachodzi

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\tau}_i\circ\widetilde{\tau}_i^{-1}(x,m)=\widetilde{\tau}_i\Big(\big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),m\big)\big]\Big)\\
=\;&\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\tau_i^{-1}(x,e),\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i\circ\tau_i^{-1}(x,e),m\big)\big)=\big(x,\lambda(e,m)\big)=(x,m)\,,
\end{aligned}$$

a dla $[(p,m)]\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M,\ p=\tau_i^{-1}(x,g)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\tau}_i^{-1}\circ\widetilde{\tau}_i\big([(p,m)]\big)=\widetilde{\tau}_i^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p),m\big)\big)\\
=\;&\Big[\Big(\tau_i^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big),\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p),m\big)\Big)\Big]=\Big[\Big(\tau_i^{-1}(x,e),\lambda(g,m)\Big)\Big]\\
=\;&\Big[\Big(\tau_i^{-1}(x,e)\triangleleft g,m\Big)\Big]=\Big[\Big(\tau_i^{-1}(x,g),m\Big)\Big]\equiv[(p,m)]\,.
\end{aligned}$$

Wreszcie też na koniec obliczamy

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}_i\circ\widetilde{\tau}_j^{-1}(x,m)\;&\equiv\;\widetilde{\tau}_i\circ\widetilde{\tau}_j^{-1}\Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\tau_j^{-1}(x,e),\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_j(\tau_j^{-1}(x,e)),m\big)\Big)\\
&=\;\widetilde{\tau}_i\Big(\big[\tau_j^{-1}(x,e),m\big]\Big)=\Big(x,\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i\circ\tau_j^{-1}(x,e),m\big)\Big)\\
&=\;\Big(x,\lambda\big(\mathrm{pr}_2(x,g_{ij}(x)),m\big)\Big)\equiv\Big(x,\lambda\big(g_{ij}(x),m\big)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Konstrukcja wiązki stowarzyszonej jest zatem dobrze określona.

Rozważmy następnie odwzorowanie

$$[p_*]_\lambda^{-1}\ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)_x\longrightarrow M\ :\ [(p,m)]\longmapsto\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\,,\qquad p_*\in(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x\,.$$

Jest ono dobrze określone, gdyż dla dowolnego reprezentanta $(\widetilde{p},\widetilde{m})\in[(p,m)]$ obliczamy

$$\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,\widetilde{p})}(\widetilde{m})=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}\circ\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})}(\widetilde{m})=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\,.$$

Ponadto jest ono bijekcją, albowiem prawdziwą jest implikacja

$$\begin{aligned}
&[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_2,m_2)]\big)=[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_1,m_1)]\big)\qquad\Longleftrightarrow\qquad m_2=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(m_1)\\
\Longrightarrow\qquad&[(p_2,m_2)]=\Big[\Big(p_2,\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(m_1)\Big)\Big]=\Big[\Big(p_2\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1),m_1\Big)\Big]\\
&=[(p_1,m_1)]\,,
\end{aligned}$$

dowodząca injektywności $[p_*]_\lambda^{-1}$, a do tego dowolny punkt $m\in M$ możemy zapisać w postaci

$$m=[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_*,m)]\big)\,,$$

co zaświadcza o surjektywności tego odwzorowania, wskazując w jawny sposób jego odwrotność

$$[p_*]_\lambda\ :\ M\longrightarrow(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)_x\ :\ m\longmapsto[(p_*,m)]\,.$$

Istotnie, odwzorowanie $[p_*]_\lambda$ spełnia tożsamości

$$\begin{aligned}
[p_*]_\lambda^{-1}\circ[p_*]_\lambda(m)\;&=\;\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_*)}(m)=\lambda_e(m)=m\,,\\
[p_*]_\lambda\circ[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p,m)]\big)\;&=\;\Big[\Big(p_*,\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\Big)\Big]\equiv\Big[\Big(p_*\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p),m\Big)\Big]\\
&=\;[(p,m)]\,.
\end{aligned}$$

Jest ono jawnie gładkie jako superpozycja włożenia $(p_*, \mathrm{id}_M) : M \longrightarrow \{p_*\} \times M \subset (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*)} \times M$ i surjektywnej submersji $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}} : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}$. Gładkość $[p_*]_\lambda^{-1}$ wynika natomiast z tezy Stw. Niezb-29 odniesionej do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} & M \\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x \times M \arrow[ur, "\lambda(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,\mathrm{pr}_1),\mathrm{pr}_2)"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G})/\mathrm{G}} \restriction (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x \times M"'] & (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \arrow[u, "{[p_*]_\lambda^{-1}}"'] \end{tikzcd}$$

o submersywnej surjekcji na krawędzi poziomej. Konstrukcja dyfeomorfizmu $[p_*]_\lambda^{-1}$ stanowi zatem niezależny (od wcześniejszej konstrukcji trywializacji lokalnych) dowód słuszności przedłożonej przez nas identyfikacji włókna typowego wiązki stowarzyszonej.

Przykłady 1.

(1) Wiązka wektorowa $\mathbb{V}$ (rzędu n) jest wiązką stowarzyszoną z wiązką (główną) reperów $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ poprzez działanie definiujące (ewaluację),

$$\mathbb{V} \cong \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times_{\mathrm{ev}} \mathbb{K}^{\times n} .$$

(2) **Wiązka dołączona**

$$\big(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathrm{Ad}} \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathrm{Ad}} \mathrm{G}}\big) .$$

(3) Wiązka główna P_{G} może być zrealizowana jako wiązka stowarzyszona

$$\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}}\big) .$$

Stosowny izomorfizm wiązek włóknistych to

$$\widetilde{\imath} : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} : [(p,g)] \longmapsto p \triangleleft g ,$$

przy czym jego gładkość wynika z tego, że domyka on diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & B \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G})/\mathrm{G}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} \arrow[u, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}}"'] \end{tikzcd} ,$$

w którym $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G})/\mathrm{G}}$ jest surjektywną submersją, r zaś – odwzorowaniem gładkim. Odwrotność $\widetilde{\imath}$ jest dana w (jawnie gładkiej) postaci

$$\widetilde{\imath}^{-1} : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} : p \longmapsto [(p,e)] .$$

Na wiązce stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}$ jest określone działanie prawostronne grupy G w postaci

$$\widetilde{r} : (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}) \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} : \big([(p,g)], h\big) \longmapsto [(p, g \cdot h)] ,$$

względem którego każde z włókien jest torsorem. Izomorfizm $\widetilde{\imath}$ jest G-ekwiwariantny,

$$\widetilde{\imath} \circ \widetilde{r}\big([(p,g)], h\big) = \widetilde{\imath}\big([(p, g \cdot h)]\big) = p \triangleleft (g \cdot h) = (p \triangleleft g) \triangleleft h = r \circ \widetilde{\imath}\big([(p,g)], h\big) ,$$

mamy zatem do czynienia z izomorfizmem wiązek głównych.

W poszukiwaniu automorfizmów wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}$ zauważamy, że ze względu na przemienność działania regularnego lewostronnego $\ell_\cdot$ z działaniem regularnym prawostronnym $\wp_\cdot : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} : (g,h) \longmapsto g \cdot h$ to ostatnie indukuje – na mocy Stw. 3, a dla dowolnego $g \in \mathrm{G}$ – niezmiennik wiązek

$$\Phi[r_g] : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} \circlearrowleft : [(p,h)] \longmapsto \Phi[r_g]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,h)]\big) ,$$

przy czym

$$\Phi[r_g]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,h)]\big) \quad = \quad [p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}} \circ r_g \circ [p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}}^{-1}\big([(p,h)]\big)$$

$$= \quad [p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell \mathrm{G}}\circ r_g\circ \ell_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,p)}(h) = [p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell \mathrm{G}}\circ r_g(h)$$

$$= \quad [p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell \mathrm{G}}(h\cdot g) = [(p,h\cdot g)] \equiv \widetilde{r}_g\big([(p,h)]\big)\,,$$

czyli

$$\Phi[r_g] \equiv \widetilde{r}_g\,,$$

a ponieważ

$$[(p,h)] = [(p \triangleleft h, e)] \equiv \widetilde{\iota}^{-1}(p\triangleleft h)$$

oraz

$$[(p,h\cdot g)] = [(p\triangleleft h\cdot g,e)] = \big[\big((p\triangleleft h)\triangleleft g,e\big)\big] = \big[\big(r_g(p\triangleleft h),e\big)\big] \equiv \widetilde{\iota}^{-1}\circ r_g(p\triangleleft h)\,,$$

zatem

$$\widetilde{\iota}\circ\Phi[r_g]\circ\widetilde{\iota}^{-1} = r_g\,.$$

W tym więc sensie automorfizmy $\Phi[r_g]$ są indukowane przez $r_\cdot$, a o tym ostatnim możemy myśleć jako o modelowym niezmienniku wiązek.

Celem praktycznym (np. fizykalnym) konstrukcji wiązek stowarzyszonych jest uzyskanie gładkich dystrybucji rozmaitości określonego (izo)typu M nad zadaną bazą B (np. czasoprzestrzenią) będących nośnikiem wyróżnionego działania ustalonej grupy Liego G (np. symetrii teorii fizykalnej), które ma charakter lokalny nad bazą. Innymi słowy, jest nim stworzenie rozmaitości lokalnie modelowanej na $\mathcal{O}\times M$, $\mathcal{O}\subset B$ z działaniem G lokalnie modelowanym na λ. O tym, że tak zdefiniowany cel został skutecznie zrealizowany zaświadczają dwa poniższe stwierdzenia, z których pierwsze dostarcza zarazem „usprawiedliwienia” *ex post* dokonanego przez nas nieoczywistego wyboru (podklasy) morfizmów wiązek stowarzyszonych.

Stwierdzenie 3. Wiązki stowarzyszone z daną wiązką główną $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ wraz z odnośnymi niezmiennikami wiązek stowarzyszonych tworzą **kategorię wiązek stowarzyszonych z wiązką główną** P_{G}, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,.$$

Kategoria ta jest kanonicznie równoważna kategorii $\mathbf{Man}_{\mathrm{G}}$ rozmaitości z (lewostronnym) działaniem gładkim o morfizmach danych przez odwzorowania G-ekwiwariantne.

Dowód: Pierwsza część tezy stanowi ledwie wskazanie klasy morfizmów przez nas rozpatrywanych i jako taka nie wymaga odrębnego dowodu (niezmienniki wiązek można w oczywisty sposób składać, a ponadto morfizm identycznościowy jest – rzecz jasna – niezmiennikiem wiązek). Także wzajem jednoznaczna odpowiedniość między obiektami kategorii $\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i G-rozmaitościami jest oczywista. Jedynym zatem, co wymaga sprawdzenia, jest stosowna bijektywna odpowiedniość między niezmiennikami wiązek stowarzyszonych i odwzorowaniami G-ekwiwariantnymi.

Niechaj $(\Phi,\mathrm{id}_B)\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1\longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2$ będzie niezmiennikiem wiązek, a wtedy możemy zdefiniować – dla pewnego (dowolnego) punktu $p\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ – odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\chi[\Phi] := [p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ[p]_{\lambda_1}\ :\ M_1 \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \xrightarrow{\cong} M_2\,,$$

które wobec definiującej własności Φ,

$$\Phi\circ[p_2]_{\lambda_1}\circ[p_1]_{\lambda_1}^{-1} = [p_2]_{\lambda_2}\circ[p_1]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\,,$$

nie zależy od wyboru punktu p użytego w jego definicji. G-ekwiwariantność tak określonych odwzorowań,

$$\chi[\Phi]\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1,M_2)\,,$$

wynika wprost z bezpośredniego rachunku, odwołującego się do Równ. (3) i przeprowadzonego poniżej dla dowolnych $(p,g)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}$,

$$\chi[\Phi]\circ\lambda_{1\,g} \quad\equiv\quad [p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ\big([p]_{\lambda_1}\circ\lambda_{1\,g}\big) = [p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ[p\triangleleft g]_{\lambda_1}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \quad \big([p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \lambda_{2\,g^{-1}}\big)^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} = \lambda_{2\,g} \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} \\
&= \quad \lambda_{2\,g} \circ [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p]_{\lambda_1} \equiv \lambda_{2\,g} \circ \chi[\Phi]\,.
\end{aligned}$$

I odwrotnie, z każdym odwzorowaniem $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)$ możemy stowarzyszyć odwzorowanie (gładkie)

$$\begin{aligned}
\Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} := [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \quad &: \quad (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_2)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \\
&: \quad [(p,m)] \longmapsto \big[\big(p, \chi(m)\big)\big]\,,
\end{aligned}$$

zależne jedynie od rzutu $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ na bazę wiązki B,

$$\begin{aligned}
\Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g)} \quad &= \quad [p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ \big(\lambda_{2\,g} \circ \chi \circ \lambda_{1\,g^{-1}}\big) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \\
&= \quad [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ \big(\lambda_{1\,g} \circ \lambda_{1\,g^{-1}}\big) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \equiv \Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\,,
\end{aligned}$$

i z tej racji określające niezmiennik wiązek dany wzorem

$$\Phi[\chi] \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2 \ : \ [(p,m)] \longmapsto \Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,m)]\big)\,.$$

Istotnie, obliczamy

$$\begin{aligned}
\Phi[\chi] \circ [p_2, p_1]_{\lambda_1} \quad &\equiv \quad \big([p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_2]_{\lambda_1}^{-1}\big) \circ \big([p_2]_{\lambda_1} \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}\big) = [p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1} \\
&= \quad \big([p_2]_{\lambda_2} \circ [p_1]_{\lambda_2}^{-1}\big) \circ \big([p_1]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}\big) \equiv [p_2, p_1]_{\lambda_2} \circ \Phi[\chi]\,.
\end{aligned}$$

Skonstruowane tu przyporządkowania

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1, \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2) \\
: \quad &(\Phi, \mathrm{id}_B) \longmapsto \chi[\Phi]
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1, \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2) \\
: \quad &\chi \longmapsto \big(\Phi[\chi], \mathrm{id}_B\big)
\end{aligned}$$

są wzajem odwrotne, a każde z nich jest funktorialne. Istotnie, w przypadku rozmaitości M z działaniem $\lambda \,:\, \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ otrzymujemy, w dowolnym punkcie $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, równość

$$\Phi[\mathrm{id}_M]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} = [p]_{\lambda_2} \circ \mathrm{id}_B \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = \mathrm{id}_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}\,,$$

czyli też tożsamość

$$\Phi[\mathrm{id}_M] = \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}\,,$$

a nadto dla dowolnej pary odwzorowań G-ekwiwariantnych $\chi_\alpha \ : \ M_\alpha \longrightarrow M_{\alpha+1}$, $\alpha \in \{1,2\}$ pomiędzy G-rozmaitościami M_β, $\beta \in \{1,2,3\}$ z odnośnymi działaniami $\lambda_\beta \ : \ \mathrm{G} \times M_\beta \longrightarrow M_\beta$

otrzymujemy diagram przemienny (dla dowolnego $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$)

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rrr, "{[p]_{\lambda_1}}"] \arrow[dr, "\chi_1"] \arrow[dd, "\chi_2 \circ \chi_1"'] & & & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \arrow[dl, "{\Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"'] \arrow[dd, "{\Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \circ \Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"] \\
& M_2 \arrow[r, "{[p]_{\lambda_2}}"] \arrow[dl, "\chi_2"] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \arrow[dr, "{\Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"] & \\
M_3 \arrow[rrr, "{[p]_{\lambda_3}}"'] & & & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_3} M_3\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}
\end{tikzcd}
\quad ,
$$

w którym przemienność górnego (wzgl. dolnego) trapezu wyraża definicję niezmiennika $\Phi[\chi_1]$ (wzgl. $\Phi[\chi_2]$), a przemienność lewego i prawego trójkąta jest zapisem definicji odnośnych superpozycji odwzorowań, a ponieważ zarazem skrajna prawa krawędź jest – wprost z definicji – tożsama z odwzorowaniem $\Phi[\chi_2 \circ \chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$, przeto – zgodnie z oczekiwaniami –

$$\Phi[\chi_2 \circ \chi_1] = \Phi[\chi_2] \circ \Phi[\chi_1] \,.$$

Ten sam diagram przekonuje nas o funktorialności odwzorowania odwrotnego, jeśli tylko potraktować niezmienniki wiązek jako dane, a odwzorowania G-ekwiwariantne – jako przypisane tym ostatnim. □

Uwaga 2. Termin „wiązka dołączona” bywa używany w literaturze w odniesieniu do wiązki stowarzyszonej

$$\big(\mathrm{ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}} \mathfrak{g}, B, \mathfrak{g}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}} \mathfrak{g}}\big)\,,$$

o włóknie typowym tożsamym z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G.

Mamy też zasadnicze

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Przykł. 1 (2). Istnieje kanoniczna struktura wiązki grup na $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, lokalnie modelowana na strukturze grupy na włóknie typowym G, tj. są określone: łączna operacja binarna

$$[M] \;:\; \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

posiadająca element neutralny oraz operacja unarna

$$[\mathrm{Inv}] \;:\; \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft\,,$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty grupy. Struktura ta indukuje kanonicznie strukturę grupy (Frécheta–Liego) na przestrzeni cięć $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ tej wiązki, mającą swą realizację na przestrzeni cięć $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ indukowaną przez odwzorowanie

$$[\lambda]. \;:\; \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty (lDG1) i (lDG2) działania grupy Liego na rozmaitości i modelowane lokalnie na λ.

Dowód: Rozważmy na wstępnie operację binarną

$$
\begin{aligned}
[M] \quad &: \quad \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \\
&: \quad \big([(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)]\big) \longmapsto \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big)\big]\,,
\end{aligned}
$$

wraz z przyporządkowaniem – włókno po włóknie –

$$[\varepsilon]_{\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)}\ :\ \{\bullet\}\longrightarrow \operatorname{Ad}\mathsf{P}_{\rm G}\ :\ \bullet\longmapsto[(p,e)]\,,\quad p\in\mathsf{P}_{\rm G}$$

oraz operacją unarną

$$[\mathrm{Inv}]\ :\ \operatorname{Ad}\mathsf{P}_{\rm G}\ \circlearrowleft\ :\ [(p,g)]\longmapsto\big[\big(p,g^{-1}\big)\big]\,.$$

Zaczniemy od sprawdzenia, że wszystkie trzy odwzorowania są dobrze określone. Niech zatem $(p_3,g_3)\in[(p_1,g_1)]$, tj. $(p_3,g_3)=(p_1\triangleleft g_{13},\operatorname{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1))$ oraz $(p_4,g_4)\in[(p_2,g_2)]$, tj. $(p_4,g_4)=(p_2\triangleleft g_{24},\operatorname{Ad}_{g_{24}^{-1}}(g_2))$, gdzie dla skrótu oznaczyliśmy $g_{ij}\equiv\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_i,p_j)$, $(i,j)\in\{(1,3),(2,4)\}$, a wówczas – na mocy Stw. 5-6.1 – otrzymujemy

$$\begin{aligned}\big[\big(p_3,g_3\cdot\operatorname{Ad}_{g_{34}}(g_4)\big)\big]&=\big[\big(p_1,\operatorname{Ad}_{g_{13}}\big(g_3\cdot\operatorname{Ad}_{g_{34}}(g_4)\big)\big)\big]\\&=\big[\big(p_1,\operatorname{Ad}_{g_{13}}\big(\operatorname{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1)\cdot\operatorname{Ad}_{g_{34}\cdot g_{24}^{-1}}(g_2)\big)\big)\big]=\big[\big(p_1,g_1\cdot\operatorname{Ad}_{g_{13}\cdot g_{34}\cdot g_{42}}(g_2)\big)\big]\\&=\big[\big(p_1,g_1\cdot\operatorname{Ad}_{g_{12}}(g_2)\big)\big]\end{aligned}$$

oraz

$$\big[\big(p_3,g_3^{-1}\big)\big]=\big[\big(p_1,\operatorname{Ad}_{g_{13}}\big(g_3^{-1}\big)\big)\big]=\big[\big(p_1,\operatorname{Ad}_{g_{13}}(g_3)^{-1}\big)\big]=\big[\big(p_1,g_1^{-1}\big)\big]\,,$$

a nadto stwierdzamy, że wartość odwzorowania $[\varepsilon]_{\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)}$ nie zależy od wyboru punktu we włóknie nad $\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)$, oto bowiem dla dowolnego $\widetilde{p}=p\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\widetilde{p})$ dostajemy

$$[(\widetilde{p},e)]=\big[\big(p\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\widetilde{p}),e\big)\big]=\big[\big(p,\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\widetilde{p})}(e)\big)\big]=[(p,e)]\,.$$

Dowód stwierdzenia, że powyższa struktura jest w istocie lokalnie modelowana na G, sprowadza się do wykazania, że izomorfizmy modelujące włókna wiązki dołączonej,

$$[p_*]_{\rm Ad}\ :\ \big(\operatorname{Ad}\mathsf{P}_{\rm G}\big)_x\longrightarrow\mathrm{G}\ :\ [(p,g)]\longmapsto\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_*,p)}(g)\,,\quad x\in B\,,$$

są homomorfizmami grup, co czynimy poniżej (dla dowolnej pary punktów $(p_1,g_1),(p_2,g_2)\in\mathsf{P}_{\rm G}\times\mathrm{G}$ o własności $p_1,p_2\in(\mathsf{P}_{\rm G})_x$), w odwołaniu do Stw. 5-6.1,

$$\begin{aligned}[p_*]_{\rm Ad}\circ[M]\big([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)]\big)&=[p_*]_{\rm Ad}\big(\big[\big(p_1,g_1\cdot\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1,p_2)}(g_2)\big)\big]\big)\\&=\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_*,p_1)}\big(g_1\cdot\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1,p_2)}(g_2)\big)\\&=\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_*,p_1)}(g_1)\cdot\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_*,p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1,p_2)}(g_2)\\&=\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_*,p_1)}(g_1)\cdot\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_*,p_2)}(g_2)\\&\equiv M\big([p_*]_{\rm Ad}\big([p_1,g_1]\big),[p_*]_{\rm Ad}\big([p_2,g_2]\big)\big)\,.\end{aligned}$$

Pierwszym krokiem na drodze do zrekonstruowania działania włókno po włóknie grupy $\Gamma(\operatorname{Ad}\mathsf{P}_{\rm G})$ na przestrzeni $\Gamma(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M)$ jest identyfikacja następującego lewego działania wiązki dołączonej na $\mathsf{P}_{\rm G}$:

$$[r].\ :\ \operatorname{Ad}\mathsf{P}_{\rm G}\times_B\mathsf{P}_{\rm G}\longrightarrow\mathsf{P}_{\rm G}\ :\ \big([(p,g)],\widetilde{p}\big)\longmapsto r_{\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\widetilde{p},p)}(g)}(\widetilde{p})\,.$$

Jest ono w pełni jednoznacznie określone, oto bowiem dla dowolnego reprezentanta $(p_2,g_2)\in[(p_1,g_1)]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}r_{\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2)}(\widetilde{p})&=r_{\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\widetilde{p},p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1,p_2)}(g_2)}(\widetilde{p})=r_{\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\widetilde{p},p_1)}(\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1,p_2)}(g_2))}(\widetilde{p})\\&=r_{\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1)}(\widetilde{p})\,.\end{aligned}$$

O jego gładkości przesądza Stw. Niezb-29 – istotnie, $[r].$ jest (jedynym) gładkim odwzorowaniem indukowanym przez stałe na poziomicach rzutu kanonicznego $\pi_{(\mathsf{P}_{\rm G}\times\mathrm{G})/\mathrm{G}}$ odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\widetilde{r}.\ :\ (\mathsf{P}_{\rm G}\times\mathrm{G})\times_B\mathsf{P}_{\rm G}\longrightarrow\mathsf{P}_{\rm G}\ :\ \big((p,g),\widetilde{p}\big)\longmapsto r_{\operatorname{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\widetilde{p},p)}(g)}(\widetilde{p})\,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że $[r].$ ma własności analogiczne do własności definiujących (lewego) działania grupy: oto element neutralny działa trywialnie,

$$[r]_{[(p,e)]}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p)}(e)}(\widetilde{p}) = r_e(\widetilde{p}) = \widetilde{p}\,,$$

a odwzorowanie $[r].$ jest multyplikatywne w pierwszym argumencie, tj. dla dowolnej pary $[(p_1,g_1)]$, $[(p_2,g_2)] \in (\mathsf{P}_\mathrm{G})_{\pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p})}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} & [r]_{[M]([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)])}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_1,p_2)}(g_2))}(\widetilde{p}) \\ = \ & r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_1,p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) \\ = \ & r_{\mathrm{Ad}_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2^{-1})}(\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1))} \circ r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2))}(\widetilde{p}) \\ \equiv \ & \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p_2)\cdot g_2^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_2,p_1)}(g_1) \circ [r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p})\,, \end{aligned}$$

którą wobec równości

$$\begin{aligned} & \phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}\big([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p}),p_1\big) = \phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}\big(r_{g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_2,\widetilde{p})}(p_2),p_1\big) \\ \equiv \ & \phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}\Big(r_{g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_2,\widetilde{p})}(p_2), r_{g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_2,\widetilde{p})\cdot\big(g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_2,\widetilde{p})\big)^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_2,p_1)}(p_2)\Big) \\ = \ & \big(g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_2,\widetilde{p})\big)^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_2,p_1) \end{aligned}$$

możemy przepisać w pożądanej postaci

$$\begin{aligned} [r]_{[M]([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)])}(\widetilde{p}) \ &= \ r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p}),p_1)}(g_1)}\big([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p})\big) \\ &\equiv \ [r]_{[(p_1,g_1)]} \circ [r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p})\,. \end{aligned}$$

Należy przy tym podkreślić, że zdefiniowane tu działanie wiązki dołączonej jest przemienne z działaniem prawostronnym definiującym $r.$ – w rzeczy samej, dla dowolnych $[(p,g)] \in \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_\mathrm{G}$, $h \in \mathrm{G}$ i $\widetilde{p} \in (\mathsf{P}_\mathrm{G})_{\pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p)}$ stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} [r]_{[(p,g)]} \circ r_h(\widetilde{p}) \ &= \ r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(r_h(\widetilde{p}),p)}(g)}\big(r_h(\widetilde{p})\big) = r_{g\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p,r_h(\widetilde{p}))}(p) \\ &= \ r_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p,r_h(\widetilde{p}))}\big(r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},p)}(g)}(\widetilde{p})\big) \\ &\equiv \ r_{\phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p},r_h(\widetilde{p}))}\big([r]_{[(p,g)]}(\widetilde{p})\big) = r_h \circ [r]_{[(p,g)]}(\widetilde{p})\,. \end{aligned}$$

Działanie to możemy następnie podnieść, z zachowaniem wszystkich sprawdzonych powyżej jego pożądanych własności, z przestrzeni totalnej wiązki dołączonej do przestrzeni cięć (globalnych) tejże wiązki, wedle schematu

$$\Gamma[r]. \ : \ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_\mathrm{G}) \times \mathsf{P}_\mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}_\mathrm{G} \ : \ (\gamma,p) \longmapsto [r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p)}(p)\,.$$

Przestrzeń $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_\mathrm{G})$ (wyposażona w naturalną strukturę rozmaitości Frécheta) objawia się w roli nośnika struktury grupy (Frécheta–Liego) o operacjach grupowych (σ jest *dowolnym* cięciem lokalnym P_G na otoczeniu danego punktu w bazie)

$$\begin{aligned} \Gamma[M] \ &: \ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_\mathrm{G}) \times \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_\mathrm{G}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_\mathrm{G}) \ : \ (\gamma_1,\gamma_2) \longmapsto [M]\circ(\gamma_1,\gamma_2)\,, \\ \Gamma[\mathrm{Inv}] \ &: \ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_\mathrm{G}) \circlearrowleft \ : \ \gamma \longmapsto [\mathrm{Inv}]\circ\gamma\,, \\ \Gamma[\varepsilon] \ &: \ \{\bullet\} \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_\mathrm{G}) \ : \ \bullet \longmapsto \big[\big(\sigma(\cdot),e\big)\big]\,, \end{aligned}$$

indukowanych w oczywisty sposób (punktowo) z odnośnych operacji na $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_\mathrm{G}$, i zarazem – w roli podgrupy grupy automorfizmów wiązki głównej P_G (nad identycznością na bazie), przy czym odwzorowanie $\Gamma[r]_\gamma$ utożsamiamy z automorfizmem $(\Gamma[r]_\gamma, \mathrm{id}_\mathrm{G}, \mathrm{id}_B)$ w zapisie Def. 5-6.1. Używając tak rozumianego działania grupy cięć wiązki dołączonej na P_G, możemy następnie w oczywisty sposób rozszerzyć działanie tejże grupy cięć do wiązki $\mathsf{P}_\mathrm{G} \times M$ nad wyjściową bazą B

kładąc

$$\begin{aligned}\Gamma[\widetilde{r}]. := \Gamma[r].\times \mathrm{id}_M \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)\longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M\\ &: \quad \big(\gamma,(p,m)\big)\longmapsto \big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p),m\big)\,.\end{aligned}$$

Własnością tego działania o kluczowym znaczeniu dla naszych dalszych rozważań jest jego przemienność z działaniem $\widetilde{\lambda}.$ zdefiniowanym w Równ. (7-8.2), stanowiącym podstawę konstrukcji wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$. Istotnie, dla dowolnych $\gamma\equiv[(\sigma,\mu)]\in\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$, $g\in\mathrm{G}$ oraz $(p,m)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M$, otrzymujemy – przywoławszy sprawdzoną uprzednio przemienność działań: $[r].$ i $r.$ – x

$$\begin{aligned}\Gamma[\widetilde{r}]_\gamma\circ\widetilde{\lambda}_g(p,m) &= \big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(r_g(p))}\big(r_g(p)\big),\lambda_{g^{-1}}(m)\big)\\ &\equiv \big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\circ r_g(p),\lambda_{g^{-1}}(m)\big)=\big(r_g\circ[r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p),\ell_{g^{-1}}(m)\big)\\ &= \widetilde{\lambda}_g\circ\Gamma[\widetilde{r}]_\gamma(p,m)\,.\end{aligned}$$

W konsekwencji tego faktu działanie indukowane $\Gamma[\widetilde{r}].$ zstępuje na rozmaitość orbit $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}\equiv\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$, tj. kanonicznie indukuje działanie lewostronne grupy $\Gamma(P_{\mathrm{Ad}.}\mathrm{G})$ na rozmaitości $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ dane wzorem

$$\begin{aligned}[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_. \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M\\ &: \quad \big(\gamma,[(p,m)]\big)\longmapsto\big[\big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p),m\big)\big]\,.\end{aligned}$$

Dotychczasowa nasza analiza przekonuje, że odwzorowanie to jest dobrze określone i ma wszystkie własności działania (lewostronnego) grupy. W ostatnim kroku indukujemy przy jego użyciu postulowane w treści dowodzonego stwierdzenia działanie grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ na przestrzeni cięć (globalnych) wiązki stowarzyszonej,

$$\begin{aligned}\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_. \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\longrightarrow\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\\ &: \quad \big(\gamma,[(\sigma,\mu)]\big)\longmapsto\big[\big([r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\sigma(\cdot)}\circ\sigma(\cdot),\mu(\cdot)\big)\big]\equiv\big[\big([r]_{\gamma(\cdot)}\circ\sigma(\cdot),\mu(\cdot)\big)\big]\,.\end{aligned}\tag{4}$$

To ostatnie w oczywisty sposób stanowi podniesienie do przestrzeni cięć odwzorowania

$$\begin{aligned}[\lambda]. \quad &: \quad \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M\\ &: \quad \big([(p_1,g)],[(p_2,m)]\big)\longmapsto\big[\big(p_2,\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g)}(m)\big)\big]\,,\end{aligned}$$

którego określoność i multyplikatywność w pierwszym argumencie jest bezpośrednią konsekwencją zweryfikowanych przez nas odnośnych własności działania $\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]].$. To, że – zgodnie z tezą stwierdzenia – działanie $[\lambda].$ jest lokalnie modelowane na $\lambda.$, stwierdzamy, używając wskazanych wcześniej izomorfizmów $[p_*]_{\mathrm{Ad}}$ oraz $[p_*]_\lambda$. Wykonujemy zatem prosty rachunek:

$$\begin{aligned}&\lambda_{[p_*]_{\mathrm{Ad}}([(p_1,g)])}\big([p_*]_\lambda\big([(p_2,m)]\big)\big)=\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}(g)}\circ\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)}(m)\\ =\;&\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g)}(m)=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)}\big(\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g)}(m)\big)\\ \equiv\;&[p_*]_\lambda\big(\big[\big(p_2,\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g)}(m)\big)\big]\big)\equiv[p_*]_\lambda\circ[\lambda]_{[(p_1,g)]}\big([(p_2,m)]\big)\,.\end{aligned}$$

□

Uwaga 3. Postać zapostulowanych w treści dowodu geometryzacji operacji grupowych ($[M]$, [Inv] i $[\varepsilon]$) oraz działania grupy ($[\lambda].$) może na pierwszy rzut oka wydać się wysoce nieoczywistą. Należy jednak podkreślić, że ich złożoność jest jedynie artefaktem przyjętego wcześniej schematu opisu (punktów) rozmaitości ilorazowych $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ i $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$. Istotnie, gdy np. wykorzystać definicję orbity $[(p_2,g_2)]$ drugiego argumentu w definicji operacji binarnej $[M]$ i sprowadzić ją do postaci

$$[(p_2,g_2)]\equiv\big[\big(r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(p_1),g_2\big)\big]\equiv\big[\big(p_1,\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\equiv\widetilde{g}_2\big)\big]$$

(wszak $(p_1,p_2)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$), otrzymamy naturalną postać geometrycznego mnożenia:

$$[M]\big([(p_1,g_1)],[(p_1,\widetilde{g}_2)]\big)=\big[\big(p_1,g_1\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_1)}(\widetilde{g}_2)\big)\big]=\big[\big(p_1,g_1\cdot\mathrm{Ad}_e(\widetilde{g}_2)\big)\big]=\big[\big(p_1,g_1\cdot\widetilde{g}_2\big)\big]\,.$$

Analogiczny wniosek dotyczy działania $[\lambda]$.. Po przepisaniu drugiego jego argumentu wedle powyższego schematu,

$$[(p_2,m)]\equiv\big[\big(p_1,\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(m)\equiv\widetilde{m}\big)\big]\,,$$

dostajemy

$$[\lambda]\big([(p_1,g)],[(p_1,\widetilde{m})]\big)=\big[\big(p_1,\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_1)}(g)}\big(\widetilde{m}\big)\big)\big]\equiv\big[\big(p_1,\lambda_g\big(\widetilde{m}\big)\big)\big]\,.$$

Powyższe stwierdzenie wraz z jego konstruktywnym dowodem pokazują dowodnie, że cel, o którym była mowa wcześniej, został osiągnięty. Eksponują przy tym rolę zbioru gładkich cięć wiązki stowarzyszonej, co każe nam przyjrzeć się uważniej temu ostatniemu. Czynimy to w

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 1 i Przykł. 1 (2). Istnieje bijekcja

$$\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M)\,,$$

w której zapisie $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M)$ jest zbiorem odwzorowań G-ekwiwariantnych z Def. 7-8.2.

Dowód: Niechaj $\phi\equiv[(\sigma,\mu)]\in\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$ będzie cięciem *globalnym* określonym przez cięcia (lokalnie gładkie) $\sigma\in\Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i $\mu\in\Gamma_{\mathrm{loc}}(B\times M)$ (to ostatnie to lokalnie gładkie odwzorowanie $\mu\,:\,\mathrm{B}\longrightarrow M$). Korzystając z odwzorowania ilorazowego i rzutu kanonicznego na bazę wiązki P_{G}, możemy zdefiniować odwzorowanie

$$\Phi_\lambda[\phi]\;:\;\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow M\;:\;p\longmapsto\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\,.$$

Bez trudu upewniamy się, że powyższa definicja ma sens, oto bowiem dla dowolnej pary $(\sigma',\mu')=(\sigma\triangleleft\mathrm{Inv}\circ\gamma,\gamma\triangleright\mu)$ wyznaczonej w oczywisty sposób przez $\gamma\in\Gamma_{\mathrm{loc}}(B\times\mathrm{G})$ otrzymujemy – w odwołaniu do aksjomatyki działania grupy na zbiorze – pożądaną równość

$$\begin{aligned}\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma'\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu'\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)&=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\triangleleft\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)^{-1})}\big(\lambda_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big)\\&=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))\cdot\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)^{-1}\cdot\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\\&=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\,.\end{aligned}$$

Jego G-ekwiwariantność wynika wprost z rachunku:

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda[\phi]\circ r_g(p)&=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g,\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g)\big)\\&=\lambda_{g^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)=\lambda_{g^{-1}}\circ\Phi_{\lambda.}[\phi](p)\,,\end{aligned}$$

przeprowadzonego dla dowolnych $(p,g)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}$, a używającego Stw. 5-6.1 oraz wspomnianej wcześniej aksjomatyki.

Ażeby skonstruować odwrotność powyższego przyporządkowania, ustalmy (dowolnie) pokrycie trywializujące $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ wiązki P_{G}, a następnie dowolnemu odwzorowaniu G-ekwiwariantnemu $f\,:\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow M$ przyporządkujmy rodzinę cięć lokalnych

$$S_\lambda[f]_i\quad:\quad\mathcal{O}_i\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M\;:\;x\longmapsto\big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),f\circ\tau_i^{-1}(x,e)\big)\big]\,,\quad i\in I\,.$$

Każde z nich jest (lokalnie) gładkie jako superpozycja odnośnych odwzorowań gładkich $\big(\tau_i^{-1}(\cdot,e),f\circ\tau_i^{-1}(\cdot,e)\big)\,:\,\mathcal{O}_i\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M$ i surjektywnej submersji $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)/\mathrm{G}}$. Z łatwością przekonujemy się, że cięcia te są ograniczeniami (do odnośnych zbiorów $\mathcal{O}_i$) cięcia globalnego, stwierdzając, że z racji G-ekwiwariantności odwzorowań τ_i i f w dowolnym punkcie $x\in\mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$S_\lambda[f]_j(x)\quad=\quad\big[\big(\tau_j^{-1}(x,e),f\circ\tau_j^{-1}(x,e)\big)\big]=\big[\big(\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\big),f\circ\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\big)\big)\big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e) \triangleleft g_{ij}(x), f\big(\tau_i^{-1}(x,e) \triangleleft g_{ij}(x)\big)\big] \\
&= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e) \triangleleft g_{ij}(x), g_{ij}(x)^{-1} \triangleright f \circ \tau_i^{-1}(x,e)\big] \\
&= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), f \circ \tau_i^{-1}(x,e)\big)\big] \equiv S_\lambda[f]_i(x) .
\end{aligned}
$$

Bezpośredni rachunek obu superpozycji:

$$\Phi_\lambda\big[S_\lambda[f]\big] \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow M \ : \ p \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,p)}\big(f(p)\big) = \lambda_e\big(f(p)\big) = f(p)$$

oraz

$$
\begin{aligned}
S_\lambda\big[\Phi_\lambda\big[[(\sigma,\mu)]\big]\big] \quad &: \quad B \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \\
&: \ x \longmapsto \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\tau_i^{-1}(x,e),\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\tau_i^{-1}(x,e))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,e)\big)\big)\big] \\
&\equiv \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\tau_i^{-1}(x,e),\sigma(x))}\big(\mu(x)\big)\big)\big] = [(\sigma,\mu)](x)
\end{aligned}
$$

pokazuje dowodnie, że prawdziwe są tożsamości

$$\Phi_\lambda \circ S_\lambda = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M)} , \qquad\qquad S_\lambda \circ \Phi_\lambda = \mathrm{id}_{\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)} .$$

□

Specjalizacja powyższego wyniku do przypadku wiązki dołączonej okazuje się mieć charakter strukturalny, co orzeka

Stwierdzenie 6. Bijekcja

$$\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathrm{G}) ,$$

o której mówi Stw. 5, jest izomorfizmem między grupą cięć wiązki dołączonej, o strukturze opisanej w dowodzie Stw. 4, i grupą odwzorowań P_{G} w G ekwiwariantnych względem odnośnych działań (lewostronnych) $r_{\mathrm{Inv}(\cdot)}$ i Ad., o naturalnej strukturze punktowej (obecnej na zbiorze odwzorowań, których przeciwdziedziną jest grupa).

Dowód: W notacji dowodów obu stwierdzeń z tezy stwierdzenia dowodzonego sprawdzamy – dla dowolnej pary cięć $\gamma_\alpha = [(\sigma_\alpha,\mu_\alpha)] \in \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ oraz punktu $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ –

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{\mathrm{Ad}}\big[\Gamma[M](\gamma_1,\gamma_2)\big](p) \\
=\ & \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_1 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\sigma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_2 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) \\
=\ & \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_1 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
& \cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\sigma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_2 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
=\ & \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_1 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_2 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
=\ & M \circ \big(\Phi_{\mathrm{Ad}}(\gamma_1), \Phi_{\mathrm{Ad}}(\gamma_2)\big)(p) .
\end{aligned}
$$

□

Strukturalny charakter bijekcji, o której mowa w Stw. 4 i 5, najpełniej ilustruje

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i 5 oraz ich dowodów. Bijekcja Φ_λ jest (lewostronnie) ekwiwariantna względem działań grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$: działania $\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_.$ na przestrzeni $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$, zdefiniowanego w Równ. (4), oraz naturalnego działania

$$[\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda]. \quad : \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M)$$

$$: \quad \big(\gamma, \Phi_\lambda[\mu]\big) \longmapsto \lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\gamma](\cdot)}\big(\Phi_\lambda[\mu](\cdot)\big)$$

na przestrzeni odwzorowań G-ekwiwariantnych $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$, czyli działanie

$$\Phi_{\rm Ad}\lambda. \equiv [\Phi_{\rm Ad}\lambda]. \circ \big(\Phi_{\rm Ad}^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)}\big)$$

grupy $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$ czyni przemiennym poniższy diagram

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \arrow[r, "\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\cdot"] \arrow[d, "\Phi_{\rm Ad}\times\Phi_\lambda"'] & \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \arrow[d, "\Phi_\lambda"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G}) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M) \arrow[r, "\Phi_{\rm Ad}\lambda."'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)
\end{tikzcd} .$$

Dowód: Przede wszystkim upewnimy się, że odwzorowanie $\Phi_{\rm Ad}\lambda.$ jest dobrze określone. W tym celu wybieramy dowolną parę $(\Phi_{\rm Ad}[\gamma], \Phi_\lambda[\mu]) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G}) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$ i rozważamy wynik ewaluacji $\Phi_{\rm Ad}\lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\gamma]}(\Phi_\lambda[\mu])$ – musimy udowodnić, że ten jest G-ekwiwariantny, co czynimy w rachunku bezpośrednim, wykonanym dla dowolnych $(p, g) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\rm Ad}\lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\gamma]} \circ r_g^*\big(\Phi_\lambda[\mu]\big)(p) &= \lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\gamma]\circ r_g(p)}\big(\Phi_\lambda[\mu] \circ r_g(p)\big) = \lambda_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\Phi_{\rm Ad}[\gamma](p))} \circ \lambda_{g^{-1}}\big(\Phi_\lambda[\mu](p)\big) \\
&= \lambda_{g^{-1}}\big(\lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\gamma](p)}\big(\Phi_\lambda[\mu](p)\big)\big) \equiv \lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_{\rm Ad}\lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\gamma]}\big(\Phi_\lambda[\mu]\big)(p)\,.
\end{aligned}$$

To, że odwzorowanie $\Phi_{\rm Ad}\lambda.$ spełnia aksjomatykę działania, jest oczywiste. Pozostaje zatem zweryfikować jego ekwiwariantność. Dla dowolnych $\gamma = [(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\mu})] \in \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i $\phi = [(\sigma, \mu)] \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ oraz $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ obliczamy więc

$$\begin{aligned}
&\Phi_\lambda\big[\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\big](p) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \lambda_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
= \quad & \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
= \quad & \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, r_{\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
= \quad & \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))\cdot\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
= \quad & \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))\cdot\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p)} \circ \ell_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
= \quad & \lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\Phi_\lambda[\phi](p)\big) \\
= \quad & \Phi_{\rm Ad}\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot, \widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot))}(\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot))}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)(p) \\
\equiv \quad & \Phi_{\rm Ad}\lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\gamma]}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)(p)\,,
\end{aligned}$$

co jest rezultatem pożądanym. □

Dotychczasowe nasze rozważania ukazały $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ w roli wiązki grup działającej naturalnie na wiązce rozmaitości M z modelowym działaniem λ. Poniższe stwierdzenie istotnie pogłębia tę obserwację.

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i jego dowodu. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \quad &\cong \quad \{\ (\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, f) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \quad | \quad f = \mathrm{id}_B\ \} \\
&=: \quad \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\,.
\end{aligned}$$

Dowód: Zaczniemy od wskazania bijekcji między zbiorami $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$ i $\mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)$.

Wybierzmy (dowolnie) $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$ i zdefiniujmy odwzorowanie

$$\Psi[\gamma] \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft \;:\; p \longmapsto r_{\gamma(p)}(p)\,.$$

Jest ono jawnie G-ekwiwariantne,

$$\begin{aligned}\forall_{(p,g)\in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}} \;:\; \Psi[\gamma]\circ r_g(p) &\equiv r_{\gamma\circ r_g(p)}\big(r_g(p)\big) = r_g \circ r_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\gamma(p))}(p) = r_{\gamma(p)\cdot g}(p) \\ &= r_g \circ \Psi[\gamma](p)\,,\end{aligned}$$

i zachowuje włókna, a zatem definiuje automorfizm

$$\big(\Psi[\gamma], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\,.$$

Jest przy tym homomorfizmem grup, o czym przekonuje bezpośredni rachunek

$$\begin{aligned}\Psi\big[\widetilde{M}(\gamma_1,\gamma_2)\big](p) &= r_{\gamma_1(p)\cdot\gamma_2(p)}(p) \equiv r_{\gamma_2(p)\cdot \mathrm{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))}(p) \\ &= r_{\mathrm{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))} \circ r_{\gamma_2(p)}(p) = r_{\gamma_1(p\triangleleft\gamma_2(p))}\circ r_{\gamma_2(p)}(p) \\ &\equiv \Psi[\gamma_1]\circ\Psi[\gamma_2](p)\,,\end{aligned}$$

przeprowadzony dla dowolnych $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$. Na tym etapie wystarczy przywołać Stw. 5, aby uzyskać homomorfizm grup

$$\big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big)\circ \Phi_{\mathrm{Ad.}} \;:\; \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\,.$$

Idąc w kierunku odwrotnym, przyporządkujmy dowolnemu automorfizmowi $(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)$ odwzorowanie

$$\chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)] \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{G} \;:\; p \longmapsto \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi(p)\big)\,,$$

którego G-ekwiwariantności dowodzimy w odwołaniu do Stw. 5-6.1, a dla dowolnych $(p,g)\in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}\chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)]\circ r_g(p) &\equiv \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_g(p), \Phi\circ r_g(p)\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_g(p), r_g\circ\Phi(p)\big) \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi(p)\big)\big) \equiv \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)](p)\,.\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że otrzymane tym sposobem odwzorowanie

$$\chi \;:\; \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$$

jest homomorfizmem grup – w rzeczy samej, dla dowolnej pary automorfizmów $(\Phi_\alpha, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)$, $\alpha\in\{1,2\}$ obliczamy

$$\begin{aligned}\chi\big[(\Phi_1, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\circ(\Phi_2, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\big](p) &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_1\circ\Phi_2(p)\big) \\ &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi_1(p)\big)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1\circ\Phi_2(p)\big)\,,\end{aligned}$$

ale też

$$\begin{aligned}&\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1\circ\Phi_2(p)\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1\big(p\triangleleft\Phi_P\big(p,\Phi_2(p)\big)\big)\big) \\ &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1(p)\triangleleft\Phi_P\big(p,\Phi_2(p)\big)\big) = \Phi_P\big(p,\Phi_2(p)\big)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\begin{aligned}&\chi\big[(\Phi_1, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\circ(\Phi_2, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\big](p) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi_1(p)\big)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi_2(p)\big) \\ &\equiv \widetilde{M}\big(\chi\big[(\Phi_1, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\big], \chi\big[(\Phi_2, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\big]\big)(p)\,,\end{aligned}$$

zgodnie z oczekiwaniami. Ostatecznie otrzymujemy homomorfizm grup

$$S_{\mathrm{Ad.}}\circ\chi \;:\; \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,.$$

Ażeby stwierdzić, że jest to odwrotność wskazanego wcześniej homomorfizmu $\Psi \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}$, wystarczy sprawdzić, że χ jest odwrotnością automorfizmu $\big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big)$, co czynimy wprost licząc – dla dowolnych $(p, g, x) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \times B$ –

$$\begin{aligned}\big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big) \circ \chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)](p, g, x) &= \big(r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \Phi(p))}(p), g, x\big) = \big(\Phi(p), g, x\big) \\ &\equiv (\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)(p, g, x)\end{aligned}$$

oraz

$$\chi \circ \big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big)[\gamma](p) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, r_{\gamma(p)}(p)\big) = \gamma(p)\,.$$

□