METODY ALGEBRY I GEOMETRII WYŻSZEJ W FIZYCE II
W CZASACH ZARAZY
21. I 22. WYKŁAD ZDALNY
W SIECI POWIĄZAŃ GŁÓWNYCH

Dotychczasowe nasze rozważania, umotywowane koniec końców fizykalnie, doprowadziły nas do studium powiązania na wiązce włóknistej jako – w gruncie rzeczy – konstruktywnej odpowiedzi na pytanie o naturalne/użyteczne różniczkowanie jej cięć. W kontekście omówionej przez nas uniwersalnej zasady cechowania na pierwszy plan w tak zorientowanym studium wysuwa się konstrukcja powiązania na wiązce głównej, przy czym naturalnym jawi się rozpatrzenie warunków, w których powiązanie to jest zgodne z działaniem grupy strukturalnej we włóknie wiązki. Tym właśnie zajmiemy się obecnie.

Definicja 1. Powiązanie włókien w wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ nazywamy **zgodnym z działaniem grupy strukturalnej**, ilekroć dyfeomorfizmy

$$\mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}\,\gamma(t_1)} \xrightarrow{\cong} \mathsf{P}_{\mathrm{G}\,\gamma(t_2)}\,,\qquad t_1,t_2\in[0,1]$$

spełniają warunki

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2}\circ r_g{\restriction}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}\,\gamma(t_1)}} = r_g\circ\mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2}\,, \tag{1}$$

przy czym wtedy

$$\nabla_{\mathcal{V}}(r_g\circ\sigma)(x) = \mathsf{T}_{\sigma(x)}r_g\big(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x)\big)\,. \tag{2}$$

Powiązanie takie określamy również mianem **powiązania głównego włókien w wiązce** P_{G}.

Równie naturalnego pojęcia uzgodnienia struktur dostarcza

Definicja 2. Powiązanie Ehresmanna na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ nazywamy **zgodnym z działaniem grupy strukturalnej**, ilekroć odwzorowania $r_g,\ g\in\mathrm{G}$ spełniają warunek

$$\forall_{p\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\ :\ \mathsf{H}_{r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}} = \mathsf{T}_p r_g(\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,. \tag{3}$$

Powiązanie takie określamy również mianem **Ehresmanna powiązania głównego** na P_{G}.

Ażeby móc postąpić dalej w enumeracji naturalnych warunków uzgodnienia powiązania z działaniem grupy strukturalnej, potrzebujemy

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego grupy strukturalnej G wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$. Podwiązka pionowa VP_{G} wiązki stycznej TP_{G} nad przestrzenią totalną P_{G} jest trywialna w rozumieniu Przykł. 2-3-4.1 i istnieje kanoniczny izomorfizm wiązek wektorowych (nad $\mathbb{R}$)

$$(\mathsf{VP}_{\mathrm{G}}, \mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathbb{K}^{\times\dim\mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}{\restriction}_{\mathsf{VP}_{\mathrm{G}}}) \cong (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathfrak{g}, \mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathbb{K}^{\times\dim\mathrm{G}}, \mathrm{pr}_1)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy odwzorowanie (jawnie $\mathbb{R}$-liniowe i gładkie)

$$\widetilde{\mathrm{Vert}}.\quad :\quad \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathfrak{g} \xrightarrow{(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}},\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})} \mathsf{TP}_{\mathrm{G}}\times\mathfrak{g} \equiv \mathsf{T}_{(\cdot,e)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathsf{T}_{(\cdot,e)}r.} \mathsf{VP}_{\mathrm{G}}\subset\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}$$

$$:\quad (p,X)\longmapsto \big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p),X\big)\longmapsto \mathsf{T}_{(p,e)}r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p),X\big)\equiv\widetilde{\mathrm{Vert}}_p(X)\,, \tag{5}$$

w którego definicji wykorzystujemy zerowe cięcie $\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}$ wiązki wektorowej TP_{G} nad P_{G}. Przeciwdziedzina powyższego odwzorowania jest poprawnie określona, oto bowiem z uwagi na charakter działania definiującego $r.$ mamy

$$\mathsf{T}_p\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\widetilde{\mathrm{Vert}}_p(X)\big)\ \equiv\ \mathsf{T}_p\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\mathsf{T}_{(p,e)}r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p),X\big) = \mathsf{T}_{(p,e)}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ r.\big)\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p),X\big)$$

$$= \quad \mathsf{T}_{(p,e)}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_1\big)\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p), X\big) = \mathsf{T}_{(p,e)}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p)\big)$$

$$= \quad \mathbf{0}_{\mathsf{T}B} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\,,$$

czyli – w istocie – nad dowolnym punktem $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ zachodzi inkluzja

$$\mathrm{Im}\,\widetilde{\mathrm{Vert}}_p \subset \mathsf{V}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,,$$

a przy tym odwzorowanie $\widetilde{\mathrm{Vert}}.$ pokrywa identyczność na wspólnej bazie obu wiązek,

$$\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\widetilde{\mathrm{Vert}}_p(X)\big) = p \equiv \mathrm{pr}_1(p, X)\,,$$

mamy przeto do czynienia z morfizmem wiązek wektorowych nad P_{G}, a ponieważ obrazem pola (stałego) $(\cdot, X)$ jest pole fundamentalne na P_{G} stowarzyszone z $X \ni \mathfrak{g}$,

$$\mathsf{T}_{(\cdot,e)}r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(\cdot), X\big) = \mathcal{K}_X \tag{6}$$

co pokazuje poniższy rachunek, przeprowadzony dla dowolnej $f \in C^1(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathbb{R})$ w punkcie (dowolnym) $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$,

$$\mathsf{T}_{\cdot,e}r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(\cdot), X\big)(f)(p) = \mathsf{T}_{p,e}r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p), X\big) \lrcorner\, \mathsf{d}f(p)$$

$$= \quad \big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(p), X\big) \lrcorner\, \mathsf{d}(r.^*f)(p, e) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} f\big(p \triangleleft \exp(t \triangleright X)\big)\,,$$

więc też wobec swobodnego charakteru działania G na P_{G} otrzymujemy równoważność

$$\widetilde{\mathrm{Vert}}_p(X) = 0_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad X = 0_{\mathfrak{g}}\,,$$

czyli $\widetilde{\mathrm{Vert}}.$ jest monomorfizmem. Na podstawie porównania rzędów obu wiązek,

$$\mathrm{rk}\,(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim \mathrm{G} \equiv \dim \mathsf{P}_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} = \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_p\big(\mathsf{P}_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big) \equiv \mathrm{rk}\,\mathsf{VP}_{\mathrm{G}}\,,$$

wnioskujemy, że $\widetilde{\mathrm{Vert}}.$ jest w istocie postulowanym izomorfizmem. □

Powyższe przygotowuje nas do wysłowienia naturalnej adaptacji pojęcia formy powiązania z Def. 18-19.3 do obecnych okoliczności, jakie precyzuje

Definicja 3. **Forma powiązania głównego** na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to morfizm wiązek wektorowych nad $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{A}, \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}) \;:\; \mathsf{TP}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}$$

o własnościach

$$\mathcal{A} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}. = \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}}\,. \tag{7}$$

oraz

$$\forall_{g \in \mathrm{G}} \;:\; \mathcal{A} \circ \mathsf{T}r_g = (r_g \times \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}\,. \tag{8}$$

Wyznacza ona w naturalny sposób **potencjał powiązania głównego**

$$\underline{\mathcal{A}} \coloneqq \mathrm{pr}_2 \circ \mathcal{A} \in \Omega^1(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}\,.$$

Uwaga 1. Powyższe stwierdzenie pozwala przekonać się, że podwiązka pionowa jest automatycznie zachowywana przez $\mathsf{T}r_g$. Istotnie, dla dowolnego wektora $v \equiv\in \mathsf{V}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ będącego przeciwobrazem $X = \mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$ i dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ obliczamy

$$\mathsf{T}_p r_g(v) \quad = \quad \mathsf{T}_p r_g \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_p\big(X\big) \equiv \mathsf{T}_p r_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} p \triangleleft \exp(t \triangleright X)\big)$$

$$= \quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r_g\big(p \triangleleft \exp(t \triangleright X)\big) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r_g(p) \triangleleft \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\exp(t \triangleright X)\big)\,,$$

ale też w świetle Stw. 11 z Notatek do wykładu pt. „Teoria grup II w czasach Zarazy. 2-3-4-7. Lie to me, Cartan!” zachodzi tożsamość

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\exp(t \triangleright X)\big) = \exp\big(t \triangleright \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\big)\,,$$

możemy zatem powyższą równość przepisać w postaci

$$\mathsf{T}_p r_g(v) \quad = \quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r_g(p) \triangleleft \exp\big(t \triangleright \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)\big)$$

$$\equiv \quad \widetilde{\mathrm{Vert}}.\circ\big(r_g\times\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)\circ\widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v)\,,$$

skąd wniosek, że

$$\mathsf{T}_p r_g\restriction_{\mathsf{V}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}=\widetilde{\mathrm{Vert}}.\circ\big(r_g\times\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)\circ\widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}\,,\tag{9}$$

ten zaś dowodzi izomorficznego charakteru odwzorowania

$$\mathsf{T}_p r_g\restriction_{\mathsf{V}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\ :\ \mathsf{V}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathsf{V}_{r_g(p)}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,.$$

Możemy już teraz sformułować i udowodnić

Twierdzenie 1. W dowolnej wiązce głównej Ehresmanna powiązanie główne wyznacza powiązanie główne włókien. Ponadto forma powiązania głównego na tejże wiązce określa na niej Ehresmanna powiązanie główne.

Dowód: Wybrawszy dowolną ścieżkę $\gamma\ :\ [0,1]\longrightarrow B$ spełniającą warunki $\gamma(0)=x$ i $\dot\gamma(0)=X\in\mathsf{T}_xB$, a następnie – punkty: $p\in\mathsf{P}_x$ i $g\in\mathrm{G}$, podnosimy γ poziomo do P_{G} tworząc ścieżkę

$$\widetilde\gamma_p\ :\ [0,1]\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

całkującą zaganienie początkowe

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\widetilde\gamma_p(t)=\mathrm{Hor}_{\widetilde\gamma_p(t)}\big(\dot\gamma(t)\big)\,,\qquad\widetilde\gamma_p(0)=p\,,$$

gdzie Hor_q jest podniesieniem poziomym wektorów indukowanym przez powiązanie Ehresmanna wedle schematu opisanego w konstruktywnym dowodzie Tw. 18-19.2. Niech też $\widetilde\gamma_{r_g(p)}$ będzie podniesieniem poziomym γ do P_{G} przez $\widetilde\gamma_{r_g(p)}(0)=r_g(p)$. Obliczamy

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\,r_g\circ\widetilde\gamma_p(t)\quad=\quad\mathsf{T}_{\widetilde\gamma_p(t)}r_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\,\widetilde\gamma_p(t)\big)=\mathsf{T}_{\widetilde\gamma_p(t)}r_g\circ\mathrm{Hor}_{\widetilde\gamma_p(t)}\big(\dot\gamma(t)\big)=\mathrm{Hor}_{r_g\circ\widetilde\gamma_p(t)}\big(\dot\gamma(t)\big)\,,$$

przy czym ostatnia równość, odzwierciedlająca założoną zgodność powiązania Ehresmanna z działaniem grupy, pokazuje, że pchnięcie podniesienia (do p w $t=0$) pola stycznego do γ, czyli $\mathsf{T}_{\widetilde\gamma_p(t)}r_g\circ\mathrm{Hor}_{\widetilde\gamma_p(t)}(\dot\gamma(t))$, jest także polem poziomym, czyli pewnym podniesieniem poziomym $\dot\gamma(t)$ (do $r_g\circ\widetilde\gamma_p(0)=r_g(p)$ w $t=0$). Krzywą całkową (lokalnie jedyną) poziomego podniesienia $\dot\gamma$ do TP_{G} przez $r_g(p)$ jest jednak – wprost z definicji – ścieżka $\widetilde\gamma_{r_g(p)}$, zatem nieodzownie

$$\widetilde\gamma_{r_g(p)}=r_g\circ\widetilde\gamma_p\,,$$

a to w świetle konstrukcji dyfeomorfizmu $\mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2}$ oznacza pożądaną jego G-ekwiwariantność, (1).

Przechodząc do drugiej części tezy dowodzonego twierdzenia, zauważamy, że forma powiązania głównego definiuje – w świetle Tw. 18-19.1 – podwiązkę wektorową

$$\mathsf{HP}_{\mathrm{G}}\coloneqq\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A},\mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})\subset\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}\,.\tag{10}$$

Przy tym dla dowolnego $v\in\mathrm{Ker}\,(\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})\equiv\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})\cap\mathrm{Ker}\,(\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}v\quad&=\quad\widetilde{\mathrm{Vert}}.\circ\widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v)\equiv\widetilde{\mathrm{Vert}}.\circ\mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathfrak{g}}\circ\widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v)=\widetilde{\mathrm{Vert}}.\circ(\mathcal{A}\circ\widetilde{\mathrm{Vert}}.)\circ\widetilde{\mathrm{Vert}}_p^{-1}(v)\\&=\quad\widetilde{\mathrm{Vert}}.\circ\mathcal{A}(v)=0_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\,,\end{aligned}$$

co przesądza o injektywności $\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}$ i (tym samym) dowodzi istnienia izomorfizmu

$$\mathrm{Im}\big(\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big)\cong\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,.$$

Zarazem dla $\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathfrak{g})$ jest spełniona równość

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Ker}\big(\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big)\quad&=\quad\dim_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}-\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big)\\&=\quad\dim_{\mathbb{R}}\mathsf{V}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}+\dim_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}B-\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}=\dim_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}B\,,\end{aligned}$$

co oznacza, że $\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}$ jest w istocie izomorfizmem. Na koniec przekonamy się o G-niezmienniczości tak określonej podwiązki poziomej. Niech zatem $\xi\in\mathsf{H}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\equiv\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}\restriction_{\mathsf{T}_p\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$, a wtedy

$$\mathcal{A}\circ\mathsf{T}_p r_g(\xi)=\big(r_g\times\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)\circ\mathcal{A}(\xi)=\big(r_g(p),\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(0_{\mathfrak{g}})\big)=\big(r_g(p),0_{\mathfrak{g}}\big)\,,$$

więc prawdziwą jest inkluzja

$$\mathsf{T}_p r_g\big(\mathsf{H}_p \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big) \subset \mathsf{H}_{r_g(p)} \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,,$$

ale też w takim razie – wobec odwracalności $\mathsf{T}_p r_g$ –

$$\mathsf{T}_{r_g(p)} r_{g^{-1}}\big(\mathsf{H}_{r_g(p)} \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big) \subset \mathsf{H}_{r_g^{-1} \circ r_g(p)} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} = \mathsf{H}_p \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,,$$

czyli

$$\mathsf{H}_{r_g(p)} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathsf{T}_p r_g \circ \mathsf{T}_{r_g(p)} r_{g^{-1}}\big(\mathsf{H}_{r_g(p)} \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big) \subset \mathsf{T}_p r_g\big(\mathsf{H}_p \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big)\,,$$

co koniec końców daje nam pożądaną równość

$$\mathsf{T}_p r_g\big(\mathsf{H}_p \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big) = \mathsf{H}_{r_g(p)} \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,.$$

□

Odpowiedzi na fundamentalne pytanie o istnienie powiązania uzgodnionego dostarcza

Twierdzenie 2. Na dowolnej wiązce głównej istnieje forma powiązania głównego.

Dowód: Niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G},\ i \in I$. Wykorzystując relacje

$$\mathsf{T}_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times \mathrm{G}) \equiv \mathsf{T}_x \mathcal{O}_i \oplus \mathsf{T}_g \mathrm{G} \equiv \mathsf{T}_x \mathcal{O}_i \oplus \mathsf{T}_e \ell_g(\mathfrak{g})\,,$$

nad każdym z elementów pokrycia trywializującego $\mathcal{O}_i$ definiujemy odwzorowanie

$$\mathcal{A}_i\ :\ \mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathfrak{g}\ :\ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V) \longmapsto \big(\tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_g \ell_{g^{-1}}(V)\big)\,,$$

jawnie $\mathbb{R}$-liniowe i zachowujące włókna. Sprawdzamy, że odwzorowania te mają własności wymienione w Def. 3. Po pierwsze więc, korzystając z przemienności diagramu

$$\begin{tikzcd} \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathrm{G} \arrow[r, "r."] \arrow[d, "\tau_i \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\ \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{id}_B \times m"'] & \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \end{tikzcd}$$

oraz Równ. (3.4), obliczamy – dla dowolnego wektora $X \in \mathfrak{g}$ –

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x,g)}(X) \equiv \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)} r.\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X\big) \\ = \ & \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)}(\tau_i \circ r.)\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X\big) \\ = \ & \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_{(x,g,e)}(\mathrm{id}_B \times m) \circ \mathsf{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)}(\tau_i \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})\big(\mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X\big) \\ = \ & \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ (\mathsf{T}_x \mathrm{id}_B \oplus \mathsf{T}_{(g,e)} m)\big(\mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i \circ \mathbf{0}_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_e \mathrm{id}_{\mathrm{G}}(X)\big) \\ = \ & \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathsf{T}_x B} \oplus \mathsf{T}_{(g,e)} m)\big(0_{\mathsf{T}_x B}, 0_{\mathsf{T}_g \mathrm{G}}, \mathrm{id}_{\mathsf{T}_e \mathrm{G}}(X)\big) \\ \equiv \ & \big(\tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_{(g,e)} m(0_{\mathsf{T}_g \mathrm{G}}, X)\big) = \big(\tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_e \ell_g(X)\big) \\ = \ & \big(\tau_i^{-1}(x,g), X\big) \equiv \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathfrak{g}}\big(\tau_i^{-1}(x,g), X\big)\,. \end{aligned}$$

Po drugie w dotychczasowych oznaczeniach i dla dowolnego elementu $h \in \mathrm{G}$, a w odwołaniu do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "r_h"] & \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \arrow[u, "\tau_i^{-1}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_B \times \wp_h"'] & \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \arrow[u, "\tau_i^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

sprawdzamy warunek G-ekwiwariantności $\mathcal{A}_i$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}r_h \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1}(v,V) = \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,gh)}\tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}(\mathrm{id}_B \times \wp_h)(v,V) \\ = \ & \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,gh)}\tau_i^{-1} \circ (\mathsf{T}_x\mathrm{id}_B \oplus \mathsf{T}_g\wp_h)(v,V) \\ = \ & \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,gh)}\tau_i^{-1}\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}_xB}(v), \mathsf{T}_g\wp_h(V)\big) \equiv \big(\tau_i^{-1}(x,gh), \mathsf{T}_{gh}\ell_{(gh)^{-1}} \circ \mathsf{T}_g\wp_h(V)\big) \\ = \ & \big(r_h \circ \tau_i^{-1}(x,g), \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}(V)\big) \\ \equiv \ & \big(r_h \times \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big) \circ \mathcal{A}_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1}(v,V)\,. \end{aligned}$$

W świetle powyższych wyników $\mathcal{A}_i$ tworzą rodzinę lokalnych form powiązania głównego. Wykorzystując dowolny rozkład jedności $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ (klasy C^∞) stowarzyszony z pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B, tworzymy z nich formę określoną (i gładką) globalnie

$$\mathcal{A}(\cdot) \coloneqq \sum_{i\in I} \lambda_i \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \pi_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}(\cdot) \triangleright \mathcal{A}_i(\cdot)\,,$$

o pożądanych własnościach. □

Wysłowiwszy kilka powiązanych wzajemnie definicji uzgodnienia struktur na wiązce głównej i zbadawszy zagadnienie istnienia (formy) powiązania głównego, możemy uzupełnić dotychczasową dyskusję o wskazanie podklasy morfizmów zachowujących to ostatnie.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Def. 1, 2 oraz 3 i niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha, B_\alpha, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą wiązkami głównymi z powiązaniem włókien. **Morfizm wiązek głównych z powiązaniem głównym włókien** $(\Phi, f, \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ (**nad dyfeomorfizmem baz i identycznością na grupie strukturalnej**) pomiędzy $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1$ i $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2$ to morfizm wiązek włóknistych opisany przez diagram przemienny (5-6.1) dodatkowo spełniający warunek (FCM1) z Def. 18-19.4. Ilekroć na obu wiązkach określone jest Ehresmanna powiązanie główne, mianem **morfizmu wiązek głównych z Ehresmanna powiązaniem głównym** określamy morfizm wiązek głównych (opisany, jak poprzednio, przez diagram przemienny (5-6.1)), który dodatkowo spełnia warunek (FCM2) z Def. 18-19.4. Wreszcie też w obecności form powiązania głównego na obu wiązkach mówimy o **morfizmie wiązek głównych z formą powiązania głównego** (lub **zachowującym formę powiązania głównego**), jeśli morfizm $(\Phi, f, \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ jest opisany, jak poprzednio, przez diagram przemienny (5-6.1), a nadto spełniony jest warunek

(PFCM3') morfizm Φ zachowuje formę powiązania głównego w rozumieniu równości

$$\mathcal{A}_2 \circ \mathsf{T}\Phi = (\Phi \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1\,.$$

W następnej kolejności przechodzimy do nader istotnego z fizycznego punktu widzenia opisu lokalnego powiązania uzgodnionego. Zaczynamy od pomocniczego

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj ∇ będzie pochodną kowariantną na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ stowarzyszoną z formą powiązania głównego. Odwzorowania α_i, $i \in I$ o definicji (18-19.8) są $C^\infty(B,\mathrm{G})$-ekwiwariantne w drugim argumencie, tj. dla dowolnych:

odwzorowania $g \in C^\infty(B, \mathrm{G})$ oraz cięcia $\sigma \in \Gamma_{\rm loc}(\mathsf{P}_{\rm G})$ przyjmującego postać $\tau_i \circ \sigma(\cdot) = (\cdot, \sigma_i(\cdot))$ w obrazie trywializacji lokalnej $\tau_i \ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ zachodzi

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_i}\ :\ \alpha_i\big(x, r_{g(x)}\big(\sigma(x)\big)\big) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\wp_{g(x)}\big) \circ \alpha_i\big(x, \sigma(x)\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Kluczowym dla naszych rozważań okaże się związek między pochodną kowariantną a formą powiązania głównego. Biorąc pod uwagę to, że rzut na podprzestrzeń wertykalną wzdłuż przestrzeni horyzontalnej w wiązce z powiązaniem Ehresmanna jest dany wzorem

$$P^{\mathsf{H}_p \mathsf{P}_{\rm G}}{}_{\mathsf{V}_p \mathsf{P}_{\rm G}} \equiv \mathrm{id}_{\mathsf{T}_p \mathsf{P}_{\rm G}} - \mathrm{Hor}_p \circ \mathsf{T}_p \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\,,$$

oraz Równ. (18-19.4), możemy ustalić – dla dowolnego cięcia σ jak w treści stwierdzenia oraz dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V} \in \Gamma_{(\rm loc)}(\mathsf{T}B)$ – związek

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\cdot) &= \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V}) - \mathrm{Hor}_{\sigma(\cdot)}(\mathcal{V}) = \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V}) - \mathrm{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ \mathsf{T}.\mathrm{id}_B(\mathcal{V}) \\ &= \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V}) - \mathrm{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ \mathsf{T}.(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}} \circ \sigma)(\mathcal{V}) \equiv P^{\mathsf{H}_{\sigma(\cdot)}\mathsf{P}_{\rm G}}{}_{\mathsf{V}_{\sigma(\cdot)}\mathsf{P}_{\rm G}} \circ \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V})\,. \end{aligned}$$

W połączeniu z identyfikacją, z dowodu Tw. 18-19.3, podwiązki horyzontalnej indykowanej przez formę powiązania oraz Stw. 1 daje nam to przydatną równość

$$\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\cdot) = \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(\cdot)} \circ \mathcal{A} \circ \mathsf{T}.\sigma(\mathcal{V})\,. \tag{11}$$

Ta pozwala zapisać – w odwołaniu do szczegółowego rachunku przedstawionego w treści Uwagi 18-19.2 –

$$\begin{aligned} &\mathsf{T}_x\big(\wp_{g(\cdot)}\big(\sigma_i(\cdot)\big)\big)(V) + V \lrcorner\, \alpha_i\big(x, r_{g(x)}\big(\sigma(x)\big)\big) \\ \equiv\ & \varpi_i \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i\big(\nabla_{\mathcal{V}} r_{(\cdot)}\big(\sigma(\cdot)\big)(x)\big) \\ =\ & \varpi_i \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A} \circ \mathsf{T}_x\big(r_{(\cdot)}\big(\sigma(\cdot)\big)\big)(V) \\ =\ & \varpi_i \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ \mathsf{T}_x\sigma(V) \\ & +\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\rm R}^A\big)(x)\, R_A\big(r.\big(\sigma(x)\big)\big)\big(g(x)\big)\big)\,, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej linijce mamy do czynienia z pochodną odwzorowania $r.\big(\sigma(x)\big)\ :\ \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G}$ w kierunku pola prawoniezmienniczego R_A. Pochodną tę obliczamy bezpośrednio,

$$\begin{aligned} & R_A\big(r.\big(\sigma(x)\big)\big)\big(g(x)\big) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r.\big(\sigma(x)\big)\big(\exp(t \triangleright t_A) \cdot g(x)\big) \\ =\ & \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r_{g(x)} \circ r_{\exp(t\triangleright t_A)}\big(\sigma(x)\big) = \mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} r_{\exp(t\triangleright t_A)}\big(\sigma(x)\big)\big) \\ \equiv\ & \mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)}\big(\mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big)\,, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{K}_{t_A}$ jest polem wektorowym fundamentalnym (prawostronnym) na $\mathsf{P}_{\rm G}$ stowarzyszonym z generatorem t_A algebry Liego $\mathfrak{g}$. Podstawiając powyższy wynik do naszego wcześniejszego rachunku, a następnie wykorzystując tożsamości (8) oraz (9), otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\mathsf{T}_x\big(\wp_{g(\cdot)}\big(\sigma_i(\cdot)\big)\big)(V) + V \lrcorner\, \alpha_i\big(x, r_{g(x)}\big(\sigma(x)\big)\big) \\ \equiv\ & \varpi_i \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i\big(\nabla_{\mathcal{V}} r_{(\cdot)}\big(\sigma(\cdot)\big)(x)\big) \\ =\ & \varpi_i \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ \mathsf{T}_x\sigma(V) \\ & +\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\rm R}^A\big)(x)\, \mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)}\big(\mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big)\big) \\ =\ & \varpi_i \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A} \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) \\ & +\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\rm R}^A\big)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varpi_i \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \big(r_{g(x)} \times \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g(x)^{-1}}\big) \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) \\
&\quad +\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\mathrm{R}}^A\big)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
&= \varpi_i \circ \mathsf{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}r_{g(x)} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) \\
&\quad +\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\mathrm{R}}^A\big)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
&= \varpi_i \circ \mathsf{T}_{\tau_i\circ\sigma(x)}\big(\mathrm{id}_B \times \wp_{g(x)}\big) \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) \\
&\quad +\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\mathrm{R}}^A\big)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
&= \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\wp_{g(x)} \circ \varpi_i \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}\big(\mathsf{T}_x\sigma(V) \\
&\quad +\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\mathrm{R}}^A\big)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
&\equiv \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\sigma_i(V) + V \lrcorner\, \alpha_i\big(x,\sigma(x)\big) \\
&\quad +\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\mathrm{R}}^A\big)(x) \triangleright \varpi_i \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big)\big)\,.
\end{aligned}$$

Jeśli teraz uwzględnić pionową naturę pól fundamentalnych $\mathcal{K}_A$ (wynikającą z charakteru działania definiującego $r.$), to można powyższe przepisać w postaci

$$\begin{aligned}
&\mathsf{T}_x\big(\wp_{g(\cdot)}\big(\sigma_i(\cdot)\big)\big)(V) + V \lrcorner\, \alpha_i\big(x, r_{g(x)}\big(\sigma(x)\big)\big) \\
&= \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\sigma_i(V) + V \lrcorner\, \alpha_i\big(x,\sigma(x)\big) \\
&+\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\mathrm{R}}^A\big)(x) \triangleright \varpi_i \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \big(\mathcal{A} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)}\big) \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)}^{-1}\big(\mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big)\big)\big) \\
&= \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\wp_{g(x)}\big(\mathsf{T}_x\sigma_i(V) + V \lrcorner\, \alpha_i\big(x,\sigma(x)\big) \\
&\quad +\big(\mathcal{V} \lrcorner\, g^*\theta_{\mathrm{R}}^A\big)(x) \triangleright \varpi_i \circ \mathsf{T}_{\sigma(x)}\tau_i\big(\mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma(x)\big)\big)\big)\,,
\end{aligned}$$

a stąd już wprost wynika pożądana równość

$$V \lrcorner\, \alpha_i\big(x, r_{g(x)}\big(\sigma(x)\big)\big) = \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\wp_{g(x)}\big(V \lrcorner\, \alpha_i\big(x,\sigma(x)\big)\big)\,.$$

□

Powyższe prowadzi nas wprost do

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 3 i niechaj $\tau_i : \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$, $i \in I$ będą trywializacjami lokalnymi wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$. Zdefiniujmy

$$s_{(i)} \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \;:\; x \longmapsto \tau_i^{-1}(x,e)\,.$$

Potencjał lokalny powiązania głównego $\mathcal{A}$ na wiązce głównej P_{G} nad $\mathcal{O}_i$ (stowarzyszony z cięciami $s_{(i)}$) to odwzorowanie (klasy C^∞)

$$\mathsf{A}_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

przyjmujące w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_i$ postać[1]

$$\mathsf{A}_i(x) := \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}\big) \circ \mathsf{T}_x s_{(i)}\,. \tag{12}$$

[1]Odwzorowanie $\mathsf{T}_x s_{(i)} \;:\; \mathsf{T}_x\mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{T}_{s_{(i)}(x)}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ traktujemy tu jako element przestrzeni $\mathsf{T}_x^*\mathcal{O}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{s_{(i)}(x)}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$.

Uwaga 2. Na podstawie relacji (11) między pochodną kowariantną a formą powiązania głównego oraz treści Stw. 2, a w odwołaniu do tych samych obserwacji co w dowodzie Stw. 2 oraz do Równ. (6) wyprowadzamy (w użytych wcześniej oznaczeniach) dla cięcia

$$\sigma(x) = \tau_i^{-1}\big(x, \sigma_i(x)\big) = r_{\sigma_i(x)}\big(\tau_i^{-1}(x,e)\big) \equiv r_{\sigma_i(x)}\big(s_{(i)}(x)\big)$$

związek

$$\begin{aligned}
& \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)}^{-1}\big)\big(\nabla.\sigma(x)\big) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}\big) \circ \mathsf{T}_x\sigma \\
\equiv\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}\big) \circ \mathsf{T}_x\big(r_{\sigma_i(\cdot)}\big(s_{(i)}(\cdot)\big)\big) \\
=\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{s_{(i)}(x)} r_{\sigma_i(x)}\big) \circ \big(\mathsf{T}_x s_{(i)} + \sigma_i^*\theta_{\mathrm{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}\big(s_{(i)}(x)\big)\big) \\
=\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}\big) \circ \big(\mathsf{T}_x s_{(i)} + \sigma_i^*\theta_{\mathrm{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}\big(s_{(i)}(x)\big)\big) \\
=\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}\big) \circ \big(\mathsf{A}_i(x) \\
& + \sigma_i^*\theta_{\mathrm{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{pr}_2 \circ \big(\mathcal{A} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{s_i(x)}\big) \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{s_i(x)}^{-1}\big(\mathcal{K}_{t_A}\big(s_{(i)}(x)\big)\big)\big) \\
=\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}\big) \circ \big(\mathsf{A}_i(x) + \sigma_i^*\theta_{\mathrm{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{pr}_2\big(s_{(i)}(x), t_A\big)\big) \\
\equiv\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}\big) \circ \big(\mathsf{A}_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}}(x)\big) \\
=\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)\,,
\end{aligned}$$

przy czym w ostatnim przejściu skorzystaliśmy ze Stw. 13 z Notatek do wykładu pt. „Teoria grup II w czasach Zarazy. 2-3-4-7. Lie to me, Cartan!".

Relację pomiędzy potencjałami lokalnymi ustala

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. W dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ należącym do przecięcia dziedzin trywializacji lokalnych τ_i i τ_j wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ o odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$ zachodzi tożsamość

$$\mathsf{A}_j(x) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\big)\mathsf{A}_i(x) + (g_{ij}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L(x)\,.$$

Dowód: Wystarczy zauważyć, że

$$s_{(j)}(x) \quad\equiv\quad \tau_j^{-1}(x,e) = \tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x)\big) = r_{g_{ij}(x)}\big(\tau_i^{-1}(x,e)\big) \equiv r_{g_{ij}(x)}\big(s_{(i)}(x)\big)\,,$$

a następnie przeprowadzić rachunek analogiczny do tego z Uwagi 2. □

Tak przygotowani możemy wreszcie omówić szczegółowo strukturę formy powiązania głównego w obrazie trywializacji lokalnej.

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 5. W obrazie trywializacji lokalnej $\tau_i : \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ forma powiązania głównego wyraża się przez potencjał tegoż powiązania, jak następuje:

$$\underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1} = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i(x) + \theta_{\mathrm{L}}(g)\,,$$

przy czym obiekt po prawej stronie znaku równości należy traktować jako wektor z przestrzeni $\mathsf{T}^*_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times \mathrm{G}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \equiv (\mathsf{T}^*_x B \oplus \mathsf{T}^*_g \mathrm{G}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ w dowolnym punkcie $(x,g) \in \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$.

Dowód: Uwzględniając powyższy rozkład przestrzeni $\mathsf{T}^*_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times \mathrm{G})$, możemy zawsze zapisać

(13) $$\underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1} = a_i(x;g) + \vartheta_i(g;x)\,,$$

gdzie $a_i(x;g) \in \mathsf{T}^*_x B \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ oraz $\vartheta_i(g;x) \in \mathsf{T}^*_g \mathrm{G} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ są 1-formami o własnościach

$$\forall_{(v,V) \in \mathsf{T}_x B \oplus \mathsf{T}_g \mathrm{G}} \ :\ V \lrcorner\, a_i(x;g) = 0_{\mathfrak{g}} = v \lrcorner\, \vartheta_i(g;x)\,.$$

Rozłożywszy 1-formę $\vartheta_i(g;x)$ w bazie utworzonej przez formy lewo niezmiennicze,

$$\vartheta_i(g;x) =: \vartheta^B_{i\,A}(x,g) \triangleright \theta^A_{\mathrm{L}}(g) \otimes_{\mathbb{R}} t_B\,,$$

obliczamy najpierw obie strony Równ. (13) na wektorze pionowym $(0_{\mathsf{T}_xB}, L_A(g))$, dostając – w odwołaniu do definicji (5) i Równ. (6), jak również Równ. (7) –

$$\vartheta^B_{i\,A}(x,g) \triangleright t_A = L_A(g) \lrcorner\, \vartheta_i(g;x) = \big(0_{\mathsf{T}_xB}, L_A(g)\big) \lrcorner \big(a_i(x;g) + \vartheta_i(g;x)\big)$$

$$= \quad \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1}\big(0_{\mathsf{T}_xB}, L_A(g)\big) = \underline{\mathcal{A}}\big(\mathcal{K}_{t_A}\big(\tau_i^{-1}(x,g)\big)\big)$$

$$= \quad \underline{\mathcal{A}} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x,g)}(t_A) = \mathrm{pr}_2\big(\tau_i^{-1}(x,g), t_A\big) = t_A\,.$$

Wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\vartheta_i(g;x) \equiv \theta_{\mathrm{L}}(g)\,.$$

W następnej kolejności w miejsce wektora pionowego wstawiamy $(v, 0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}})$ i wykorzystujemy tożsamość

$$\mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1}(v, 0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}}) = \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_{(x,e)}(\mathrm{id}_B \times \wp_g)(v, 0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}})$$

$$= \quad \mathsf{T}_{(x,e)}\big(\tau_i^{-1} \circ (\mathrm{id}_B \times \wp_g)\big)(v, 0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}}) = \mathsf{T}_{(x,e)}\big(r_g \circ \tau_i^{-1}\big)(v, 0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}})$$

$$= \quad \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)}r_g \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1}(v, 0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}}) \equiv \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)}r_g \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_x(\cdot, e)(v)$$

$$= \quad \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)}r_g \circ \mathsf{T}_x\big(\tau_i^{-1} \circ (\cdot, e)\big)(v) = \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)}r_g \circ \mathsf{T}_x s_{(i)}(v)$$

która pozwala (dzięki Równ. (8)) zastosować bezpośrednio definicję (12) potencjału powiązania głównego i tym sposobem otrzymać

$$v \lrcorner\, a_i(x;g) = (v, 0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}}) \lrcorner \big(a_i(x;g) + \vartheta_i(g;x)\big) = \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)}\tau_i^{-1}(v, 0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}})$$

$$= \quad = \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)}r_g \circ \mathsf{T}_x s_{(i)}(v) = \mathrm{pr}_2 \circ \big(r_r \times \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathcal{A} \circ \mathsf{T}_x s_{(i)}(v)$$

$$= \quad \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_x s_{(i)}(v) \equiv \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \big(v \lrcorner\, \mathsf{A}_i(x)\big)\,,$$

więc też – wobec dowolności v –

$$a_i(x;g) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i(x)\,.$$

Ostatecznie zatem odtwarzamy postulowaną prezentację lokalną formy powiązania głównego. □

Tym sposobem docieramy do podstawowego rezultatu naszej analizy, jakim jest uogólnienie twierdzenia o rekonstrukcji wiązki (głównej) na podstawie jej danych lokalnych na przypadek wiązki głównej z powiązaniem uzgodnionym.

Twierdzenie 3 (O rekonstrukcji wiązki głównej z powiązaniem)**.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Każda wiązka główna $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ z formą powiązania głównego wyznacza nad swym pokryciem trywializującym[2] $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$

- rodzinę $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathcal{O}}}$ odwzorowań lokalnie gładkich

  $$g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$$

  spełniających warunek 1-kocyklu (2-3-4.1);
- rodzinę $\{\mathsf{A}_i\}_{i\in I}$ lokalnie gładkich 1-form o wartościach w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G

  $$\mathsf{A}_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

  spełniających warunki

  $$\forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathcal{O}},\ x\in\mathcal{O}_{ij}} \;:\; \mathsf{A}_j(x) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\big) \circ \mathsf{A}_i(x) + (g^*_{ij} \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L(x)\,.$$

[2] Nie zakładamy, że pokrycie to jest dobre.

I odwrotnie, niechaj $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ będzie pokryciem otwartym rozmaitości gładkiej B. Dowolna stowarzyszona z $\mathscr{O}$ para rodzin odwzorowań lokalnie gładkich

$$\big(\{g_{ij}\}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}}, \{\mathsf{A}_k\}_{k\in I}\big)$$

spełniających powyższe warunki określa – zgodnie z (konstruktywnym dowodem) Tw. 2-3-4.2 – wiązkę główną $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} = (\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G}))/_{g_{\cdot\cdot}}$ o grupie strukturalnej G i o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z $\mathcal{O}_{ij}$ tożsamych z g_{ij}, $(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}$ oraz formie powiązania głównego zadawanej formułą

$$\mathcal{A}(v,V) := \big(x, g, v \lrcorner \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B}\otimes\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)\circ\mathsf{A}_i(x) + V \lrcorner\, \theta_L(g)\big)\,,\quad (x,g)\in\mathcal{O}_i\times\mathrm{G}\,, \tag{14}$$

zapisaną dla dowolnego wektora $(v,V)\in\mathsf{T}_x\mathcal{O}_i\oplus\mathsf{T}_g\mathrm{G}\equiv\mathsf{T}_{(x,g)}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})$. Ilekroć odwzorowania te są danymi lokalnymi pewnej wiązki głównej nad B o włóknie typowym G, ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez g_{ij} i A_i.

<u>*Dowód:*</u> Pierwsza część tezy wynika wprost z wcześniejszej analizy oraz z Tw. 2-3-4.2. Trzeba jeszcze tylko określić stosowne działanie grupy strukturalnej G na włóknach wiązki zrekonstruowanej według schematu przedstawionego w dowodzie Tw. 2-3-4.2,

$$\mathsf{P}_{\mathrm{G}} = \big(\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})\big)/_{g_{\cdot\cdot}}\,.$$

Definiujemy odwzorowanie

$$r_{\cdot}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ :\ \big([(x,g,i)],h\big)\longmapsto[(x,g\cdot h,i)]\,,$$

którego gładkość jest konsekwencją surjektywnej submersywności odwzorowania $\pi_\sim$ zadanego analogicznie jak to z dowodu Tw. 2-3-4.2 oraz Stw. Niezb.10 – istotnie, $r_{\cdot}$ jest (jedynym) odwzorowaniem domykającym diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \\
\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})\times\mathrm{G} \arrow[ur, "\pi_\sim\circ\widetilde{R}_{\cdot}"] \arrow[r, two heads, "\pi_\sim\times\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G} \arrow[u, "r_{\cdot}"']
\end{tikzcd}\ ,\ ,$$

w którym

$$\widetilde{R}_{\cdot}\ :\ \bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})\times\mathrm{G}\longrightarrow\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times\mathrm{G})\ :\ \big((x,g,i),h\big)\longmapsto\big(x,g\cdot h,i\big)$$

jest jawnie gładkie.

Na obecnym etapie pozostaje jedynie upewnić się, że zrekonstruowana z danych lokalnych forma powiązania jest obiektem globalnie gładkim (klasy C^∞) o własnościach opisanych w Def. 3. Zasadniczo wniosek taki daje się prosto wyprowadzić ze Stw. 4, niemniej jednak my mozolnie sprawdzimy wszystkie własności. Mamy zatem do porównania, w dowolnym punkcie $x\in\mathcal{O}_{ij}$, wynik ewaluacji na dowolnym wektorze $(v,V)\in\mathsf{T}_x\mathcal{O}_i\oplus\mathsf{T}_g\mathrm{G}$ 1-formy $\mathcal{A}$ wyrażonej w terminach potencjału lokalnego A_i z wynikiem ewaluacji na obrazie tegoż wektora względem odwzorowania stycznego do transformacji przejścia $(x,g)\longmapsto(x,g_{ji}(x)\cdot g)$ 1-formy $\mathcal{A}$ wyrażonej w terminach potencjału lokalnego A_j. Przy tym zamiast pchać (v,V) wzdłuż odwzorowania przejścia, moglibyśmy równoważnie cofnąć wzdłuż tegoż odwzorowania 1-formę A_j, a następnie obliczyć ją na (v,V). Wystarczy zatem porównać wynik cofnięcia 1-formy $\mathcal{A}$ zapisanej przy użyciu potencjału A_j z tą samą 1-formą wyrażoną w terminach potencjału A_i, co czyniąc w odwołaniu do Stw. 3 oraz do Stw. 17 oraz 13 z Notatek do wykładu pt. „Teoria grup II w czasach Zarazy. 2-3-4-7. Lie to me, Cartan!", otrzymujemy pożądany wynik:

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B}\otimes\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{(g_{ji}(x)\cdot g)^{-1}}\big)\circ\mathsf{A}_j(x)+\theta_{\mathrm{L}}\big(g_{ji}(x)\cdot g\big)\\
=\ &\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B}\otimes\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)\circ\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B}\otimes\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}\big)\circ\big(\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B}\otimes\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\big)\circ\mathsf{A}_i(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(g_{ij}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)\big) + \theta_{\mathrm{L}}(g) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x) \\
= \;& \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i(x) + \theta_{\mathrm{L}}(g) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x) \\
&+\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}\big) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ (\mathrm{Inv}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L(x) \\
= \;& \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i(x) + \theta_{\mathrm{L}}(g) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x) \\
&-\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}\big) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}}(x) \\
= \;& \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i(x) + \theta_{\mathrm{L}}(g) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x) \\
&-\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\big) \\
&\circ(g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \theta_{\mathrm{L}}(x) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i(x) + \theta_{\mathrm{L}}(g)\,.
\end{aligned}
$$

Drugą z oczekiwanych własności, Równ. (7), sprawdzamy w bezpośrednim odwołaniu do Równ. (6), zauważając na wstępie, że postać (włókna) wiązki odtworzonej z danych lokalnych w konstruktywnym dowodzie Tw. 1.4 prowadzi do utożsamienia $\mathcal{K}_X(x,g) \equiv \big(0_{\mathsf{T}_xB}, L_X(g)\big)$ w dziedzinie $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ni (x,g)$ trywializacji lokalnej wiązki zrekonstruowanej P_{G}. W obrazie tejże trywializacji otrzymujemy więc – dla dowolnego wektora $X \in \mathfrak{g}$ – równość

$$\mathcal{A} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{(x,g)}(X) \equiv \mathcal{A}\big(0_{\mathsf{T}_xB}, L_X(g)\big) = \big(x, g, L_X \lrcorner\, \theta_L(g)\big) \equiv (x,g,X)\,.$$

Na koniec wreszcie upewniamy się o G-ekwiwariantności zapostulowanej formy powiązania głównego. W równości

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}(\mathrm{id}_B \times \wp_h)(v,V) = \mathcal{A} \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}B} \oplus \mathsf{T}_g\wp_h\big)(v,V) \\
= \;& \big(x, g\cdot h, v \lrcorner \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{(g\cdot h)^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i(x) + \mathsf{T}_g\wp_h(V) \lrcorner\, \theta_L(g\cdot h)\big)\,,
\end{aligned}
$$

uwzględniamy więc raz jeszcze Stw. 13 z Notatek do wykładu pt. „Teoria grup II w czasach Zarazy. 2-3-4-7. Lie to me, Cartan!”, które pozwala przepisać

$$\mathsf{T}_g\wp_h(V) \lrcorner\, \theta_L(g\cdot h) = V \lrcorner\, (\wp_h^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(g) = V \lrcorner \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big) \circ \theta_{\mathrm{L}}(g)\,,$$

a zatem także

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}(\mathrm{id}_B \times \wp_h)(v,V) \;&=\; \big((\mathrm{id}_B \times \wp_h) \times \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big)\big)\big(x, g, \\
&\quad v \lrcorner \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i(x) + V \lrcorner\, \theta_L(g)\big) \\
&\equiv\; \big((\mathrm{id}_B \times \wp_h) \times \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big)\big) \circ \mathcal{A}(v,V)\,.
\end{aligned}
$$

□

Ten sam schemat możemy następnie zrealizować w odniesieniu do stosownych morfizmów.

Twierdzenie 4. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $(\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą dwiema wiązkami głównymi (o wspólnej grupie strukturalnej G) z formą powiązania głównego nad wspólną bazą B, o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi^{-1}_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, przy czym wprowadzamy dwie rodziny cięć lokalnych:

$$s^\alpha_{(i)} \coloneqq \tau_i^{\alpha\,-1}(\cdot, e) \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}\,, \quad \alpha \in \{1,2\}\,,$$

a wraz z nimi – odwzorowania przejścia $g^\alpha_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$, $\alpha \in \{1,2\}$ oraz 1-formy $\mathsf{A}^\alpha_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$, $\alpha \in \{1,2\}$ o wartościach w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G. Dowolny morfizm wiązek głównych zachowujący formę powiązania głownego,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd} ,$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i\in I}$ odwzorowań (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}\,, \quad i \in I$$

spełniających warunki: (5-6.2) oraz

$$\forall_{x\in\mathcal{O}_i} \ : \ \mathsf{A}^2_i(x) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\big) \circ \mathsf{A}^1_i(x) + \big((\mathrm{Inv} \circ h_i)^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)\theta_{\mathrm{L}}(x)\,. \tag{15}$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

<u>*Dowód:*</u> Po uwzględnieniu Tw. 5-6.2 pozostaje zweryfikować zapostulowaną formułę transformacyjną dla potencjału powiązania. W tym celu przywołujemy warunek (PFCM3') z Def. 4 i podstawiamy go do definicji (12) tegoż potencjału, wykorzystując prostą zależność

$$\tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)\big) = \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}(x,e)\big)\,,$$

którą przepisujemy w obecnej notacji jako

$$\Phi \circ s^1_{(i)}(x) = r_{h_i(x)}\big(s^2_{(i)}(x)\big)\,.$$

Otrzymujemy tym sposobem z jednej strony równość

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathsf{T}_{s^1_{(i)}(x)}\Phi\big) \circ \mathsf{T}_x s^1_{(i)} &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathrm{pr}_2 \circ (\Phi \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1\big) \circ \mathsf{T}_x s^1_{(i)} \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}_1\big) \circ \mathsf{T}_x s^1_{(i)} \equiv \mathsf{A}^1_i(x)\,, \end{aligned}$$

z drugiej zaś – w świetle szczegółowych rachunków z Uwagi 2 –

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathsf{T}_{s^1_{(i)}(x)}\Phi\big) \circ \mathsf{T}_x s^1_{(i)} &= (\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}_2) \circ \mathsf{T}_x\big(r_{h_i(\cdot)}\big(s^2_{(i)}(\cdot)\big)\big) \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}^2_i(x) + (h_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)\,. \end{aligned}$$

Zestawiwszy powyższe wyniki, uzyskujemy – w odwołaniu do Stw. 13 z Notatek do wykładu pt. „Teoria grup II w czasach Zarazy. 2-3-4-7. Lie to me, Cartan!" – oczekiwaną tożsamość,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^2_i(x) &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\big) \circ \mathsf{A}^1_i(x) - \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\big) \circ (h_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x) \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\big) \circ \mathsf{A}^1_i(x) - (h_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}}(x) \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)}\big) \circ \mathsf{A}^1_i(x) + \big((\mathrm{Inv} \circ h_i)^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)\theta_{\mathrm{R}}(x)\,. \end{aligned}$$

I odwrotnie, mając rodzinę $h_i \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$, $i \in I$ odwzorowań z treści dowodzonego stwierdzenia, określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i \quad : \quad \pi^{-1}_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \ : \ \tau_i^{1\,-1}(x,g) \longmapsto \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)\cdot g\big)\,, \quad i \in I\,.$$

Łatwo przekonujemy się, że są to w istocie ograniczenia odwzorowania globalnie gładkiego $\Phi \ : \ \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}$ do poszczególnych elementów pokrycia trywializującego, $\Phi\restriction_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$, oto bowiem w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ s^1_{(i)}(x) &= \Phi_j \circ \tau_j^{1\,-1}\big(x, g^1_{ji}(x)\big) = \tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)\cdot g^1_{ji}(x)\big) \\ &= \tau_j^{2\,-1}\big(x, g^2_{ji}(x)\cdot h_i(x)\big) = \tau_i^{1\,-1}\big(x, h_i(x)\big) \equiv \Phi_i \circ s^1_{(i)}(x)\,, \end{aligned}$$

a nadto odwzorowania Φ_i są G-ekwiwariantne, co sprawdzamy dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_i$ oraz $g, h \in \mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}\Phi_i \circ r_h^1 \circ \tau_i^{1\,-1}(x,g) &= \Phi_i \circ \tau_i^{1\,-1}(x, g\cdot h) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)\cdot g\cdot h\big) \\ &= r_h^2\big(\tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)\cdot g\big)\big) \equiv r_h^2 \circ \Phi_i \circ \tau_i^{1\,-1}(x,g)\,.\end{aligned}$$

Na zakończenie dowodu sprawdzamy warunek (PFCM3') z Def. 4. Czynimy to w obrazie trywializacji lokalnej τ_i, posiłkując się przy tym Stw. 4. Oto więc stwierdzamy równość

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathsf{T}\Phi \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{1\,-1}(x,g)}\tau_i^{1\,-1} &\equiv \big(\underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{2\,-1}(x,g)}\tau_i^{2\,-1}\big) \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{1\,-1}(x,g)}\big(\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1\,-1}\big) \\ &\equiv \big(\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1\,-1}\big)^*\big(\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\mathrm{Inv}\circ\mathrm{pr}_2(\cdot)}\big) \circ \mathrm{pr}_1^*\mathsf{A}_i^2 + \mathrm{pr}_2^*\theta_{\mathrm{L}}\big)(x,g) \\ &= \big(\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\mathrm{Inv}\circ\mathrm{pr}_2(\cdot)}\big) \circ \mathrm{pr}_1^*\mathsf{A}_i^2 + \mathrm{pr}_2^*\theta_{\mathrm{L}}\big)\big(x, h_i(x)\cdot g\big) \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{(h_i(x)\cdot g)^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i^2(x) + \theta_{\mathrm{L}}\big(h_i(x)\cdot g\big) \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i(x)^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i^2(x) + \theta_{\mathrm{L}}\big(h_i(x)\cdot g\big)\,,\end{aligned}$$

którą w świetle przyjętych założeń oraz Stw. 17 z Notatek do wykładu pt. „Teoria grup II w czasach Zarazy. 2-3-4-7. Lie to me, Cartan!" możemy przepisać w oczekiwanej postaci

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathsf{T}\Phi \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{1\,-1}(x,g)}\tau_i^{1\,-1} &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \big(\mathsf{A}_i^1(x) - (h_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x)\big) \\ &\quad + \theta_{\mathrm{L}}(g) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ (h_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}}(x) \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \mathsf{A}_i^1(x) + \theta_{\mathrm{L}}(g) \equiv \underline{\mathcal{A}}_1 \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{1\,-1}(x,g)}\tau_i^{1\,-1} \\ &= \mathrm{pr}_2 \circ (\Phi \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1 \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{1\,-1}(x,g)}\tau_i^{1\,-1}\end{aligned}$$

□

Tytułem uzupełnienia dyskusji zasadniczej, istotnego z punktu widzenia zastosowań teoriopolowych rozwijanego tu formalizmu, podamy jeszcze

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 5. Potencjały powiązania głównego A_i na wiązce głównej P_{G} zadają rodzinę lokalnie gładkich 2-form na bazie o wartościach w algebrze Liego $\mathfrak{g}$

$$\mathsf{F}_i := \mathsf{d}\mathsf{A}_i + \mathsf{A}_i \wedge \mathsf{A}_i\,, \qquad i \in I$$

spełniających warunki

$$\forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}},\ x\in\mathcal{O}_{ij}} \ :\ \mathsf{F}_j(x) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}}\big)\,\mathsf{F}_i(x)\,.$$

Są one nazywane **lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania głównego na wiązce** P_{G}. **Powiązanie główne płaskie** to takie, którego lokalne 2-formy krzywizny są równe zeru.

Wykład zamyka elementarna konstatacja własności transformacyjnych krzywizny.

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 6 i niechaj $\{\mathsf{F}_i^\alpha\}_{i\in I}$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania głównego na wiązkach głównych nad ustaloną bazą B, stowarzyszonymi ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, przy czym zakładamy, że między wiązkami tymi istnieje izomorfizm wiązek głównych z powiązaniem pokrywający identyczność na bazie, o danych lokalnych $\{h_i\}_{i\in I}$ zdefiniowanych w treści Tw. 4. Wówczas zachodzą tożsamości

$$\mathsf{F}_i^2 = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h_i}\big)\mathsf{F}_i^1\,.$$

Dowód: Prosty rachunek. □