METODY ALGEBRY I GEOMETRII WYŻSZEJ W FIZYCE II
W CZASACH ZARAZY
17. I 18. WYKŁAD ZDALNY
THE HOLY GRAIL

Po długich i mozolnych przygotowaniach jesteśmy wreszcie w stanie przedstawić obiekty będące poszukiwanymi naturalnymi geometryzacjami struktur algebraicznych: algebry Clifforda i modułu spinorowego odnośnej grupy Spin. Zaczynamy od

Definicja 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $((\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times p+q}, \pi_{\mathbb{V}}), \mathrm{g})$ będzie rzeczywistą zorientowaną wiązką riemannowską o metryce $\mathrm{g} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze (p,q) i orientacji $(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}, B, \mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}})$ w rozumieniu Def. 12-13-14-15.6. **Rzeczywista wiązka Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, \mathrm{g})$ to wiązka

$$\big(\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \equiv \mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V} \times_{\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}} \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{p,q}\big), B, \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{p,q}\big), \pi_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}\big)$$

stowarzyszona z wiązką zorientowanych reperów ortogonalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}$ wiązki $\mathbb{V}$ poprzez funktorialne cliffordowskie podniesienie $\mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}}$ definiującego działania

$$\rho_{\mathrm{def}} \;:\; \mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\Box\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}}\big(\mathbb{R}^{p,q}\big)$$

jej grupy strukturalnej $\mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})$ z modelowej przestrzeni kwadratowej $\mathbb{R}^{p,q}$ dla $(\mathbb{V},\mathrm{g})$ do jej algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$.

Zespolona wiązka Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej $(\mathbb{V},\mathrm{g})$ to kompleksyfikacja

$$\big(\mathscr{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \equiv \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^{\mathbb{C}}, B, \mathrm{Cliff}\big(\mathbb{R}^{p,q}\big)^{\mathbb{C}} \cong \mathrm{Cliff}(\mathbb{C}^{\times p+q}, \delta_{\mathrm{E}}^{(p+q)}), \pi_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^{\mathbb{C}}}\big)$$

rzeczywistej wiązki Clifforda tejże wiązki wektorowej w rozumieniu Def. 2-3-4.9 i Tw. 6 z VII Wykładu z I semestru.

Uwaga 1. Naturalnym przedstawicielem izoklasy[1] (więc też modelem) wiązki Clifforda nad ciałem bazowym $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest wiązka ilorazowa

$$\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \cong \big(\bigsqcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \times \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}\big)/_{\sim_{\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ g_{\cdot,\cdot}\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}}}}\,, \qquad \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \equiv \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$$

z oczywistą topologią i strukturą gładką, skonstruowana nad pokryciem $\mathscr{O} \equiv \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B trywializującym dla $\mathbb{V}$ przy użyciu zredukowanych odwzorowań przejścia $g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})$, $(i,j) \in \big\langle I^{\times 2}\big\rangle_{\mathscr{O}}$ wiązki $\mathbb{V}$ (i $\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}$).

Mamy oczekiwane

Twierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Wiązka Clifforda $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ jest wiązką algebr Clifforda, tj. obok naturalnej struktury $\mathbb{K}$-liniowej na $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ istnieje iloczyn w.p.w.

$$\mathrm{m}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})} \;:\; \mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \times_B \mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \longrightarrow \mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\,,$$

cięcie globalne

$$e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})} \;:\; B \longrightarrow \mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$$

oraz monomorfizm wiązek wektorowych (w konwencji $\mathbb{V}^{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{V}$)

$$\jmath_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} \;:\; \mathbb{V}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$$

[1] Wszak odwzorowania przejścia w $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ stowarzyszone z pokryciem $\mathscr{O}$ to właśnie g_{ij} (działające poprzez $\mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}}$) – patrz: Def. 9-10-11.1, a przecież mamy ostatnią część tezy Tw. 2-3-4.2.

o własnościach – wypisanych dla dowolnych $x \in B$ oraz $\Gamma \in \mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})_x$ i $V_1, V_2 \in \mathbb{V}_x^{\mathbb{K}}$ –

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{m}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}\big(\Gamma, e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(x)\big) = \Gamma = \mathrm{m}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}\big(e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(x), \Gamma\big) \\ \\ \{\jmath_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(V_1), \jmath_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(V_2)\} = 2\mathrm{g}^{\mathbb{K}}(x)(V_1 \otimes V_2) \triangleright e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(x) \end{array}\right. ,$$

gdzie $\{\cdot,\cdot\}$ jest antykomutatorem zdefiniowanym dla mnożenia $\mathrm{m}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}$, a nadto $\mathrm{g}^{\mathbb{R}} \equiv \mathrm{g}$, wreszcie $\mathrm{g}^{\mathbb{C}}$ jest naturalną kompleksyfikacją struktury metrycznej na $\mathbb{V}$ geometryzującą konstrukcję z Def. 3 z VII Wykładu z I semestru. Powyższe w kanoniczny sposób indukuje strukturę algebry Clifforda na $\Gamma(\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g}))$.

<u>*Dowód:*</u> Zaczniemy od wskazania struktury $\mathbb{R}$-liniowej na rzeczywistej wiązce Clifforda (por. Def. 2-3-4.4). Mamy więc operację binarną

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \quad &: \quad \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \times_B \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \longrightarrow \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \\ &: \quad \big([(p_1,\gamma_1)],[(p_2,\gamma_2)]\big) \longmapsto \big[\big(p_1, \gamma_1 + \mathrm{Cliff}\,\rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,p_2)(\gamma_2)\big)\big] \equiv [(p_1,\gamma_1)] + [(p_2,\gamma_2)] \end{aligned}$$

o elemencie neutralnym (cięcie zerowe)

$$\mathbf{0}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})} \;:\; B \longrightarrow \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \;:\; x \longmapsto [(p,0)]\,,$$

w którego zapisie p jest *dowolnym* punktem z włókna $(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V})_x$ nad punktem x w bazie, oraz działanie ciała bazowego $\mathbb{R} \ni \lambda$

$$\mathbb{L}_\lambda \;:\; \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \longrightarrow \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \;:\; [(p,\gamma)] \longmapsto [(p,\lambda \triangleright \gamma)]\,.$$

Niezależność wyniku dodawania we włóknie $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ od wyboru reprezentantów dodawanych klas sprawdzamy w bezpośrednim rachunku, w którym dobieramy

$$\widetilde{p}_\alpha = p_\alpha \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_\alpha,\widetilde{p}_\alpha)\,, \qquad \widetilde{\gamma}_\alpha = \mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_\alpha,p_\alpha)(\gamma_\alpha)\,, \qquad \alpha \in \{1,2\}\,, \tag{1}$$

a który – w odwołaniu do funktorialności Cliff i automorficznej (więc w szczególności liniowej) natury wyniku jego obliczenia na dowolnym elemencie grupy strukturalnej $\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}$, jak również Stw. 5-6.1 – daje nam wynik

$$\begin{aligned}
&[(\widetilde{p}_1,\widetilde{\gamma}_1)] + [(\widetilde{p}_2,\widetilde{\gamma}_2)] \equiv \big[\big(\widetilde{p}_1, \widetilde{\gamma}_1 + \mathrm{Cliff}\,\rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2)(\widetilde{\gamma}_2)\big)\big] \\
\equiv\; &\big[\big(p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), \mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_1,p_1)(\gamma_1) \\
&+\mathrm{Cliff}\,\rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_2,\widetilde{p}_2)\big) \circ \mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_2,p_2)(\gamma_2)\big)\big] \\
=\; &\big[\big(p_1, \mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1)\big(\mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_1,p_1)(\gamma_1) \\
&+\mathrm{Cliff}\,\rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_2,\widetilde{p}_2)\big) \circ \mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_2,p_2)(\gamma_2)\big)\big)\big] \\
=\; &\big[\big(p_1, \mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1) \circ \mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_1,p_1)(\gamma_1) \\
&+\mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1) \circ \mathrm{Cliff}\,\rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_2,\widetilde{p}_2)\big) \\
&\circ \mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_2,p_2)(\gamma_2)\big)\big] \\
=\; &\big[\big(p_1, \mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}}\big(\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1) \cdot \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_1,p_1)\big)(\gamma_1) \\
&+\mathrm{Cliff} \circ \rho_{\mathrm{def}}\big(\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1) \cdot \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_2,\widetilde{p}_2)\big) \cdot \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_2,p_2)\big)(\gamma_2)\big)\big] \\
=\; &\big[\big(p_1, \gamma_1 + \mathrm{Cliff}\,\rho_{\mathrm{def}} \circ \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,p_2)(\gamma_2)\big)\big]\,,
\end{aligned}$$

tożsamy z poprzednim. Stwierdzona niezależność pozwala nam „uprościć” formułę definiującą $\mathbb{A}$ poprzez wyzyskanie swobody wyboru reprezentantów dodawanych orbit. Oto więc drugi argument $\mathbb{A}$ możemy przedstawić w postaci

$$[(p_2,\gamma_2)] = [(p_1 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,p_2),\gamma_2)] = \big[\big(p_1, \mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,p_2)(\gamma_2)\big)\big] \equiv [(p_1,\widetilde{\gamma}_2)]\,,$$

a wtedy

$$[(p_1,\gamma_1)] + [(p_2,\gamma_2)] \equiv [(p_1,\gamma_1)] + [(p_1,\widetilde{\gamma}_2)] = [(p_1,\gamma_1+\widetilde{\gamma}_2)]\,.$$

Zabieg ten dowodzi naturalności zaproponowanej operacji binarnej i pokazuje, że „złożona” postać sumy elementów włókna wypisana wcześniej jest ledwie artefaktem nieuniknionej redundancji stosowanego przez nas opisu dziedziny odwzorowania (w terminach reprezentantów orbit). Bez trudu dowodzimy teraz łączności dodawania,

$$\begin{aligned}
&\big([(p_1,\gamma_1)] + [(p_2,\gamma_2)]\big) + [(p_3,\gamma_3)] \equiv \big([(p_1,\gamma_1)] + [(p_1,\widetilde{\gamma}_2)]\big) + [(p_1,\widetilde{\gamma}_3)] \\
= \;& [(p_1,\gamma_1+\widetilde{\gamma}_2)] + [(p_1,\widetilde{\gamma}_3)] = \big[\big(p_1,(\gamma_1+\widetilde{\gamma}_2)+\widetilde{\gamma}_3\big)\big] = \big[\big(p_1,\gamma_1+(\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_3)\big)\big] \\
\equiv \;& [(p_1,\gamma_1)] + [(p_1,\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_3)] = [(p_1,\gamma_1)] + \big([(p_1,\widetilde{\gamma}_2)] + [(p_1,\widetilde{\gamma}_3)]\big) \\
\equiv \;& [(p_1,\gamma_1)] + \big([(p_1,\gamma_2)] + [(p_1,\gamma_3)]\big)\,.
\end{aligned}$$

W przypadku $\mathbb{L}_\lambda$ niezależność wyniku działania skalarów we włóknie $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ od wyboru reprezentanta klasy elementu z włókna jest prostą konsekwencją liniowości $\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}(\chi)$ dla dowolnego $\chi \in \mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})$.

Następnie definiujemy iloczyn, o którym mowa w tezie stwierdzenia. Jest on dany wzorem

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})} \;&:\; \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \times_B \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \longrightarrow \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \\
&:\; \big([(p_1,\gamma_1)],[(p_2,\gamma_2)]\big) \longmapsto \big[\big(p_1,\gamma_1\cdot\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,p_2)(\gamma_2)\big)\big] \\
&\qquad\qquad\qquad \equiv [(p_1,\gamma_1)].[(p_2,\gamma_2)]\,.
\end{aligned}$$

Jest on dobrze określony, gdyż dla dowolnej innej pary reprezentantów wymnażanych orbit jak w Równ. (1) otrzymujemy wynik mnożenia

$$\begin{aligned}
&[(\widetilde{p}_1,\widetilde{\gamma}_1)].[(\widetilde{p}_2,\widetilde{\gamma}_2)] = \big[\big(\widetilde{p}_1,\widetilde{\gamma}_1\cdot\mathrm{Cliff}\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2\big)\big(\widetilde{\gamma}_2\big)\big)\big] \\
\equiv\;& \big[\big(p_1 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), \mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_1,p_1)(\gamma_1) \\
&\cdot\mathrm{Cliff}\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(p_1 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), p_2 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_2,\widetilde{p}_2)\big)\circ\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_2,p_2)(\gamma_2)\big)\big] \\
=\;& \big[\big(p_1, \mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1)\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_1,p_1)(\gamma_1) \\
&\cdot\mathrm{Cliff}\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(p_1 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), p_2 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_2,\widetilde{p}_2)\big)\circ\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_2,p_2)(\gamma_2)\big)\big)\big] \\
=\;& \big[\big(p_1, \mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1)\circ\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_1,p_1)(\gamma_1) \\
&\cdot\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1)\circ\mathrm{Cliff}\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(p_1 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), p_2 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_2,\widetilde{p}_2)\big) \\
&\circ\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_2,p_2)(\gamma_2)\big)\big)\big] \\
=\;& \big[\big(p_1, \mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\big(\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1)\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_1,p_1)\big)(\gamma_1) \\
&\cdot\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\big(\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1)\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(p_1 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,\widetilde{p}_1), p_2 \lhd \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_2,\widetilde{p}_2)\big)\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p}_2,p_2)\big)(\gamma_2)\big)\big)\big] \\
=\;& \big[\big(p_1,\gamma_1\cdot\mathrm{Cliff}\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p_1,p_2)(\gamma_2)\big)\big]\,,
\end{aligned}$$

tożsamy z tym uzyskanym poprzednio. Ażeby upewnić się o łącznym charakterze powyższego działania, powtórzymy rozumowanie zastosowane w odniesieniu do $\mathbb{A}$, otrzymując najprostszą do pomyślenia postać iloczynu

$$[(p_1,\gamma_1)].[(p_2,\gamma_2)] \equiv [(p_1,\gamma_1)].[(p_1,\widetilde{\gamma}_2)] = [(p_1,\gamma_1\cdot\widetilde{\gamma}_2)]\,.$$

Możemy więc zapisać, wykorzystując po drodze łączność mnożenia w $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$,

$$\begin{aligned}&\big([(p_1,\gamma_1)].[(p_2,\gamma_2)]\big).[(p_3,\gamma_3)] \equiv \big([(p_1,\gamma_1)].[(p_1,\widetilde{\gamma}_2)]\big).[(p_1,\widetilde{\gamma}_3)] = [(p_1,\gamma_1\cdot\widetilde{\gamma}_2)].[(p_1,\widetilde{\gamma}_3)]\\ =\ & \big[\big(p_1,(\gamma_1\cdot\widetilde{\gamma}_2)\cdot\widetilde{\gamma}_3\big)\big] = \big[\big(p_1,\gamma_1\cdot(\widetilde{\gamma}_2\cdot\widetilde{\gamma}_3)\big)\big] \equiv [(p_1,\gamma_1)].[(p_1,\widetilde{\gamma}_2\cdot\widetilde{\gamma}_3)]\\ \equiv\ & [(p_1,\gamma_1)].\big([(p_1,\widetilde{\gamma}_2)].[(p_1,\widetilde{\gamma}_3)]\big) \equiv [(p_1,\gamma_1)].\big([(p_2,\gamma_2)].[(p_3,\gamma_3)]\big)\,.\end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy $\mathbb{R}$-liniowości iloczynu względem wprowadzonej wcześniej struktury $\mathbb{R}$-liniowej (w.p.w.).

W następnej kolejności wskazujemy cięcie „jedynkowe":

$$e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}\ :\ B\longrightarrow\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\ :\ x\longmapsto[(p,e^{\mathrm{C}})]\,,$$

w którego zapisie p jest *dowolnym* punktem z włókna $(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V})_x$ nad punktem x w bazie. O sensowności tej definicji przekonuje krótki rachunek bezpośredni dla dowolnego $\widetilde{p}\in(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V})_x$:

$$[(\widetilde{p},e^{\mathrm{C}})] = \big[\big(p\triangleleft\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,\widetilde{p}),e^{\mathrm{C}}\big)\big] \equiv \big[\big(p,\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,\widetilde{p})(e^{\mathrm{C}})\big)\big] = [(p,e^{\mathrm{C}})]\,,$$

w którym wykorzystaliśmy automorficzną naturę $\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,\widetilde{p})$ (implikującą w szczególności zachowywanie jedynki w unitalnej algebrze $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$). Bez trudu sprawdzamy pożądaną własność (neutralność względem $\mathrm{m}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}$) powyższego cięcia (dla dowolnych $p\in(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V})_x$ i $\gamma\in\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$):

$$\begin{aligned}[(p,\gamma)].e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(x) &\equiv [(p,\gamma)].[(p,e^{\mathrm{C}})] = [(p,\gamma\cdot e^{\mathrm{C}})] = [(p,\gamma)]\,,\\ e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(x).[(p,\gamma)] &\equiv [(p,e^{\mathrm{C}})].[(p,\gamma)] = [(p,e^{\mathrm{C}}\cdot\gamma)] = [(p,\gamma)]\,.\end{aligned}$$

Definicja włożenia $\jmath_{\mathbb{V}}$ wymaga przywołania kanonicznego izomorfizmu

$$\widehat{\mathrm{ev}}\ :\ \mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}\times_{\rho_{\mathrm{def}}}\mathbb{R}^{\times p+q}\xrightarrow{\cong}\mathbb{V}$$

z Rozdz. 9-10-11.1. Wykorzystując tenże, możemy zadać odwzorowanie

$$\jmath_{\mathbb{V}}\equiv[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\circ\widehat{\mathrm{ev}}^{-1}\ :\ \mathbb{V}\longrightarrow\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\,,$$

w którego definicji

$$[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\ :\ \mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}\times_{\rho_{\mathrm{def}}}\mathbb{R}^{\times p+q}\longrightarrow\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\ :\ [(p,v)]\longmapsto\big[\big(p,\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)\big)\big]$$

jest jawnie injektywnym morfizmem wiązek wektorowych używającym kanonicznego odwzorowania Clifforda z Def. 2 z V Wykładu z semestru I (injektywność gwarantuje Stw. 5 z tegoż wykładu). O sensowności powyższej definicji przekonujemy się w bezpośrednim rachunku z użyciem dowolnej pary

$$\widetilde{p}=p\triangleleft\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,\widetilde{p})\,,\qquad\qquad \widetilde{v}=\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p},p)(v)$$

definiującej tę samą orbitę $[(\widetilde{p},\widetilde{v})]=[(p,v)]$. Obliczamy

$$\begin{aligned}[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(\widetilde{p},\widetilde{v})]\big) &\equiv [(\widetilde{p},\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\widetilde{v}))] \equiv \big[\big(p\triangleleft\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,\widetilde{p}),\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p},p)(v)\big)\big]\\ &= \big[\big(p\triangleleft\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,\widetilde{p}),\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\widetilde{p},p)\circ\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)\big)\big] \equiv \big[\big(p,\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)\big)\big]\,.\end{aligned}$$

Na koniec dowodzimy słuszności fundamentalnych relacji antykomutacyjnych w zrekonstruowanej powyżej wiązce algebr nad B. W rachunku wykorzystujemy dotychczasowe ustalenia. Obliczamy

$$\begin{aligned}&\jmath_{\mathbb{V}}\big(\widehat{\mathrm{ev}}\big([(p_1,v_1)]\big)\big).\jmath_{\mathbb{V}}\big(\widehat{\mathrm{ev}}\big([(p_2,v_2)]\big)\big)+\jmath_{\mathbb{V}}\big(\widehat{\mathrm{ev}}\big([(p_2,v_2)]\big)\big).\jmath_{\mathbb{V}}\big(\widehat{\mathrm{ev}}\big([(p_1,v_1)]\big)\big)\\ =\ & [\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_1,v_1)]\big).[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_2,v_2)]\big)+[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_2,v_2)]\big).[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_1,v_1)]\big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad [\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_1,v_1)]\big).[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_1,\widetilde{v}_2)]\big) + [\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_1,\widetilde{v}_2)]\big).[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_1,v_1)]\big) \\
&\equiv \quad \big[\big(p_1,\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v_1)\big)\big].\big[\big(p_1,\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\widetilde{v}_2)\big)\big] + \big[\big(p_1,\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\widetilde{v}_2)\big)\big].\big[\big(p_1,\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v_1)\big)\big] \\
&\equiv \quad \big[\big(p_1,\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v_1)\cdot\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\widetilde{v}_2)\big)\big] + \big[\big(p_1,\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\widetilde{v}_2)\cdot\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v_1)\big)\big] \\
&\equiv \quad \big[\big(p_1,\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v_1)\cdot\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\widetilde{v}_2)+\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\widetilde{v}_2)\cdot\jmath^{\mathrm{C}}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v_1)\big)\big] = \big[\big(p_1,2\delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}(v_1\otimes\widetilde{v}_2)\triangleright e^{\mathrm{C}}\big)\big].
\end{aligned}
$$

Na obecnym etapie doprecyzujemy definicję włożenia $\jmath_{\mathbb{V}}$. Niech więc $\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}$ będzie wiązką uzyskaną poprzez wybór (klasy) orientacji na zbiorze lokalnych baz w $\mathbb{V}$ stanowiących orbitę, względem naturalnego działania $\mathrm{O}(p,q;\mathbb{R})$, ustalonej bazy (lokalnej) pseudoortonormalnej względem $\mathrm{g}(x)$ w każdym punkcie swego nośnika. W świetle Tw. 2-3-4.3 wybór takiej bazy jest równoznaczny z lokalną trywializacją $\mathbb{V}$ (i zawsze możliwy na gruncie rozumowania przedstawionego w konstruktywnym dowodzie Twierdzenia 12-13-14-15.2. Wybór taki jako definicja zbioru lokalnych trywializacji (modelu) $\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}$ ma sens, gdyż odwzorowania przejścia tej ostatniej biorą wartości w $\mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})$ i jako takie przeprowadzją lokalne bazy pseudoortonormalne pochodzące z jednej trywializacji lokalnej w takie same bazy pochodzące z drugiej trywializacji lokalnej. Mamy zatem

$$
\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V} = \bigsqcup_{x\in B}\mathrm{Iso}_{\mathbb{R}}\big(\mathbb{R}^{\times p+q},\mathbb{V}_x\big)^{\mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})} \ni (\beta_x,x)\equiv p_1\,,
$$

gdzie dla dowolnej bazy $\beta_x\ :\ \mathbb{R}^{\times p+q}\xrightarrow{\cong}\mathbb{V}_x$ spełniona jest tożsamość

$$
\mathrm{g}(x)\circ\big(\beta_x\otimes\beta_x\big)\equiv\delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}\,.
$$

Dla tak skonstruowanej wiązki zorientowanych baz ortogonalnych wiązki $\mathbb{V}$ możemy powrócić do dowodu fundamentalnych relacji antykomutacyjnych. Obliczamy

$$
\begin{aligned}
&[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_1,v_1)]\big).[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_2,v_2)]\big) + [\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_2,v_2)]\big).[\jmath_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]\big([(p_1,v_1)]\big) \\
= \quad &\big[\big(p_1,2\delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}(v_1\otimes\widetilde{v}_2)\triangleright e^{\mathrm{C}}\big)\big] \equiv \big[\big(p_1,2\mathrm{g}(x)\circ\big(\beta_x\otimes\beta_x\big)(v_1\otimes\widetilde{v}_2)\triangleright e^{\mathrm{C}}\big)\big] \\
= \quad &\big[\big(p_1,2\mathrm{g}(x)\big(\beta_x(v_1)\otimes\beta_x(\widetilde{v}_2)\big)\triangleright e^{\mathrm{C}}\big)\big] \equiv \big[\big(p_1,2\mathrm{g}(x)\circ(\widehat{\mathrm{ev}}\otimes\widehat{\mathrm{ev}})\big([(p_1,v_1)]\otimes[(p_1,\widetilde{v}_2)]\big)\triangleright e^{\mathrm{C}}\big)\big] \\
= \quad &\big[\big(p_1,2\mathrm{g}(x)\circ(\widehat{\mathrm{ev}}\otimes\widehat{\mathrm{ev}})\big([(p_1,v_1)]\otimes[(p_2,v_2)]\big)\triangleright e^{\mathrm{C}}\big)\big] \\
\equiv \quad &\mathbb{L}_{2\mathrm{g}(x)\circ(\widehat{\mathrm{ev}}\otimes\widehat{\mathrm{ev}})\left([(p_1,v_1)]\otimes[(p_2,v_2)]\right)}\big([(p_1,e^{\mathrm{C}})]\big) \equiv \mathbb{L}_{2\mathrm{g}(x)(\widehat{\mathrm{ev}}([(p_1,v_1)])\otimes\widehat{\mathrm{ev}}([(p_2,v_2)]))}\big(e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(x)\big)\,,
\end{aligned}
$$

co kończy dowód dla przypadku rzeczywistego. W przypadku zespolonym dowód przebiega w pełni analogicznie, przeto jego samodzielną rekonstrukcję pozostawiamy zainteresowanemu Czytelnikowi. □

Pierwszym krokiem na drodze ku geometryzacji spinorowej reprezentacji $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ jest identyfikacja w przestrzeni totalnej $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ dwóch gładko zanurzonych podrozmaitości będących geometryzacjami podprzestrzeni $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^n_{\mathbb{K}}$, $n\in\{0,1\}$ o ustalonej parzystości. O ich istnieniu orzeka

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy dotychchczasowy zapis. Istnieje kanoniczny rozkład wiązki Clifforda

$$
\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\cong\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^0\oplus_{\mathbb{R},B}\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^1
$$

na sumę Whitneya podwiązek własnych $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^n$, $n\in\{0,1\}$ inwolutywnego automorfizmu wiązki Clifforda

$$
J_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}\ :\ \mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\xrightarrow{\cong}\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})
$$

stanowiącego podniesienie automorfizmu

$$
P_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}\ :\ \mathbb{V}^{\mathbb{K}}\xrightarrow{\cong}\mathbb{V}^{\mathbb{K}}
$$

o ograniczeniach

$$P_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}_x} \;:\; \mathbb{V}^{\mathbb{K}}_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}^{\mathbb{K}}_x \;:\; v \longmapsto -v\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Tym razem w dowodzie odwołamy się do modelu lokalnego[2] $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ z Uwagi 1. Jest oczywiste, że w obrazie lokalnym podniesienie $P_{\mathbb{V}}$, o którym mowa w treści dowodzonego stwierdzenia, przybiera postać

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}\restriction_{\mathcal{O}_i\times\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}} \;:\; \mathcal{O}_i\times\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \circlearrowleft \;:\; (x,\gamma)\longmapsto \big(x, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma)\big)\,,$$

gdzie $J_{\mathbb{K}^{\times p+q}} \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}})$ jest inwolucją główną z Def. 4 z V Wykładu z semestru I, wobec czego lokalnie mamy rozkład wiązki trywialnej na sumę prostą podwiązek własnych

$$\mathcal{O}_i\times\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} = \big(\mathcal{O}_i\times\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^0_{\mathbb{K}}\big)\oplus_{\mathbb{R},\mathcal{O}_i}\big(\mathcal{O}_i\times\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^1_{\mathbb{K}}\big)\,. \tag{2}$$

Pozostaje upewnić się, że rozkład ten jest zachowywany przez utożsamienia dokonywane nad przecięciami $\mathcal{O}_{ij}\ni x$ pokrycia trywializującego. Te jednak są postaci (patrz: Tw. 2-3-4.2)

$$(x,\gamma,i)\sim\big(x,\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ g_{ji}(x)\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\big)(\gamma),j\big)\,, \tag{3}$$

gdzie $g_{ji} \;:\; \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow \mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})$ są odwzorowaniami przejścia $\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}$, a ponieważ w świetle Twierdzenia Cartana–Dieudonnégo (Tw. 4 z IX Wykładu z semestru I) każdy element grupy strukturalnej $\mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})$ jest superpozycją (skończonej) parzystej liczby odbić w hiperpłaszczyznach ortogonalnych do pewnych wektorów nieizotropowych, przeto każdy takie element zachowuje parzystość transformowanego elementu algebry Clifforda. W interesującym nas kontekście fakt ten przesądza o globalnym charakterze rozkładu (2). $\square$

Mamy również istotne

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis, w szczególności ten z Tw. 1 i Def. 1 i 2 z VII Wykładu z I semestru. Wiązka $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ ma cięcie globalne – zwane **cięciem objętości** –

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} \;:\; B\longrightarrow\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \;:\; x\longmapsto[(p,\omega_{\mathbb{K}})]\,,$$

w którego zapisie p jest *dowolnym* punktem z włókna $(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V})_x$ nad punktem x w bazie. Ilekroć $p+q\in 2\mathbb{N}$, jest

$$\forall_{x\in B}\ \forall_{\Gamma\in\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^1_x} \;:\; \{\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x),\Gamma\} = \mathbf{0}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(x)\,,$$

w pozostałych zaś przypadkach, $p+q\in 2\mathbb{N}+1$ jest

$$\forall_{x\in B}\ \forall_{\Gamma\in\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^1_x} \;:\; [\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x),\Gamma] = \mathbf{0}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(x)\,.$$

Ponadto gdy $\mathbb{K}\equiv\mathbb{R}$ i $q-p\equiv 3 \mod 4$, zachodzi tożsamość

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(\cdot).\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(\cdot) = e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(\cdot)$$

i rzeczywista wiązka Clifforda jest sumą Whitneya

$$\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\cong\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^+\oplus_{\mathbb{R},B}\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^- \tag{4}$$

podwiązek własnych cięcia objętości (samodualnych (+) wzgl. antysamodualnych (-)), o własnościach

$$\forall_{x\in B}\ \forall_{\Gamma^\pm\in\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^\pm_x} \;:\; \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(x).\Gamma^\pm = \pm\Gamma^\pm\,,$$

odwzorowywanych w siebie wzajemnie przez inwolutywny automorfizm $J_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}$,

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}\big(\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^\pm\big) = \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^\mp\,.$$

Ilekroć zaś $\mathbb{K}\equiv\mathbb{C}$ i $p+q\equiv 1 \mod 2$, zachodzi tożsamość

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(\cdot).\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(\cdot) = e^{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}(\cdot)$$

[2]Zmiana schematu dowodzenia jest podyktowana li tylko wolą pozostawienia Czytelnika z bogatszym arsenałem metod rachunkowych, które mogą okazać się przydatne w przyszłości. Przeprowadzenie dowodu bez odwoływania się do modelu nie powinno Czytelnikowi nastręczyć żadnych trudności.

i zespolona wiązka Clifforda jest sumą Whitneya

$$\mathscr{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \cong \mathscr{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^{+} \oplus_{\mathbb{R},B} \mathscr{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^{-}$$

podwiązek własnych cięcia objętości (samodualnych (+) wzgl. antysamodualnych (-)), o własnościach

$$\forall_{x\in B}\ \forall_{\Gamma^{\pm}\in\mathscr{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^{\pm}_{x}}\ :\ \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(x).\Gamma^{\pm} = \pm\Gamma^{\pm}\,,$$

odwzorowywanych w siebie wzajemnie przez inwolutywny automorfizm $J_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}$,

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}\big(\mathscr{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^{\pm}\big) = \mathscr{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^{\mp}\,.$$

Dowód: Sensowność definicji cięcia objętości wynika wprost z definicji $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$, która pozwala zapisać, dla dowolnego $\widetilde{p}\in(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V})_{x}$,

$$[(\widetilde{p},\omega_{\mathbb{K}})] = \big[\big(p\triangleleft\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,\widetilde{p}),\omega_{\mathbb{K}}\big)\big] = \big[\big(p,\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,\widetilde{p})\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\big)(\omega_{\mathbb{K}})\big)\big]\,,$$

a nadto z elementarnej własności transformacyjnej elementu objętości:

Lemat 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $\chi\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(p+q)$ i niech $\chi^{*}\omega_{\mathbb{K}}$ będzie elementem $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ otrzymanym z $\omega_{\mathbb{K}}$ przez zastąpienie elementu e_i, $i\in\overline{1,p+q}$ bazy (pseudo)ortonormalnej $\mathbb{R}^{p,q}$ w jego definicji (patrz: Def. 1 i 2 z VII Wykładu z I semestru) elementem $\chi(e_i)$. Wówczas zachodzi tożsamość

$$\chi^{*}\omega_{\mathbb{K}} = \det\chi\triangleright\omega_{\mathbb{K}}\,.$$

Dowód Lematu 1.: Proste ćwiczenie wykorzystujące relacje antykomutacyjne między elementami bazy e_i. □

Wobec powyższego

$$[(\widetilde{p},\omega_{\mathbb{K}})] = \big[\big(p,\det\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,\widetilde{p})\triangleright\omega_{\mathbb{K}}\big)\big] = [(p,\omega_{\mathbb{K}})]\,.$$

Przechodząc do drugiej części tezy stwierdzenia, zauważamy, że w modelu $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\cong\bigsqcup_{i\in I}\mathcal{O}_i\times\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ istnienie postulowanych podwiązek własnych nad elementami pokrycia trywializującego jest konsekwencją Stw. 2 i 5 z VII Wykładu z I semestru – oto mamy

$$\mathcal{O}_i\times\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \cong \big(\mathcal{O}_i\times\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^{+}_{\mathbb{K}}\big)\oplus_{\mathbb{K},\mathcal{O}_i}\big(\mathcal{O}_i\times\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^{-}_{\mathbb{K}}\big)\,.$$

Nad przecięciami $\mathcal{O}_{ij}\ni x$ dokonujemy utożsamień (3), jeśli zatem

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(x).\Gamma^{\pm} = \pm\Gamma^{\pm}\,,$$

to także – na mocy Twierdzenia Cartana–Dieudonnégo i rozumowania identycznego jak w dowodzie Stw. 1, w połączeniu z Tw. 1 z VI Wykładu z I semestru,

$$\forall_{\gamma\in\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^{0}_{\mathbb{K}}}\ :\ [\omega_{\mathbb{K}},\gamma] = 0\,, \tag{5}$$

oraz definicją $\mathrm{m}_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}$ z konstruktywnego dowodu Tw. 1 –

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(x).\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ g_{ji}(x)\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\big)\big(\Gamma^{\pm}\big) &= \big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ g_{ji}(x)\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\big)\big(\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}(x).\Gamma^{\pm}\big)\\ &= \pm\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ g_{ji}(x)\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\big)\big(\Gamma^{\pm}\big)\,,\end{aligned}$$

a w takim razie powyższy rozkład na podwiązki własne w dziedzinach lokalnych trywializacji jest zachowywany przez utożsamienia, skąd wniosek globalny (4). Wszystkie pozostałe składowe tezy są powtórzeniem treści Stw. 2 i 5 z VII Wykładu z I semestru, uprawomocnionym przez dotychczasowe rozumowanie. □

Mamy w ręku wszystkie narzędzia niezbędne do wskazania z dawna wyczekiwanej geometryzacji modułu spionorowego. Zaczniemy od konstrukcji pomocniczej:

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $((\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times p+q}, \pi_{\mathbb{V}}), \mathrm{g})$ będzie rzeczywistą zorientowaną wiązką riemannowską o metryce $\mathrm{g} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze (p,q) i orientacji $(\mathsf{F}_{\rm SO}\mathbb{V}, B, \mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\rm SO}\mathbb{V}})$ w rozumieniu Def. 12-13-14-15.6. **Struktura spinowa na riemannowskiej wiązce wektorowej** $(\mathbb{V}, \mathrm{g})$ to wybór prolongacji

$$(\Xi, \mathrm{id}_B, \xi) \;:\; (\mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V}, B, \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V}}) \longrightarrow (\mathsf{F}_{\rm SO}\mathbb{V}, B, \mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\rm SO}\mathbb{V}}) \tag{6}$$

wiązki zorientowanych baz ortogonalnych $\mathbb{V}$ wzdłuż nakrycia uniwersalnego

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\jmath_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) \xrightarrow{\xi \equiv \widetilde{\mathrm{Ad}}.\restriction_{\mathbb{R}^{p,q} \subset \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})}} \mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{1}$$

z Tw. 1 z IX Wykładu z I semestru. W tym kontekście wiązkę głowną $(\mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V}, B, \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V}})$ określa się mianem **wiązki baz** (lub **reperów**) **spinowych riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, \mathrm{g})$.

I wreszcie

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, w szczególności – Def. 2. **Wiązka rzeczywistych modułów Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, \mathrm{g})$ to wiązka

$$(\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathrm{g}) \equiv \mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V} \times_{\rho\restriction_{\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})}} W, B, W, \pi_{\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})})$$

stowarzyszona z wiązką baz spinowych $\mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V}$ wiązki $\mathbb{V}$ poprzez ograniczenie reprezentacji

$$\rho \equiv \rho^{\mathbb{R}} \;:\; \mathrm{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$$

(nietrywialnego) rzeczywistego modułu Clifforda (W, ρ) algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q})$ do jej grupy strukturalnej $\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})$. Ilekroć moduł $(W,\rho) \equiv (S,\sigma)$ jest nieprzywiedlny, mówimy o **rzeczywistej wiązce spinorowej riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, \mathrm{g})$, którą oznaczamy symbolem

$$(\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathrm{g}) \equiv \mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V} \times_{\sigma\restriction_{\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})}} S, B, S \equiv S^{\mathbb{R}}, \pi_{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}).$$

Wiązka zespolonych modułów Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, \mathrm{g})$ to wiązka

$$(\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathrm{g}) \equiv \mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V} \times_{\rho\restriction_{\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}} W^{\mathbb{C}}, B, W^{\mathbb{C}}, \pi_{\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})})$$

stowarzyszona z wiązką baz spinowych $\mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V}$ wiązki $\mathbb{V}$ poprzez ograniczenie reprezentacji

$$\rho^{\mathbb{C}} \equiv \rho \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \;:\; \mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p,q}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^{\mathbb{C}})$$

(nietrywialnego) skompleksyfikowanego modułu Clifforda $(W^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}})$ skompleksyfikowanej algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p,q})$ do jej grupy strukturalnej $\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) (\subset \mathrm{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q}) \otimes 1 \subset \mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p,q}))$. Ilekroć moduł $(W^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}}) \equiv (S^{\mathbb{C}}, \sigma^{\mathbb{C}})$ jest nieprzywiedlny, mówimy o **zespolonej wiązce spinorowej riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, \mathrm{g})$, którą oznaczamy symbolem

$$(\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathrm{g}) \equiv \mathsf{F}_{\rm Spin}\mathbb{V} \times_{\sigma\restriction_{\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}} S^{\mathbb{C}}, B, S^{\mathbb{C}}, \pi_{\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}).$$

W szczególności gdy $\mathbb{V} \equiv \mathsf{T}M$ jest wiązką styczną (zorientowanej) rozmaitości różniczkowalnej (riemannowskiej), mówimy o **rzeczywistej** wzgl. **zespolonej wiązce spinorowej nad rozmaitością** M, którą oznaczamy symbolem

$$(\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(M, \mathrm{g}) \equiv \mathsf{F}_{\rm Spin}\mathsf{T}M \times_{\sigma\restriction_{\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}}} S^{\mathbb{K}}, B, S^{\mathbb{K}}, \pi_{\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(M,\mathrm{g})}), \qquad \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

Uwaga 2. Naturalnym przedstawicielem izoklasy (więc też modelem) wiązki modułów Clifforda nad ciałem bazowym $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ zorientowanej riemannowskiej wiązki wektorowej jest wiązka ilorazowa (zapisana w konwencji $(W^{\mathbb{R}}, \rho^{\mathbb{R}}) \equiv (W, \rho)$)

$$\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathrm{g}) \cong \Big(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times W^{\mathbb{K}}\Big)/_{\sim_{\rho^{\mathbb{K}} \circ \widehat{g}_{\cdot,\cdot}}},$$

z oczywistą topologią i strukturą gładką, skonstruowana nad pokryciem $\mathscr{O} \equiv \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B trywializującym dla $\mathbb{V}$ przy użyciu zredukowanych odwzorowań przejścia $\widehat{g}_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})$, $(i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathscr{O}}$ wiązki baz spinowych $\mathbb{V}$.

Uwaga 3. Podany przez nas schemat geometryzacji spinorowego modułu Clifforda jest bodaj najbardziej rozpowszechnionym, lecz bynajmniej nie jedynym rozpatrywanym przez matematyków i fizyków. W alternatywnym podejściu zaproponowanym przez Tetrodego, Schrödingera, Infelda, van der Waerdena i Focka rozważa się (dowolne) wiązki wektorowe o włóknach niosących strukturę spinorowego modułu Clifforda względem włókien (odnośnych, nad tym samym punktem bazy) wiązki. Relacje pomiędzy oboma podejściami w kontekście teorii wiązek włoknistych dyskutuje Andrzej Trautman w swej pracy pt. "Connections and the Dirac operator on spinor bundles" [**?**]. Warto przy tej okazji przypomnieć, że Profesor Trautman był jednym z pionierów zastosowań teorii wiązek włóknistych w opisie zjawisk fizycznych (patrz np.: jego wczesna praca [**?**]). Autor niniejszego wykładu poczytuje sobie za przywilej możliwość uczenia się elementów teorii spinorów (oraz teorii grup i teorii wiązek włóknistych) wprost od Arcymistrza „Spinorowej Szachownicy" [**?**].

Przedstawiwszy zwartą definicję obiektu pożądania, możemy obecnie przejść do studium jego (nie mniej pożądanych) właściwości. Pierwsze z twierdzeń wieńczących nasze wielotygodniowe wysiłki uprawomocnia myślenie o wiązkach spinorowych jako geometryzacjach modułów spinorowych.

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 i 3. Wiązka spinorowa $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$, $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ jest wiązką nieprzywiedlnych modułów Clifforda, tj. obok naturalnej struktury $\mathbb{K}$-liniowej na $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ istnieje działanie w.p.w.

$$\Sigma\ :\ \mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\times_B\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\longrightarrow\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$$

lokalnie modelowane na działaniu algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ na jej module $S^{\mathbb{K}}$ indukowanym przez reprezentację spinorową $\rho^{\mathbb{K}}$. Powyższe w kanoniczny sposób indukuje strukturę spinorowego $\Gamma(\mathscr{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g}))$-modułu na $\Gamma(\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathrm{g}))$.

<u>*Dowód:*</u> Dowód przeprowadzamy dla $\mathbb{K}\equiv\mathbb{R}$, pozostawiając jego powtórzenie dla $\mathbb{K}\equiv\mathbb{C}$ uważnemu Czytelnikowi.

Istnienie struktury $\mathbb{R}$-liniowej na $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ weryfikujemy analogicznie jak w przypadku $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$, tę zatem część dowodu także pomijamy.

Pierwszoplanową rolę w konstrukcji działania w.p.w. Σ odgrywa morfizm prolongacji (6), który pozwala powiązać ze sobą działania grup strukturalnych obu wiązek baz: $\mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})$ na $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q})$ i nakrywającej $\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})$ na $S^{\mathbb{R}}$. Przy pomocy tego morfizmu definiujemy

$$\begin{aligned}\Sigma\quad &:\quad \mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\times_B\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\longrightarrow\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})\\ &:\quad \big([(p,\gamma)],[(\widehat{p},v)]\big)\longmapsto\big[\big(\widehat{p},\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p\big)(\gamma)\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}}v\big)\big]\equiv[(p,\gamma)]\triangleright[(\widehat{p},v)]\,,\end{aligned}$$

gdzie gwoli odciążenia zapisu użyliśmy oznaczenia

$$\gamma\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}}v\equiv\sigma^{\mathbb{R}}(\gamma)(v)\,.$$

Powyższa definicja nie jest pozbawiona sensu w sposób oczywisty, oto bowiem

$$\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\circ\Xi(\widehat{p})=\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p})\equiv\pi_{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}\big([(\widehat{p},v)]\big)=\pi_{\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})}\big([(p,\gamma)]\big)\equiv\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p)\,,$$

zatem element grupy strukturalnej $\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}),p)\in\mathrm{SO}(p,q;\mathbb{R})$ jest dobrze określony. Na obecnym etapie pozostaje jeszcze upewnić się, że wartość przyjmowana przez Σ na wypisanej parze orbit nie zależy od wyboru ich reprezentantów. W tym celu wybieramy pary:

$$p'=p\triangleleft\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p,p')\,,\qquad\qquad\gamma'=\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p',p)(\gamma)$$

oraz

$$\widehat{p}'=\widehat{p}\triangleleft\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}')\,,\qquad\qquad v'=\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}',\widehat{p})\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}}v$$

i obliczamy – wykorzystując po drodze funktorialność Cliff i automorficzną (więc w szczególności liniową) naturę wyniku jego obliczenia na dowolnym elemencie grupy strukturalnej $\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}$, jak również Stw. 5-6.1 –, co następuje:

$$[(p',\gamma')]\triangleright[(\widehat{p}',v')]\equiv\big[\big(\widehat{p}',\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}'),p'\big)(\gamma')\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}}v'\big)\big]$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \Big[\big(\widehat{p} \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}'),\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\big(\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}'),\Xi(\widehat{p})\big)\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p'\big)\big)\big) \\
&\qquad\qquad \circ\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p',p)\big)(\gamma)\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}',\widehat{p})\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big] \\
&= \Big[\big(\widehat{p} \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}'),\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\big(\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}'),\Xi(\widehat{p})\big)\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p'\big)\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}(p',p)\big)(\gamma) \\
&\qquad\qquad \cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}')^{-1}\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big] \\
&= \Big[\big(\widehat{p},\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}')}\circ\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\big(\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}'),\Xi(\widehat{p})\big)\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p\big)\big)(\gamma)\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big].
\end{aligned}$$

Wykorzystując parzystość $\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}')\in\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})\subset\mathrm{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q})^0$ i oczywistą relację między ξ i $\widetilde{\mathrm{Ad}}$, jak również definiującą relację między Ξ i ξ, upraszczamy powyższe wyrażenie:

$$\begin{aligned}
&[(p',\gamma')]\triangleright[(\widehat{p}',v')] = \Big[\big(\widehat{p},\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}')}\circ\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\big(\xi\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}',\widehat{p})\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p\big)\big)\big)(\gamma)\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big] \\
&\equiv \Big[\big(\widehat{p},\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\xi\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}')\big)\circ\big(\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\big(\xi\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}',\widehat{p})\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p\big)\big)\big)(\gamma)\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big] \\
&\equiv \Big[\big(\widehat{p},\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\big(\xi\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}')\cdot\xi\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}',\widehat{p})\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p\big)\big)(\gamma)\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big] \\
&= \Big[\big(\widehat{p},\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\big(\xi\big(\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p},\widehat{p}')\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}',\widehat{p})\big)\cdot\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p\big)\big)(\gamma)\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big] \\
&= \Big[\big(\widehat{p},\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p\big)(\gamma)\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big],
\end{aligned}$$

co ostatecznie daje nam wyjściowe wyrażenie. Mając swobodę wyboru reprezentantów, możemy – jak poprzednio – dokonać wyboru roztropnego,

$$p = \Xi(\widehat{p}),$$

który pozwala zdemistyfikować pozorną nieoczywistość formuły definicyjnej na Σ. Przepisawszy stosownie pierwszy z argumentów,

$$[(p,\gamma)] = \Big[\big(\Xi(\widehat{p})\triangleleft\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p\big),\gamma\big)\Big] = \Big[\big(\Xi(\widehat{p}),\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\mathrm{def}}\circ\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big(\Xi(\widehat{p}),p\big)(\gamma)\big)\Big] \equiv \Big[\big(\Xi(\widehat{p}),\widetilde{\gamma}\big)\Big],$$

otrzymujemy antycypowany wynik

$$\Big[\big(\Xi(\widehat{p}),\widetilde{\gamma}\big)\Big]\triangleright[(\widehat{p},v)] = [(\widehat{p},\widetilde{\gamma}\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v)], \tag{7}$$

który przekonuje o tym, że mamy do czynienia z geometryzacją modułu spinorowego.

W następnej kolejności sprawdzamy, że Σ jest działaniem, przywołując w tym celu postać iloczynu w.p.w. w wiązce algebr Clifforda $\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$ z dowodu Tw. 1. Dostajemy więc – dla dowolnych $p_1,p_2\in(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V})_x$ i $\widehat{p}\in(\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V})_x$ nad wspólnym $x\in B$ oraz $\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q})$ i $v\in S^{\mathbb{R}}$, które możemy zawsze przepisać w wygodnej postaci, zarówno w formule na działanie, jak i w formule na mnożenie, co czynimy poniżej –

$$\begin{aligned}
&[(p_2,\gamma_2)]\triangleright\big([(p_1,\gamma_1)]\triangleright[(\widehat{p},v)]\big) = \Big[\big(\Xi(\widehat{p}),\widetilde{\gamma}_2\big)\Big]\triangleright\Big(\Big[\big(\Xi(\widehat{p}),\widetilde{\gamma}_1\big)\Big]\triangleright[(\widehat{p},v)]\Big) \\
&= \Big[\big(\Xi(\widehat{p}),\widetilde{\gamma}_2\big)\Big]\triangleright\Big[\big(\widehat{p},\widetilde{\gamma}_1\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big] = \Big[\big(\widehat{p},\widetilde{\gamma}_2\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}}\big(\widetilde{\gamma}_1\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\big)\Big] = \Big[\big(\widehat{p},\widetilde{\gamma}_2\cdot\widetilde{\gamma}_1\triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v\big)\Big] \\
&\equiv \Big[\big(\Xi(\widehat{p}),\widetilde{\gamma}_1\cdot\widetilde{\gamma}_2\big)\Big]\triangleright[(\widehat{p},v)] \equiv \Big[\big(\Xi(\widehat{p}),\widetilde{\gamma}_1\big)\Big].\Big[\big(\Xi(\widehat{p}),\widetilde{\gamma}_2\big)\Big]\triangleright[(\widehat{p},v)] \\
&= [(p_2,\gamma_2)].[(p_1,\gamma_1)]\triangleright[(\widehat{p},v)],
\end{aligned}$$

to zaś jest wynikiem pożądanym.

Na koniec upewniamy się, że rozpatrywane przez nas działanie jest modelowane lokalnie na $\sigma^{\mathbb{R}}$. Rzecz jasna, jest to jedyna możliwa interpretacja formuły demistyfikacyjnej (7), my jednak wykonamy niezależny rachunek z użyciem stosownych izomorfizmów modelujących włókna (patrz: Def. 9-10-11.1), trzymając się rozumienia pojęcia „modelowania lokalnego” zaproponowanego w dowodzie Stw. 9-10-11.4. Wybieramy zatem (dowolnie) punkt $x\in B$, a nad nim (także dowolnie) – referencyjny punkt $\widehat{p}_*\in(\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathbb{V})_x$. W tym momencie możemy już wykorzystać swobodę wyboru referencyjnego punktu $p_* \in (\mathsf{F}_{\rm SO}\mathbb{V})_x$, kładąc $p_* \equiv \Xi(\widehat{p}_*)$. Na koniec dokonujemy wygodnych korekt wyborów reprezentantów rozpatrywanych orbit (j/w), aby ostatecznie dostać

$$[\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}\big([(p,\gamma)] \triangleright [(\widehat{p},v)]\big) = [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}\big(\big[\big(\Xi(\widehat{p}_*),\widetilde{\gamma}\big)\big] \triangleright [(\widehat{p}_*,\widetilde{v})]\big) \equiv [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}\big([(\widehat{p}_*,\widetilde{\gamma} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} \widetilde{v})]\big)$$

$$\equiv \quad \widetilde{\gamma} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} \widetilde{v} \equiv \big[\Xi(\widehat{p}_*)\big]_{\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\rm def}}\big(\big[\big(\Xi(\widehat{p}_*),\widetilde{\gamma}\big)\big]\big) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}\big([(\widehat{p}_*,\widetilde{v})]\big)$$

$$= \quad \big[\Xi(\widehat{p}_*)\big]_{\mathrm{Cliff}\circ\rho_{\rm def}}\big([(p,\gamma)]\big) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}\big([(\widehat{p},v)]\big),$$

co jest wynikiem satysfakcjonującym, który domyka dowód. □

I wreszcie w podsumowaniu czysto geometrycznej części wykładu w II semestrze wypowiadamy

Twierdzenie 3 (Klasyfikacyjne dla wiązek spinorowych)**.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Wiązka modułów Clifforda riemannowskiej zorientowanej wiązki wektorowej $(\mathbb{V},\mathrm{g})$ jest rozkładalna na sumę Whitneya podwiązek nieprzywiedlnych, tj. takich, których włókna są nieprzywiedlnymi modułami Clifforda. Przy tym o ile baza B wiązki jest spójna, liczba i typ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ wzgl. $\mathbb{H}$) nierównoważnych podwiązek nieprzywiedlnych jest określana przez Twierdzenia Klasyfikacyjne 2. i 3. z IX Wykładu z I semestru. W szczególności dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ i $q - p \equiv 0 \mod 4$ cięcie objętości $\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}} \in \Gamma(\mathscr{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}))$ określa rozkład rzeczywistej wiązki spinorowej $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$, nazywanej w tych okolicznościach **rzeczywistą wiązką Diraca riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V},\mathrm{g})$, na sumę Whitneya

$$\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \cong \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^+ \oplus_{\mathbb{R},B} \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^-$$

podwiązek własnych $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^{\pm}$ cięcia $\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}$ (stowarzyszonych z wartościami własnymi ± 1, odpowiednio), zwanych **rzeczywistymi chiralnymi podwiązkami Weyla**. Analogicznie dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$ i $p + q \equiv 0 \mod 2$ cięcie objętości $\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}} \in \Gamma(\mathscr{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g}))$ określa rozkład zespolonej wiązki spinorowej $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})$, nazywanej w tych okolicznościach **zespoloną wiązką Diraca riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V},\mathrm{g})$, na sumę Whitneya

$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g}) \cong \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^+ \oplus_{\mathbb{C},B} \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^-$$

podwiązek własnych $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V},\mathrm{g})^{\pm}$ cięcia $\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}$ (stowarzyszonych z wartościami własnymi ± 1, odpowiednio), zwanych **zespolonymi chiralnymi podwiązkami Weyla**.

Dowód: Wszystkie konstatacje wypowiedziane w treści twierdzenia są prostymi konsekwencjami dotychczasowych ustaleń, z których wyłania się spójny obraz wiązki Clifforda jako geometryzacji struktury algebry Clifforda (w istocie wiązki algebr Clifforda) zgodnej z własnościami tej ostatniej oraz wiązki modułów Clifforda jako geometryzacji struktury modułu Clifforda (w istocie wiązki modułów Clifforda) zgodnej z własnościami tego ostatniego, przy czym własności te są szczególnie wyraziście widoczne w obrazie lokalnym w modelach zaproponowanych w Uwagach 1 i 2, odpowiednio, a zarazem w oczywisty sposób zachowywane przez utożsamienia dokonywane nad przecięciami dziedzin lokalnych trywializacji wobec zawierania $\widehat{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R}) \subset \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^0 \equiv \mathrm{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^0 \otimes_{\mathbb{R}} 1 \subset \mathrm{Cliff}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^{p,q})^0$. Jako ilustrację tej reguły prześledzimy mechanizm utożsamiania ze sobą nad $\mathcal{O}_{ij}$ podwiązek własnych cięcia objętości z obrazu lokalnych trywializacji

$$\mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K}} \cong \big(\mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K},+}\big) \oplus_{\mathbb{K},\mathcal{O}_i} \big(\mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K},-}\big).$$

Niechaj zatem

$$(x,v^{\pm}) \in \mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K},\pm},$$

czyli

$$(x,\omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}) \equiv \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x) \triangleright (x,v^{\pm}) = \pm(x,v^{\pm}).$$

Ilekroć $x \in \mathcal{O}_{ij}$, dokonujemy utożsamienia

$$(x,v^{\pm},i) \sim \big(x,\widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm},j\big).$$

Uwzględniwszy (5) (i parzystość odwzorowań przejścia), stwierdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x) \triangleright \big(x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}\big) = \big(x, \omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} \big(\widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}\big)\big) = \big(x, \omega^{\mathbb{K}} \cdot \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}\big)$$

$$= \quad \big(x, \widehat{g}_{ji}(x) \cdot \omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}\big) = \big(x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} \big(\omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}\big)\big) = \pm\big(x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}\big)\,,$$

że składowe o różnej chiralności nie mieszają się ze sobą pod wpływem utożsamienia, co przesądza o globalnej naturze rozkładu wiązki Diraca na chiralne podwiązki Weyla. □

Powyższy wynik zamyka czysto geometryczną część studium wiązek spinorowych. Różniczkowanie czas zacząć!

Ba Dum Tss. . .