METODY ALGEBRY I GEOMETRII WYŻSZEJ W FIZYCE II W CZASACH ZARAZY
12., 13., 14. I 15. WYKŁAD ZDALNY
REDUKCJA, DEZORIENTACJA, OBSTRUKCJA I PROLONGACJA, CZYLI W CO SIĘ BAWIĆ, GDY PADA DESZCZ

Spis treści

Omówiona przez nas ze szczegółami koncepcja geometryzacji w formie wiązki stowarzyszonej bytów w istocie swej algebraicznych, jakimi są zbiory z działaniem grupy, podpowiada naturalny schemat konstrukcji wiązki spinorowej, rozumianej jako geometryzacja nad daną rozmaitoście metryczną (M, g) spinorowego modułu cliffordowskiego właśnie: Oto „wystarczy" stowarzyszyć rzeczony moduł za pośrednictwem spinorowej nań realizacji grupy $\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})$ nakrywającej grupę obrotów modelowego reprezentanta $\mathbb{R}^{p,q}$ danej globalnie izoklasy włókna wiązki stycznej nad daną rozmaitością metryczną (M, g) z wiązką główną nad M o grupie strukturalnej $\mathrm{Spin}(p,q;\mathbb{R})$ pozostającą – co kluczowe z interpretacyjnego punktu widzenia – w takiej relacji z wiązką styczną $\mathsf{T}M$ (występującą tu w roli referencyjnej geometryzacji przestrzeni kwadratowej), która pozwoli nam myśleć o utworzonej tym sposobem wiązce stowarzyszonej $\mathscr{S}(M,\mathrm{g})$ jako o gładkiej dystrybucji nad $M \ni x$ modułów spinorowych $\mathscr{S}(M,\mathrm{g})_x$ dla („pierwiastków kwadratowych" z) przestrzeni kwadratowych $(\mathsf{T}_xM, \mathrm{g}(x))$. Identyfikacja stosownej wiązki głównej wymaga przywołania z Rozdz. 9-10-11.1 poprzedniego cyklu wykładów izomorfizmu wiązek wektorowych

$$\left(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}}\right) \cong \left(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times_{\rho_{\mathrm{def}}} \mathbb{K}^{\times N}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times_{\rho_{\mathrm{def}}}\mathbb{K}^{\times N}}\right)$$

Istotnie, odniósłszy powyższe do wiązki stycznej nad rozmaitością metryczną (M, g) wymiaru $\dim M \equiv D$,

$$\left(\mathsf{T}M, M, \mathbb{R}^{\times D}, \pi_{\mathsf{T}M}\right) \cong \left(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M \times_{\rho_{\mathrm{def}}} \mathbb{R}^{\times D}, M, \mathbb{R}^{\times D}, \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M\times_{\rho_{\mathrm{def}}}\mathbb{R}^{\times D}}\right),$$

i dostrzegłszy w tych okolicznościach (w obecności metryki na M) w rozmaitości stowarzyszanej $\mathbb{R}^{\times D}$ w modelu po prawej stronie znaku $\cong$ nośnik struktury przestrzeni kwadratowej modelującej $(\mathsf{T}_xM, \mathrm{g}(x))$, której „pierwiastek" kwadratowy (w rozumieniu konstrukcji spinora czystego Cartana uogólniającej tę z Rozdz. 3.2 Wykładu 9. z I semestru) jest wzmiankowanym wcześniej modułem spinorowym stowarzyszanym z poszukiwaną przez nas wiązką główną

$$\left(\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathsf{T}M, M, \mathrm{Spin}(p, D-p;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathsf{T}M}\right)$$

o grupie strukturalnej $\mathrm{Spin}(p, D-p;\mathbb{R})$, dostrzegamy bez trudu możliwość naturalnej realizacji pożądanego schematu konstrukcyjnego: Należy „wyodrębnić", o ile jest to możliwe, z wiązki baz $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M$ wiązki stycznej podwiązkę $\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathsf{T}M \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M$ zorientowanych baz pseudoortonormalnych (czyli wiązkę główną o grupie strukturalnej $\mathrm{SO}(p, D-p;\mathbb{R})$), a następnie skonstruować wiązkę torsorów grupy $\mathrm{Spin}(p, D-p;\mathbb{R})$ pozostającą w relacji *strukturalnej* z ową podwiązką będącej geometryzacją nakrycia uniwersalnego

$$(1) \qquad \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Spin}(p, D-p;\mathbb{R}) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad.}}} \mathrm{SO}(p, D-p;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{1}$$

z Tw. 1 z Wykładu 9. z I semestru. Szczęśliwie podana przez nas definicja morfizmu wiązek głównych (Def. 5-6.4) jest na tyle pojemna, że pozwala nam sformalizować kryterium „strukturalności" dyskutowanej relacji – chodzi mianowicie o epimorfizm wiązek głównych

$$\big(\Xi, \mathrm{id}_B, \underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}.}\big) \ :\ \big(\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathsf{T}M, M, \mathrm{Spin}(p, D-p;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{Spin}}\mathsf{T}M}\big) \longrightarrow \big(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathsf{T}M, M, \mathrm{SO}(p, D-p;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathsf{T}M}\big)$$

Konstrukcja „wiązki nakrywającej" dla zadanej „bazowej" wiązki głównej (wraz z odnośnym epimorfizmem wiązek głównych) jest jedną z klasycznych konstrukcji w teorii wiązek głównych i zostanie omówiona w dalszej części wykładu, który zawiera również studium topologicznej obstrukcji, jaką może ona napotkać. Pozostaje zatem odpowiedzieć sobie na pytanie o istnienie podwiązki $\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathsf{T}M \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M$. Także i ono należy do kanonu zagadnień teorii wiązek głównych i jako takie zostanie zanalizowane poniżej w relacji do pojęć algebraicznych: struktury metrycznej i orientacji na przestrzeni wektorowej, a zarazem ze zwróceniem uwagi na ewentualną obstrukcję topologiczną, która w tym wypadku, tak jak i w poprzednim, poddaje się wygodnej kwantyfikacji w terminach stosownej kohomologii (snopowej).

1. Redukcja – ogólnie i po czesku

Pierwszą z konstrukcji, które musimy zrozumieć na drodze ku geometryzacji modułów spinorowych, jest „wyodrębnianie" z danej wiązki głównej (w naszym przypadku – wiązki baz wiązki stycznej) podwiązki o zredukowanej grupie strukturalnej (w naszym przypadku – podwiązki zorientowanych baz pseudoortonormalnych).

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj G, H będą grupami Liego, dla których określony jest monomorfizm grup Liego

$$\breve{\varphi} \ :\ \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}\,.$$

Redukcja wiązki głównej wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ (zwana także **redukcją grupy strukturalnej**) **wzdłuż monomorfizmu** $\breve{\varphi}$ to para

$$\big((\mathsf{P}_{\mathrm{H}}, B, \mathrm{H}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{H}}}), (\Phi, \mathrm{id}_B, \breve{\varphi})\big)$$

złożona z

- wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{H}}, B, \mathrm{H}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{H}}})$;
- morfizmu wiązek głównych

$$(\Phi, \mathrm{id}_B, \breve{\varphi}) \ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{H}}, B, \mathrm{H}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{H}}}) \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})\,,$$

  którego wszystkie składowe są gładkimi włożeniami w rozumieniu Def. 0.18.

Wyznaczaną przezeń podwiązkę

$$\big(\Phi(\mathsf{P}_{\mathrm{H}}), B, \breve{\varphi}(\mathrm{H}), \pi_{\Phi(\mathsf{P}_{\mathrm{H}})} \equiv \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\Phi(\mathsf{P}_{\mathrm{H}})}\big)$$

określamy mianem **wiązki głównej zredukowanej**.

Alternatywnego a równoważnego spojrzenia na zagadnienie redukcji wiązki głównej dostarcza

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 1. Redukcja wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ wzdłuż monomorfizmu $\breve{\varphi}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące tejże wiązki i stowarzyszone z nim jej trywializacje lokalne, dla których odwzorowania przejścia przyjmują wartości w podgrupie $\breve{\varphi}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{G}$. W takiej sytuacji mówimy, że grupa strukturalna wiązki $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ jest **redukowalna** do $\breve{\varphi}(\mathrm{H})$.

Dowód: Załóżmy na początku, że istnieje wiązka $(\mathsf{P}_{\mathrm{H}}, B, \mathrm{H}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{H}}})$ i wyznaczona przez nią podwiązka $(\Phi(\mathsf{P}_{\mathrm{H}}), B, \breve{\varphi}(\mathrm{H}), \pi_{\Phi(\mathsf{P}_{\mathrm{H}})})$. Wybierzmy pokrycie trywializujące tej ostatniej, $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, a wraz z nim – odnośne trywializacje lokalne $\tau_i^{\breve{\varphi}(\mathrm{H})} \ :\ \pi^{-1}_{\Phi(\mathsf{P}_{\mathrm{H}})}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \breve{\varphi}(\mathrm{H})$ o odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^{\breve{\varphi}(\mathrm{H})} \ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \breve{\varphi}(\mathrm{H})$. Następnie zdefiujmy odwzorowania (jawnie ciągłe wzgl. gładkie)

$$\tau_i^{\mathrm{G}} \ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \ :\ p \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_i^{\breve{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e_{\mathrm{G}}), p\big)\big)\,.$$

W świetle Stw. 5-6.1 odwzorowania te są G-ekwiwariantne. Bez trudu konstruujemy ich odwrotności:

$$\tau_i^{\mathrm{G}\,-1} \;:\; \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \;:\; (x,g) \longmapsto \tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\,,$$

upewniwszy się, że wobec relacji $\pi_{\Phi(\mathsf{P}_{\mathrm{H}})}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ zachodzą równości:

$$\tau_i^{\mathrm{G}\,-1} \circ \tau_i^{\mathrm{G}}(p) = \tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e_{\mathrm{G}}\big) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e_{\mathrm{G}}), p\big) \equiv p$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\tau_i^{\mathrm{G}} \circ \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}(x,g) = \tau_i^{\mathrm{G}}\big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\big) \\
= \;& \Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\big), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\Big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}\Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\big), e_{\mathrm{G}}\Big), \\
& \tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\Big)\Big) \\
= \;& \Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\Big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}), e_{\mathrm{G}}\big), \\
& \tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\Big)\Big) \\
= \;& \Big(x, \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}), \tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\big)\Big) \equiv (x,g)\,.
\end{aligned}$$

Są to zatem trywializacje lokalne wiązki P_{G}, a przy tym odnośne odwzorowania przejścia, wyznaczane w rachunku bezpośrednim:

$$\begin{aligned}
&\tau_i^{\mathrm{G}} \circ \tau_j^{\mathrm{G}\,-1}(x,g) = \tau_i^{\mathrm{G}}\big(\tau_j^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\big) \\
= \;& \Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_j^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\big), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\Big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}\Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_j^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\big), e_{\mathrm{G}}\Big), \\
& \tau_j^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\Big)\Big) \\
= \;& \Big(x, \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}), \tau_j^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\big)\Big) \\
= \;& \Big(x, \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}), \tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}\big(x, g_{ij}^{\check{\varphi}(\mathrm{H})}(x)\big) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} g\big)\Big) \\
= \;& \Big(x, \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}), \tau_i^{\check{\varphi}(\mathrm{H})\,-1}(x,e_{\mathrm{G}}) \lhd_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \big(g_{ij}^{\check{\varphi}(\mathrm{H})}(x) \cdot_{\mathrm{G}} g\big)\big)\Big) \\
= \;& \big(x, g_{ij}^{\check{\varphi}(\mathrm{H})}(x) \cdot_{\mathrm{G}} g\big)\,,
\end{aligned}$$

należą do $\check{\varphi}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{G}$.

I odwrotnie, niechaj $\tau_i^{\mathrm{G}} \;:\; \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G},\ i \in I$ będą trywializacjami lokalnymi wiązki P_{G}, stowarzyszonymi z pokryciem $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, o odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^{(\mathrm{H})} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \check{\varphi}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{G}$. Jako że każdy monomorfizm jest izomorfizmem na swój obraz, możemy jednoznacznie zdefiniować odwzorowania

$$h_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{H}\,, \quad (i,j) \in \big\langle I^{\times 2}\big\rangle_{\mathscr{O}}$$

narzucając warunki

$$\check{\varphi} \circ h_{ij} = g_{ij}^{(\mathrm{H})}\,.$$

Dla dowolnych $(i,j,k) \in \big\langle I^{\times 3}\big\rangle_{\mathscr{O}}$ zachodzi tożsamość

$$\check{\varphi} \circ (h_{jk} \cdot \mathrm{Inv} \circ h_{ik} \cdot h_{ij}) \restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} = (g_{jk}^{(\mathrm{H})} \cdot \mathrm{Inv} \circ g_{ik}^{(\mathrm{H})} \cdot g_{ij}^{(\mathrm{H})}) \restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\mathrm{G}}\,,$$

z której wobec monomorficznego charakteru $\check{\varphi}$ wynika warunek 1-kocyklu

$$(h_{jk} \cdot \mathrm{Inv} \circ h_{ik} \cdot h_{ij}) \restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\mathrm{H}}\,.$$

Możemy zatem przywołać Tw. 2-3-4.2 i zrekonstruować nad $\mathscr{O}$ wiązkę główną $(\mathsf{P}_{\mathrm{H}},\ B,\mathrm{H},[\mathrm{pr}_1])$ o grupie strukturalnej H, przestrzeni totalnej

$$\mathsf{P}_{\mathrm{H}} \equiv \big(\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i \times \mathrm{H})\big)/_{\sim_{h_{\cdot\cdot}}}$$

i odwzorowaniach przejścia h_{ij} stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi $[\tau_i]$ zdefiniowanymi w dowodzie rzeczonego twierdzenia. Wykorzystując te homeomorfizmy (wzgl. dyfeomorfizmy) oraz ich odpowiedniki τ_i^{G} na P_{G} w połączeniu z zanurzeniami topologicznymi (wzgl. włożeniami) $\check{\varphi}$, określamy lokalne zanurzenia topologiczne (wzgl. włożenia)

$$\Phi_i\ :\ [\mathrm{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{id}_B\times\check{\varphi}} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \xrightarrow{\tau_i^{\mathrm{G}\,-1}} \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\,, \quad i\in I\,,$$

odwzorowujące włókna P_{H} we włókna P_{G} w sposób ewidentnie H-ekwiwariantny (wszak $\check{\varphi}$ jest homomorfizmem grup). Pozostaje zatem upewnić się, że zanurzenia te są ograniczeniami (do elementów pokrycia trywializującego) zadanego globalnie morfizmu wiązek głównych, co czynimy w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym nad dowolnym punktem $[(x,i,h)]\in[\mathrm{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$,

$$\begin{aligned}
&\Phi_j\big([(x,i,h)]\big) \equiv \tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\circ(\mathrm{id}_B\times\check{\varphi})\circ[\tau_j]\big([(x,i,h)]\big)\\
=\ &\tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\circ(\mathrm{id}_B\times\check{\varphi})\circ[\tau_j]\big(\big[\big(x,j,h_{ji}(x)\cdot_{\mathrm{H}} h\big)\big]\big) = \tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\big(x,\check{\varphi}\big(h_{ji}(x)\cdot_{\mathrm{H}} h\big)\big)\\
=\ &\tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\big(x,\check{\varphi}\circ h_{ji}(x)\cdot_{\mathrm{G}}\check{\varphi}(h)\big) = \tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\big(x,g_{ji}^{(\mathrm{H})}(x)\cdot_{\mathrm{G}}\check{\varphi}(h)\big) = \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x,\check{\varphi}(h)\big)\\
\equiv\ &\Phi_i\big([(x,i,h)]\big)\,.
\end{aligned}$$

□

Warto zauważyć, że redukcja wiązki głównej wzdłuż monomorfizmu $\mathrm{H}\hookrightarrow\mathrm{G}$ grup strukturalnych jest w naturalny sposób powiązana z „efektem Higgsa", czyli istnieniem globalnie gładkiego cięcia („pola Higgsa") wiązki stowarzyszonej z wiązką redukowaną poprzez działanie indukowane, jak w Tw. 7-8.4, na przestrzeni jednorodnej G/H z lewego działania regularnego na grupie G. To jednak temat na osobny wykład w ramach zupełnie innego kursu…

2. Redukcja metryczna

Wprowadzenie iloczynu skalarnego na przestrzeni liniowej pozwala wyróżnić klasę baz diagonalizujących tenże iloczyn skalarny i pozostających względem siebie w relacji (pseudo)ortogonalności, czyli otrzymywanych jedna z drugiej przez zastosowanie izometrii. W kontekście naszych rozważań nad geometryzacją modułów spinorowych pojawia się zatem naturalne pytanie o możliwość wyodrębnienia z wiązki baz wiązki wektorowej podwiązki jej baz (pseudo)ortonormalnych w obecności struktury metrycznej. Pozotywnej (zasadniczo) odpowiedzi na tak postawione pytanie dostarcza poniższa dyskusja, którą zaczynamy od stosownej geometryzacji algebraicznego iloczynu skalarnego.

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Struktura metryczna na wiązce wektorowej** $(\mathbb{V},B,\mathbb{R}^{\times N},\pi_{\mathbb{V}})$ (nad ciałem bazowym $\mathbb{R}$) to gładkie cięcie (globalne)

$$\mathrm{g}\ :\ B \longrightarrow \mathbb{V}^*\otimes_{\mathbb{R},B}\mathbb{V}^*$$

kwadratu tensorowego wiązki dualnej $\mathbb{V}^*$, rozumianego jak w Def. 2-3-4.6 i 2-3-4.8, którego ograniczenie do dowolnego włókna $\mathbb{V}_x\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{V}_x$ wiązki $\mathbb{V}\otimes_{\mathbb{R},B}\mathbb{V}$ jest niezwyrodniałą symetryczną formą $\mathbb{R}$-liniową o stałej (nad bazą B) sygnaturze, zadającą formę kwadratową

$$Q_{\mathrm{g}(x)}\ :\ \mathbb{V}_x \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ v\longmapsto \mathrm{g}(x)(v\otimes_{\mathbb{R}} v)\,.$$

Sygnaturę tej ostatniej nazywamy **sygnaturą struktury metrycznej**. W przypadku sygnatury postaci $(p,0)$, $p\in\mathbb{N}^\times$ mówimy o **riemannowskiej strukturze metrycznej**.

Specjalizacja powyższej definicji do interesujących nas okoliczności geometrycznych przybiera postać

Definicja 3. Struktura metryczna na rozmaitości różniczkowalnej to struktura metryczna na wiązce stycznej nad tą rozmaitością. Parę (M, g) utworzoną przez rozmaitość różniczkowalną $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ oraz strukturę metryczną g na niej określamy mianem **rozmaitości metrycznej**.

Mamy uspokajające (choć tylko, gdy nie mamy czasu, by pomyśleć o czasie i związanej z nim sygnaturze)

Twierdzenie 2. Na każdej wiązce wektorowej istnieje struktura metryczna riemannowska. W szczególności więc struktura taka istnieje na każdej rozmaitości różniczkowalnej.

Dowód: Niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową i niech $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ będzie jej pokryciem trywializującym. Trywializacje lokalne $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$ pozwalają zaindukować lokalne struktury metryczne riemannowskie na $\mathbb{V}$ postaci

$$\mathrm{g}_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathbb{R} : (v_1, v_2) \longmapsto \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(N)}}\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(v_1), \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(v_2)\big),$$

tym samym promując odwzorowania $\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i$ do rangi izometrii (lokalnych). Następnie wykorzystujemy rozkład jedności $\{\rho_i\}_{i \in I}$ podporządkowany $\mathscr{O}$ do utworzenia ze struktur lokalnych struktury globalnej

$$\mathrm{g} := \sum_{i \in I} \rho_i \circ \pi_{\mathbb{V} \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}}(\cdot) \triangleright \widetilde{\mathrm{g}}_i,$$

w której zapisie $\widetilde{\mathrm{g}}_i$ są odwzorowaniami $\mathbb{R}$-liniowymi na włóknach $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}, B} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ określonymi (jednoznacznie) przez g_i. □

Mając do dyspozycji wszystkie nieodzowne definicje i będąc pewnymi istnienia opisywanych przez nie obiektów geometrycznych, możemy już wysłowić

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychchczasowy. Niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem $\mathbb{R}$). Dowolna struktura metryczna $\mathrm{g} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze $(p, N - p)$, $p \in \overline{0, N}$ na $\mathbb{V}$ określa redukcję wiązki reperów $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ wzdłuż włożenia kanonicznego

$$\jmath_{\mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})} : \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R}) \rightarrowtail \mathrm{GL}(N; \mathbb{R}).$$

Otrzymana tym sposobem wiązka główna zredukowana nosi miano **wiązki reperów ortonormalnych** (lub **wiązki baz ortonormalnych**) **wiązki wektorowej** $\mathbb{V}$.

Dowód: W świetle Tw. 1 wystarczy wskazać trywializacje lokalne wiązki głównej $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ o odwzorowaniach przejścia przyjmujących wartości w podgrupie $\mathrm{O}(p, N{-}p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(N; \mathbb{R})$. Teza Stw. 5-6.3 czyni to zadanie równoważnym zadaniu znalezienia rodziny cięć lokalnych $\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ stowarzyszonych z pewnym pokryciem otwartym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B, które w punktach $x \in \mathcal{O}_{ij}$ pozostają w relacji

$$\sigma_j(x) = \sigma_i(x) \triangleleft g_{ij}(x) \equiv \sigma_i(x) \circ g_{ij}(x) \tag{2}$$

określanej przez odwzorowania przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{O}(p, N - p; \mathbb{R})$. Rozważmy zatem dowolne cięcia lokalne $s_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ stowarzyszone z pewnym pokryciem otwartym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$. Wykorzystując konstrukcję przedstawioną w treści Rozdz. 9-10-11.1, każdej z par $(s_i(x), e_a)$, $a \in \overline{1, N}$ o drugim składniku będącym elementem bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^{\times N}$ możemy przyporządkować element bazy włókna $\mathbb{V}_x$ dany wzorem

$$[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big(s_i(x), x, e_a\big)\big]\big) = s_i(x)(e_a) =: s_{i\,a}(x).$$

Przywoławszy następnie Twierdzenia Sylvestera–Jacobiego (w odniesieniu do form kwadratowych $Q_{\mathrm{g}(x)}$, $x \in \mathcal{O}_i$, względem których odnośne układy bazowe $\{s_{i\,a}(x)\}_{a \in \overline{1,N}}$ są w oczywisty sposób niezwyrodniałe), możemy następnie przeprowadzić ortogonalizację Grama–Schmidta, która dostarcza nam nowych układów bazowych $\{\sigma_{i\,a}(x)\}_{a \in \overline{1,N}}$ o gładkiej zależności od punktu w bazie $x \in \mathcal{O}_i$. Istotnie, przejście od bazy wyjściowej $\{s_{i\,a}(x)\}_{a \in \overline{1,N}}$ do bazy $Q_{\mathrm{g}(x)}$-ortogonalnej $\{\sigma_{i\,a}(x)\}_{a \in \overline{1,N}}$ jest superpozycją operacji algebraicznych (więc gładkich) o argumentach zależących od x poprzez

$s_{i\,a}$ oraz g, co na mocy poczynionych założeń gwarantuje rzeczoną gładkość $\sigma_{i\,a}$. Nowy układ bazowy spełnia – wprost z konstrukcji, a dla dowolnych $a, b \in \overline{1, N}$ oraz $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$ – tożsamości

$$\mathrm{g}(x)\big(\sigma_{i\,a}(x), \sigma_{i\,b}(x)\big) \equiv \Phi_{Q_{\mathrm{g}(x)}}\big(\sigma_{i\,a}(x), \sigma_{i\,b}(x)\big) = \varepsilon_a\,\delta_{ab}$$

wyrażone przez układ skalarów $\varepsilon_a \in \{-1, 1\}$ zdeterminowany przez sygnaturę struktury metrycznej. Bez straty ogólności rozważań (po dokonaniu stosownej permutacji indeksów bazy) możemy przy tym założyć, że

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_p = 1 = -\varepsilon_{p+1} = -\varepsilon_{p+2} = \ldots = -\varepsilon_N\,.$$

Układu tego możemy użyć do określenia izomorfizmów

$$\sigma_i(x)\ :\ \mathbb{K}^{\times N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$$

będących jedynymi $\mathbb{R}$-liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\sigma_i(x)(e_a) \coloneqq \sigma_{i\,a}(x)\,, \quad a \in \overline{1, N}\,,$$

a zatem – w szczególności – zależącymi gładko od punktu w bazie. Tym samym uzyskujemy nowe cięcia lokalne

$$\sigma_i\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\ :\ x \longmapsto \sigma_i(x)\,,$$

które na mocy Stw. 5-6.3 wyznaczają trywializacje lokalne

$$\tau_{\sigma_i}\ :\ \sqcup_{x \in \mathcal{O}_i} \mathrm{Iso}_{\mathbb{R}}\,(\mathbb{R}^{\times N}, \mathbb{V}_x) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(N; \mathbb{R})\,,$$

a nadto określają bazy we włóknach $\mathbb{V}$ postaci

$$[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big(\sigma_i(x), e_a\big)\big]\big) = \sigma_i(x)(e_a) \equiv \sigma_{i\,a}(x)\,, \quad a \in \overline{1, N}\,,\ x \in \mathcal{O}_i\,,\ i \in I\,.$$

Wyznaczywszy odnośne odwzorowania przejścia,

$$\tau_{\sigma_i} \circ \tau_{\sigma_j}^{-1}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \times \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \circlearrowleft\ :\ (x, A) \longmapsto \big(x, g_{ij}(x) \boxdot A\big)\,,$$

o reprezentacji macierzowej

$$g_{ij}(x) = g_{ij\,ab}(x) \triangleright e^*_a \otimes_{\mathbb{R}} e_b\,,$$

otrzymujemy relacje (2), których obrazem względem izomorfizmu $[\widehat{\mathrm{ev}}]$ są relacje

$$\begin{aligned} \sigma_{j\,a}(x) &\equiv [\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big(\sigma_j(x), e_a\big)\big]\big) = [\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big(\sigma_i(x) \circ g_{ij}(x), e_a\big)\big]\big) \\ &\equiv [\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big(\sigma_i(x), g_{ij}(x)(e_a)\big)\big]\big) = [\widehat{\mathrm{ev}}]\big(g_{ij\,ab}(x)[\triangleright]\big[\big(\sigma_i(x), e_b\big)\big]\big) \\ &= g_{ij\,ab}(x) \triangleright [\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big(\sigma_i(x), e_b\big)\big]\big) \equiv g_{ij\,ab}(x) \triangleright \sigma_{i\,b}(x)\,. \end{aligned}$$

Te pozwalają nam ustalić, na podstawie wcześniejszych rezultatów, tożsamości

$$\begin{aligned} &\mathrm{g}(x)\big(\sigma_{i\,a}(x), \sigma_{i\,b}(x)\big) = \varepsilon_a\,\delta_{ab} \equiv \mathrm{g}(x)\big(\sigma_{j\,a}(x), \sigma_{j\,b}(x)\big) \\ = \;& g_{ij\,ac}(x) \cdot g_{ij\,bd}(x) \cdot \mathrm{g}(x)\big(\sigma_{i\,c}(x), \sigma_{i\,d}(x)\big)\,, \end{aligned}$$

które wyrażają pożądaną własność skonstruowanych przez nas odwzorowań przejścia względem metryki g. □

Uwaga 1. Wiązka reperów ortonormalnych wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ wyposażonej w strukturę metryczną g o sygnaturze $(p, N-p)$ jest wiązką główną

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}, B, \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}\restriction_{\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}}\big)$$

o grupie strukturalnej $\mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$. Naturalnym modelem dla $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$ jest przestrzeń

$$\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V} \coloneqq \bigsqcup_{x \in B} \mathrm{Iso}_{\mathbb{R}}\big(\mathbb{R}^{\times N}, \mathbb{V}_x\big)^{\mathrm{g}}\,,$$

w której zapisie włókno $\mathrm{Iso}_{\mathbb{R}}\big(\mathbb{R}^{\times N},\mathbb{V}_x\big)^{\mathrm{g}} \ni \beta_x$ jest zbiorem bijektywnych izometrii

$$\beta_x \;:\; \mathbb{R}^{p,N-p} \xrightarrow{\cong} \big(\mathbb{V}_x, Q_{\mathrm{g}(x)}\big)\,,$$

przy czym topologia i struktura różniczkowalna na tak określonej przestrzeni totalnej wiązki są określone analogicznie jak w przypadku wiązki reperów $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ z Def. 5-6.1.

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $(\mathbb{V},B,\mathbb{R}^{\times N},\pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem $\mathbb{R}$). Dowolna redukcja wiązki reperów $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ wzdłuż włożenia kanonicznego

$$\jmath_{\mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})} \;:\; \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R}) \rightarrowtail \mathrm{GL}(N;\mathbb{R})$$

dla pewnego $p \in \overline{0,N}$ wyznacza na $\mathbb{V}$ strukturę metryczną $\mathrm{g} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze $(p,N-p)$.

Dowód: Metrykę na włóknach wiązki $\mathbb{V}$ definiujemy punkt po punkcie nad jej bazą, używając w tym celu cięć (lokalnych) wiązki reperów ortonormalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$ zrekonstruowanej z odwzorowań przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})$ wiązki $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ zredukowanych do $\mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(N;\mathbb{R})$. Niechaj zatem $\beta_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$ będzie dowolnym takim cięciem nad zbiorem $\mathcal{O}_i \ni x$ należącym do pokrycia trywializującego $\mathbb{V}$ (nad którym rekonstruujemy $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$), określającym trywializację lokalną wiązki $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$. Iloczyn skalarny na $\mathbb{V}_x$ ustanawiamy formułą

$$\mathrm{g}_i \;:\; \mathbb{V}_x \times \mathbb{V}_x \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; (v,w) \longmapsto \delta_{\mathrm{E}}^{(p,N-p)}\big(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)\big)\,,$$

której struktura przesądza o gładkiej zależności odwzorowań g_i od punktu w $\mathcal{O}_i$, jak również o ich niezwyrodnieniu i symetrii względem transpozycji argumentów wektorowych. Przy tym dowolne dwa cięcia lokalne $\beta_i, \widetilde{\beta}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow, \mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$ są powiązane przez pewne odwzorowanie (gładkie) $h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})$ zgodnie z formułą

$$\widetilde{\beta}_i(x) = \beta_i(x) \circ h_i(x)\,, \quad x \in \mathcal{O}_i\,,$$

co zapewnia niezależność definicji g_i od wyboru cięcia lokalnego,

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}^{(p,N-p)}\big(\widetilde{\beta}_i(x)^{-1}(v), \widetilde{\beta}_i(x)^{-1}(w)\big) &= \delta_{\mathrm{E}}^{(p,N-p)}\big(h_i(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(v), h_i(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(w)\big) \\ &= \delta_{\mathrm{E}}^{(p,N-p)}\big(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)\big)\,.\end{aligned}$$

Pozostaje upewnić się, że tak zadane (pseudo)riemannowskie metryki lokalne wyznaczają metrykę globalną. W tym celu rozważmy punkt $x \in \mathcal{O}_{ij}$, nad którym cięcia lokalne β_i i β_j pozostają w relacji

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x)\,.$$

Ortogonalny charakter odwzorowań przejścia pozwala stwierdzić, że

$$\begin{aligned}\mathrm{g}_j(v,w) &\equiv \delta_{\mathrm{E}}^{(p,N-p)}\big(\beta_j(x)^{-1}(v), \beta_j(x)^{-1}(w)\big) \\ &= \delta_{\mathrm{E}}^{(p,N-p)}\big(g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(v), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(w)\big) \\ &= \delta_{\mathrm{E}}^{(p,N-p)}\big(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)\big) \equiv \mathrm{g}_i(v,w)\,.\end{aligned}$$

i na tej podstawie wnioskować o istnieniu odwzorowania globalnie gładkiego

$$\mathrm{g} \;:\; B \longrightarrow \mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^*\,, \qquad \mathrm{g}\restriction_{\mathcal{O}_i} \equiv \mathrm{g}_i$$

o pożądanych własnościach. □

W fizykalnie istotnych okolicznościach występowania sygnatury mieszanej intuicja wywiedziona z kursu algebry liniowej (w jego części poświęconej studium przestrzeni kwadratowych, czy ogólniej – hermitowskich) znajduje potwierdzenie w

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem bazowym $\mathbb{R}$). Struktura metryczna $\mathrm{g} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze $(p, N-p)$, $p \in \overline{1, N-1}$ istnieje na $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{V}$ można przedstawić jako sumę Whitneya

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}^+ \oplus_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^- \tag{3}$$

podwiązek wektorowych:

$$\left(\mathbb{V}^+, B, \mathbb{R}^{\times p}, \pi_{\mathbb{V}} \restriction_{\mathbb{V}^+}\right)$$

oraz

$$\left(\mathbb{V}^-, B, \mathbb{R}^{\times N-p}, \pi_{\mathbb{V}} \restriction_{\mathbb{V}^-}\right),$$

przy czym odnośne włókna zadają wówczas rozkład włókna wiązki $\mathbb{V}$ na sumę ortogonalną

$$\forall_{x \in B} \ : \ \mathbb{V}_x = \mathbb{V}_x^+ \textcircled{\perp}_{Q_{\mathrm{g}(x)}} \mathbb{V}_x^-$$

zgodny z tezą Twierdzenia Sylvestera o bezwładności, tj. taki, przy którym

$$\pm Q_{\mathrm{g}(x)} \restriction_{\mathbb{V}_x^\pm} > 0\,,$$

i podwiązki $\mathbb{V}^\pm$ są maksymalne w tym sensie, że nie istnieje podwiązka wektorowa $\mathbb{W}^+ \subset \mathbb{V}$ o własnościach

$$\mathbb{W}^+ \supsetneq \mathbb{V}^+ \qquad \wedge \qquad Q_{\mathrm{g}} \restriction_{\mathbb{W}^+} > 0 \qquad \wedge \qquad \mathbb{W}^+ \oplus_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}^- = \mathbb{V}\,,$$

ani też podwiązka wektorowa $\mathbb{W}^- \subset \mathbb{V}$ o własnościach

$$\mathbb{W}^- \supsetneq \mathbb{V}^- \qquad \wedge \qquad Q_{\mathrm{g}} \restriction_{\mathbb{W}^-} < 0 \qquad \wedge \qquad \mathbb{V}^+ \oplus_{\mathbb{K},B} \mathbb{W}^- = \mathbb{V}\,.$$

W takim przypadku podwiązkę $\mathbb{V}^+$ nazywamy **maksymalną podwiązką przestrzenną wiązki** $\mathbb{V}$, podwiązkę $\mathbb{V}^-$ zaś – **maksymalną podwiązką czasową wiązki** $\mathbb{V}$.

Dowód: Załóżmy najpierw, że dany jest rozkład (3) i niechaj $\mathrm{g_R} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^*)$ będzie riemannowską strukturą metryczną na $\mathbb{V}$ skonstruowaną w dowodzie Tw. 2, orzekającego o jej istnieniu. Postulowaną strukturę metryczną g o nietrywialnej sygnaturze otrzymujemy, położywszy

$$\mathrm{g} := \mathrm{g_R} \restriction_{\mathbb{V}^+ \times_B \mathbb{V}^+} \oplus \left(-\mathrm{g_R} \restriction_{\mathbb{V}^- \times_B \mathbb{V}^-}\right).$$

Dowód implikacji odwrotnej wymaga znajomości „efektu Higgsa" i dyskusji maksymalnych podgrup zwartych grupy Lorentza (alternatywne dowody, jak ten pochodzący od Gilkeya, mają poważne luki logiczne), więc pojawi się w innych okolicznościach dydaktycznych. □

W kontekście geometryzacji algebry Clifforda i stowarzyszonych z nią modułów spinorowych metryka na wiązce stycznej odgrywa rolę konstytutywną – determinuje, punkt po punkcie, strukturę przestrzeni kwadratowej będącą punktem wyjścia do konstrukcji odnośnych algebr Clifforda. Jest przeto nieodzownym *założyć* jej istnienie na danej rozmaitości, to zaś implikuje pierwszą z pożądanych redukcji wiązki baz wiązki stycznej:

$$\left(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M, B, \mathrm{GL}(D;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M}\right) \qquad \searrow \qquad \left(\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathsf{T}M, B, \mathrm{O}(p, D-p;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M} \restriction_{\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathsf{T}M}\right).$$

W następnej kolejności prześledzimy redukcję odpowiadającą wyborowi orientacji w $\mathsf{T}M$.

3. Redukcja orientacyjna – I klasa Stiefela–Whitneya

Dokonamy obecnie geometryzacji algebraicznego pojęcia orientacji przestrzeni wektorowej (rzeczywistej), rozumianego jako wybór jednego z dwóch rozłącznych podzbiorów w zbiorze baz tejże przestrzeni utworzonego przez bazy powiązane (wzajemnie) odwracalnymi odwzorowaniami liniowymi o wyznaczniku dodatnim, przy czym w obecności formy kwadratowej, więc w ograniczeniu do automorfizmów ortogonalnych, ten ostatni staje się równy jedności. W tym celu rozważymy rodzinę cięć (lokalnych) wiązki reperów ortonormalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$ (rzeczywistej) wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ wyposażonej w strukturę metryczną o sygnaturze $(p, N-p)$, $p \in \overline{0, N}$,

$$\sigma_i \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$$

stowarzyszonych z pewnym pokryciem otwartym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B. Ciągłość cięć σ_i oznacza, że wszystkie bazy w $\mathbb{R}^{\times N}$ otrzymane w obrazie trywializacji lokalnej $\tau_i : \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}}(\widetilde{\mathcal{O}}_i) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathcal{O}}_i \times \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ z obrazu cięcia $\sigma_i(\mathcal{O}_i)$ (trywializacja τ_i nad $\widetilde{\mathcal{O}}_i \subset \mathcal{O}_i$ *nie* jest *a priori* indukowana przez σ_i) leżą w tej samej spójnej składowej grupy ortogonalnej $\mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$, każde zatem dwa punkty obrazu łączy odwzorowanie ze składowej spójnej jedności tejże grupy, czyli z grupy specjalnej ortogonalnej $\mathrm{SO}(p, N-p; \mathbb{R})$ przy $p(N-p) = 0$, wzgl. z grupy specjalnej ortogonalnej ortochronicznej $\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p, N-p)$ przy $p(N-p) \neq 0$. W punktach $x \in \mathcal{O}_{ij}$ cięcia lokalne pozostają w relacji

$$\sigma_j(x) = \sigma_i(x) \triangleleft \phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}}\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big),$$

przy czym

$$\phi_{\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}}\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big) \equiv g_{ij}(x) \in \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$$

są tożsame z odwzorowaniami przejścia stowarzyszonymi z trywializacjami lokalnymi wyznaczanymi przez cięcia lokalne σ_i w duchu Stw. 5-6.3. W świetle powyższych uwag naturalną adaptacją pojęcia orientacji staje się

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Stw. 1. Wiązkę wektorową $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad ciałem bazowym $\mathbb{R}$) wyposażoną w strukturę metryczną o sygnaturze $(p, N-p)$, $p \in \overline{0, N}$ określamy mianem **orientowalnej**, ilekroć istnieje taki wybór pokrycia trywializującego dla wiązki reperów ortonormalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$, przy którym odwzorowania przejścia $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$ przyjmują wartości w podgrupie specjalnej ortogonalnej $\mathrm{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$. W takim przypadku wiązkę zredukowaną (wzdłuż injekcji kanonicznej) nazywamy **wiązką reperów ortonormalnych z orientacją** (albo też **wiązką baz ortonormalnych z orientacją**) **wiązki wektorowej** $\mathbb{V}$ i zapisujemy jako

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}, B, \mathrm{SO}(p, N-p; \mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V}}\big)$$

W przypadku $p(N-p) \neq 0$ mówimy o wiązce **orientowalnej przestrzennie** (wzgl. **czasowo**), jeśli możliwa jest jej redukcja wzdłuż injekcji kanonicznej $\mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \sqcup \mathsf{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ (wzgl. $\mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \sqcup \mathsf{P}_{e_1} \cdot \mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$), wprowadzając zarazem pochodne pojęcie **wiązki reperów ortonormalnych z orientacją przestrzenną** (wzgl. **czasową**) lub też **wiązki baz ortonormalnych z orientacją przestrzenną** (wzgl. **czasową**) **wiązki wektorowej** $\mathbb{V}$. Wreszcie też jeśli możliwa jest redukcja wiązki reperów wzdłuż injekcji kanonicznej $\mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$, mamy do czynienia z wiązką **orientowalną czasowo i przestrzenie**, a odnośną wiązkę zredukowaną nazywamy **wiązką reperów ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną** (albo też **wiązką baz ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną**) **wiązki wektorowej** $\mathbb{V}$ i oznaczamy symbolem

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}^+}\mathbb{V}, B, \mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}^+}\mathbb{V}}\big).$$

Ilekroć wymienione powyżej własności strukturalne charakteryzują wiązkę wektorową styczną nad rozmaitością różniczkowalną, odnośne określenia stosują się do tejże rozmaitości. Mamy zatem **rozmaitość różniczkowalną orientowalną**, **rozmaitość różniczkowalną orientowalną czasowo** wzgl. **przestrzennie** oraz **rozmaitość różniczkowalną orientowalną czasowo i przestrzennie**.

Ogólnego opisu ilościowego zagadnienia orientowalności dostarcza

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Wiązka wektorowa $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad ciałem bazowym $\mathbb{R}$) wyposażona w strukturę metryczną o sygnaturze $(p, N-p)$, $p \in \overline{0, N}$ jest orientowalna (względem tejże struktury) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy wiązki reperów ortonormalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$ i odnośne trywializacje lokalne $\tau_i : \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$, $i \in I$ o stowarzyszonych z nimi odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$, $(i,j) \in \langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}$, dla których odwzorowania (lokalnie) stałe

$$\gamma_{ij} := \det{}_{(N)} \circ g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (i,j) \in \langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}$$

przyjmują postać

$$\gamma_{ij} = \big(\eta_j \cdot \mathrm{Inv} \circ \eta_i\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} \tag{4}$$

dla pewnych odwzorowań (lokalnie) stałych

$$\eta_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> W świetle Def. 9-10-11.1 (patrz: postać odwzorowań przejścia wiązki stowarzyszonej) oraz Rozdz. 9-10-11.1 orientowalność $\mathbb{V}$ oznacza istnienie pokrycia trywializującego $\mathscr{O}$ i odnośnych trywializacji τ_i, dla których odwzorowania przejścia $g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{SO}(p,N-p;\mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})$, a wówczas $\det_{(N)} g_{ij} = 1$ i możemy położyć $\eta_i \equiv 1$.

I odwrotnie, mając dane odwzorowania $\eta_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ i \in I$, wybierzmy dowolnie odwzorowania

$$h_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})\,,\quad i \in I$$

o własności

$$\det{}_{(N)} \circ h_i = \eta_i\,,$$

która pozwala stwierdzić, że odwzorowania

$$\widetilde{g}_{ij} := h_i \cdot g_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ h_j \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})\,,\quad (i,j) \in \left\langle I^{\times 2}\right\rangle_{\mathscr{O}}$$

spełniają warunek

$$\det{}_{(N)} \circ \widetilde{g}_{ij} = \eta_i \cdot \gamma_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \eta_j \equiv 1\,,$$

czyli w istocie

$$\widetilde{g}_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{SO}(p,N-p;\mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})\,.$$

Na gruncie Tw. 5-6.2 konstatujemy, że wiązka główna zrekonstruowana – według schematu podanego w dowodzie Tw. 2-3-4.2 – z danych lokalnych $\widetilde{g}_{ij}$ jest izomorficzna z wiązką reperów $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$. Równoważnie możemy powiedzieć, że stosowna redefinicja trywializacji lokalnych tej ostatniej pozwala dokonać redukcji grupy strukturalnej wzdłuż włożenia kanonicznego

$$\jmath_{\mathrm{SO}(p,N-p;\mathbb{R})} \;:\; \mathrm{SO}(p,N-p;\mathbb{R}) \rightarrowtail \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})\,,$$

w rozumieniu Tw. 1. Istotnie, jeśli wyjściowe trywializacje lokalne τ_i o odwzorowaniach przejścia g_{ij} zastąpić odwzorowaniami

$$\widetilde{\tau}_i \;:\; \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R}) \;:\; \tau_i^{-1}(x,g) \longmapsto \big(x, h_i(x)\cdot g\big)\,,\quad i \in I\,,$$

to w bezpośrednim rachunku – przeprowadzonym dla dowolnych $(x,g) \in \mathcal{O}_i \times \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})$ –

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_j^{-1}(x,g) &\equiv \widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_j^{-1}\Big(x, h_j(x)\cdot\big(h_j(x)^{-1}\cdot g\big)\Big) = \widetilde{\tau}_i \circ \tau_j^{-1}\big(x, h_j(x)^{-1}\cdot g\big) \\
&\equiv \widetilde{\tau}_i \circ \tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}\big(x, h_j(x)^{-1}\cdot g\big) = \widetilde{\tau}_i \circ \tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x)\cdot h_j(x)^{-1}\cdot g\big) \\
&= \big(x, h_i(x)\cdot g_{ij}(x)\cdot h_j(x)^{-1}\cdot g\big)
\end{aligned}$$

wyznaczymy nowe odwzorowania przejścia

$$h_i(x)\cdot g_{ij}(x)\cdot h_j(x)^{-1} \equiv \widetilde{g}_{ij}(x) \in \mathrm{SO}(p,N-p;\mathbb{R})\,.$$

□

W fizykalnie istotnym przypadku sygnatury mieszanej napotykamy specjalizację powyższego wyniku ogólnego w formie

Twierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 4 oraz Tw. 3 i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem bazowym $\mathbb{R}$) wyposażoną w strukturę metryczną $\mathrm{g} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze $(p, N-p)$, $p \in \overline{1, N-1}$. Wiązka $\mathbb{V}$ jest orientowalna przestrzennie (wzgl. czasowo) wtedy i tylko wtedy, gdy jej maksymalna podwiązka przestrzenna $\mathbb{V}^+$ (wzgl. czasowa $\mathbb{V}^-$) jest orientowalna, w szczególności więc gdy $\mathbb{V}^+$ (wzgl. $\mathbb{V}^-$) spełnia warunki wymienione w tezie Tw. 4.

<u>*Dowód:*</u> W świetle dowodu Tw. 3 istnienie struktury metrycznej g o sygnaturze $(p, N-p)$ implikuje redukowalność wiązki reperów wzdłuż monomorfizmu

$$\jmath_{\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})} \;:\; \mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R}) \;:\; (A,B)\longmapsto A\oplus B\,,$$

w którego zapisie $A\oplus B$ jest endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^{\times p}\oplus\mathbb{R}^{\times N-p}\equiv\mathbb{R}^{\times N}$. W świetle Stw. 9-10-11.2 przesądza to o istnieniu trywializacji lokalnych

$$\tau_i \;:\; \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i\times\left(\mathbb{R}^{\times p}\oplus\mathbb{R}^{\times N-p}\right)\equiv\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times N}$$

wiązki $\mathbb{V}$ o odwzorowaniach przejścia

$$g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow \jmath_{\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})}\big(\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})\big)\,.$$

Maksymalna podwiązka przestrzenna $\mathbb{V}^+\subset\mathbb{V}$ dziedziczy tym samym trywializacje o odwzorowaniach przejścia

$$g_{ij}^+ \;:\; \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow \jmath_{\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})}\big(\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\{\mathbf{1}_{N-p}\}\big)\cong\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\,.$$

Orientowalność $\mathbb{V}^+$ jest równoznaczna z dalszą redukcją jej grupy strukturalnej $\jmath_{\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})}\big(\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\{\mathbf{1}_{N-p}\}\big)$ do podgrupy izomorficznej z $\mathrm{SO}(p;\mathbb{R})$, co ostatecznie pozwala ograniczyć grupę strukturalną sumy Whitneya $\mathbb{V}^+\oplus_{\mathbb{K},B}\mathbb{V}^-\equiv\mathbb{V}$ do postaci

$$\begin{aligned}
&\jmath_{\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})}\big(\mathrm{SO}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})\big)\\
\equiv\;&\jmath_{\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})}\Big(\mathrm{SO}(p;\mathbb{R})\times\big(\mathrm{SO}(N-p;\mathbb{R})\sqcup\mathsf{P}_{e_1}\cdot\mathrm{SO}(N-p;\mathbb{R})\big)\Big)\\
=\;&\jmath_{\mathrm{O}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})}\Big(\big(\mathrm{SO}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{SO}(N-p;\mathbb{R})\big)\sqcup\big(\mathrm{SO}(p;\mathbb{R})\times\mathsf{P}_{e_1}\cdot\mathrm{SO}(N-p;\mathbb{R})\big)\Big)\\
\subset\;&\mathrm{SO}^+(p,N-p;\mathbb{R})\sqcup\mathsf{P}_{e_{p+1}}\cdot\mathrm{SO}^+(p,N-p;\mathbb{R})\,.
\end{aligned}$$

Powyższe rozumowanie bez trudu odwracamy na gruncie Twierdzenia o redukcji grupy strukturalnej do maksymalnej podgrupy zwartej (pojawi się w innym kontekście dydaktycznym), zauważając, że maksymalna podgrupa zwarta grupy $\mathrm{SO}^+(p,N-p;\mathbb{R})\sqcup\mathsf{P}_{e_{p+1}}\cdot\mathrm{SO}^+(p,N-p;\mathbb{R})\subset\mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})$ to (obraz względem włożenia kanonicznego w grupę $\mathrm{O}(p,N-p;\mathbb{R})$ jej podgrupy) $\mathrm{SO}(p;\mathbb{R})\times\mathrm{O}(N-p;\mathbb{R})$.

Dowód w przypadku maksymalnej podwiązki czasowej przebiega w pełni analogicznie. □

Uwaga 2. Należy podkreślić, że rodzina odwzorowań lokalnie stałych $\{\gamma_{ij}=\det_{(N)}\circ g_{ij}\}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}}$ zdefiniowanych w treści Tw. 4 spełnia – dla dowolnych $(i,j,k)\in\langle I^{\times 3}\rangle_{\mathscr{O}}$ – tożsamość

$$\check{\delta}\gamma_{ijk}:=\big(\gamma_{jk}\cdot\mathrm{Inv}\circ\gamma_{ik}\cdot\gamma_{ij}\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}}\equiv\det{}_{(N)}\big(g_{jk}\cdot g_{ki}\cdot g_{ij}\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}}=\det{}_{(N)}\mathbf{1}_N=1\,,$$

nazywaną **warunkiem 1-kocyklu**. Jest przy tym zupełnie jasnym, że dla dowolnych odwzorowań lokalnie stałych

$$\psi_i \;:\; \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

tożsamość powyższa jest niezmiennicza ze względu na podstawienia

$$\gamma_{ij}\longmapsto\gamma_{ij}\cdot\big(\psi_j\cdot\mathrm{Inv}\circ\psi_i\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}}=:\gamma_{ij}\cdot\check{\delta}\psi_{ij}\,.$$

Otrzymujemy zatem

Wnioski 1. *Ilościową miarą obstrukcji topologicznej dla orientowalności wiązki wektorowej* $(\mathbb{V},B,\mathbb{K}^{\times N},\pi_{\mathbb{V}})$ *wyposażonej w strukturę metryczną jest nieznikająca przy dowolnie rozdrobnionym pokryciu trywializującym* $\mathscr{O}$ *klasa zdefiniowanych powyżej danych lokalnych* $\{\,\gamma_{ij}\;:\;\mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,\}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}}$, *spełniających warunek 1-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k)\in\langle I^{\times 3}\rangle_{\mathscr{O}}}\;:\;\check{\delta}\gamma_{ijk}=1\,,$$

względem relacji równoważności

$$\gamma^2_{..} \sim_{\check{\delta}} \gamma^1_{..} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists_{\{\ \psi_i\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ \}_{i\in I}}\ \forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathcal{O}}}\ :\ \gamma^2_{ij} = \gamma^1_{ij}\cdot\check{\delta}\psi_{ij}\,.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia oznaczamy symbolem

$$w_1(\mathbb{V})$$

i określamy mianem ***pierwszej klasy Stiefela–Whitneya wiązki wektorowej*** $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$*.*

W przypadku wiązki wektorowej stycznej nad rozmaitością różniczkowalną, mówimy o ***pierwszej klasie Stiefela–Whitneya rozmaitości różniczkowalnej****.*

Powyższy wniosek może (a wręcz powinien) być źródłem głębokiego niedosytu, oto bowiem z jednej strony zrekapitulowany w nim schemat formalnego opisu obstrukcji dla orientacji (orientowalności) wiązki wektorowej wydaje się nader adekwatny i precyzyjny, z drugiej jednak – jest to schemat na pierwszy rzut oka całkowicie niepraktyczny, jak bowiem policzyć interesującą nas klasę obstrukcji $w_1(\mathbb{V})$ „w granicy dowolnie drobnego pokrycia”? Z niedosytem tym zmierzymy się w wykładzie następnym, po zgromadzeniu w ramach naszych studiów nad redukcjami i prolongacjami wiązek głownych wzdłuż homomorfizmów grup strukturalnych bogatszej próbki podobnych struktur, z której będziemy mogli wywieść ujawniający się tu na prawach inspirującego przykładu ogólny schemat kwantyfikacji obstrukcji dla istnienia rozmaitych geometryzacji i klasyfikacji geometryzacji nierównoważnych w okolicznościach znikania tejże obstrukcji. Schematu tego dostarczy tzw. kohomologia Čecha stowarzyszona z pokryciem otwartym rozmaitości. Relacje wiążące ją z innymi znanymi typami homologii (np. kohomologią de Rhama i homologią singularną) oraz pewne podstawowe twierdzenia z dziedziny algebry homologicznej dostarczą nam jeśli nie przekonania, to z pewnością silnej nadziei na policzalność fizykalnie istotnych klas i grup w kohomologii, a zatem także – na konstruktywność zaproponowanego tu opisu. Tymczasem zajmiemy się wygodnym przeformułowaniem dotychczasowych wyników.

Pojawienie się wyznacznika odwzorowań przejścia w naszej dyskusji zagadnienia orientowalności wiązki wektorowej sugeruje bezpośredni związek tego pojęcia z geometryzacją innego (równoważnego) algebraicznego modelu orientacji, jakiego dostarcza konstrukcja wyznacznika na przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}^{\times N}$, modelującej włókno wiązki $\mathbb{V}$, czyli (dowolnego niezerowego) elementu $\Delta \in \bigwedge^N (\mathbb{K}^{\times N})^*$. Jeśli teraz przywołać procedurę – opisaną w Rozdz. 9-10-11.1 – rekonstrukcji wiązki wektorowej jako wiązki stowarzyszonej z wiązką reperów, a procedura ta działa także w przypadku zredukowanej grupy strukturalnej (patrz: Tw. 1), to widzimy, że możliwość ograniczenia się do odwzorowań przejścia z $\mathrm{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(N; \mathbb{R})$ dotyczy w jednakim stopniu wiązki wektorowej $\mathbb{V}$ i jej wiązek reperów: $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$ oraz $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$. Zaczniemy od wprowadzenia potrzebnego obiektu geometrycznego.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Wiązka wyznacznikowa wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad $\mathbb{K}$) o bazie B i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(N; \mathbb{K})$ stowarzyszonych z pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$\big(\det\mathbb{V}, B, \mathbb{K}, \pi_{\det\mathbb{V}}\big)$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 2-3-4.2, z danych lokalnych

$$g^{\det}_{ij} \coloneqq \det{}_{(N)} \circ g_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathbb{K}\,.$$

Wiązkę wyznacznikową otrzymujemy chociażby w procedurze topologizacji sumy rozłącznej nad bazą $B \ni x$ włókien postaci

$$(\det\mathbb{V})_x \equiv \bigwedge{}^n\, \mathbb{V}^*_x\,,$$

w zgodzie z interpretacją tejże wiązki jako geometryzacji konstrucji wyznacznika na przestrzeni wektorowej.

Mając niezbędny obiekt geometryczny, możemy już wysłowić oczekiwane

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 5 i 4. Wiązka wektorowa $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad ciałem bazowym $\mathbb{R}$) wyposażona w strukturę metryczną g jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiązka wyznacznikowa $\det\mathbb{V}$ ma nigdzie nieznikające globalne cięcie.

Dowód: Wynika wprost z definicji wiązki wyznacznikowej przedstawionej i wcześniejszej dyskusji. □

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 5 i 4. **Orientacja na wiązce wektorowej** $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad ciałem bazowym $\mathbb{R}$) wyposażonej w strukturę metryczną o sygnaturze $(p, N-p)$ i względem tej struktury orientowalnej to wybór podwiązki zredukowanej (w rozumieniu Def. 1)

$$\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathbb{V} \subset \mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$$

wzdłuż włożenia kanonicznego

$$\jmath_{\mathrm{SO}(p,N-p;\mathbb{R})} \;:\; \mathrm{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \rightarrowtail \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$$

lub – równoważnie – wybór nigdzie nie znikającego globalnego cięcia wiązki wyznacznikowej $\det \mathbb{V}$. Wiązkę orientowalną z wybraną orientacją określamy mianem **wiązki wektorowej zorientowanej**.

W szczególności **orientacja na rozmaitości różniczkowalnej** orientowalnej to orientacja na jej wiązce stycznej, a rozmaitość z wyborem orientacji to **rozmaitość zorientowana**.

Analogicznie określamy **orientację przestrzenną** oraz **orientację czasową** na wiązce wektorowej i na rozmaitości.

Uwaga 3. Wiązka wyznacznikowa $\det \mathbb{V}$ jest wiązką liniową, przeto warunek orientowalności wiązki wektorowej $\mathbb{V}$ wysłowiony w Stw. 3 jest w świetle Stw. 2-3-4.4 tożsamy z warunkiem globalnej trywialności $\det \mathbb{V}$. Przy tym pojawiają się naturalnie dwie rozłączne klasy abstrakcji *nigdzie nieznikających* cięć $\det \mathbb{V}$ (tj. orientacji) względem relacji dyfeotopijnej równoważności, którą definiujemy, jak następuje: nigdzie nieznikające cięcia $\sigma_\alpha \;:\; B \longrightarrow \det \mathbb{V} \smallsetminus \mathbf{0}_{\det \mathbb{V}}(B) \subset \det \mathbb{V}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ są równoważne, jeśli istnieje gładkie odwzorowanie

$$h_\cdot \;:\; [0,1] \times B \longrightarrow \det \mathbb{V} \smallsetminus \mathbf{0}_{\det \mathbb{V}}(B) \;:\; (t, x) \longmapsto h_t(x)$$

o własnościach

$$h_0 = \sigma_1 \qquad \wedge \qquad h_1 = \sigma_2 \,.$$

Należy podkreślić, że przeciwdziedziną $h_\cdot$ jest wiązka wyznacznikowa *z wyjętym cięciem zerowym*, każde więc z odwzorowań $h_t \;:\; B \longrightarrow \det \mathbb{V} \smallsetminus \mathbf{0}_{\det \mathbb{V}}(B)$, $t \in [0,1]$ jest nigdzie nieznikającym cięciem (globalnym) $\det \mathbb{V}$. Obecność dwóch nierównoważnych klas orientacji na $\mathbb{V}$ objawia się także bezpośrednio w opisie lokalnym przedstawionym w tezie i dowodzie Tw. 4, o czym przekonamy się obecnie. Niechaj $\tau_i \;:\; \pi_{\det \mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}$, $i \in I$ będzie rodziną trywializacji lokalnych wiązki wyznacznikowej stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi wiązki reperów ortonormalnych o (zredukowanych) odwzorowaniach przejścia $g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$. Odwzorowania przejścia dla tej rodziny trywializacji przyjmują znajomą postać

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R} \circlearrowleft \;:\; (x, r) \longmapsto \big(x, \gamma_{ij}(x) \cdot r\big) \,,$$

przy czym – zgodnie z wprowadzoną wcześniej notacją –

$$\gamma_{ij} = \det{}_{(N)} \circ g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \,.$$

W świetle Stw. 2-3-4.4 istnienie trywializacji τ_i jest równoznaczne z istnieniem cięć lokalnych, które konstruujemy według przepisu podanego w dowodzie tegoż stwierdzenia,

$$\sigma_{\tau_i} \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \det \mathbb{V} \;:\; x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, 1) \,.$$

Założenie o orientowalności $\mathbb{V}$ daje nam do ręki rodzinę odwzorowań lokalnie stałych $\eta_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $i \in I$ o własności (4), których możemy użyć do zdefiniowania nowych cięć lokalnych

$$\widetilde{\sigma}_{\tau_i} := \sigma_{\tau_i} \cdot \mathrm{Inv} \circ \eta_i \,, \qquad i \in I \,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że te ostatnie są ograniczeniami cięcia globalnego, o którym jest mowa wyżej, oto bowiem w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\widetilde{\sigma}_{\tau_j}(x) \quad = \quad \eta_j(x)^{-1} \cdot \tau_j^{-1}(x, 1) = \eta_j(x)^{-1} \cdot \tau_i^{-1}\big(x, \gamma_{ij}(x)\big) = \eta_j(x)^{-1} \cdot \gamma_{ij}(x) \cdot \tau_i^{-1}(x, 1)$$

$$= \quad \eta_i(x)^{-1} \cdot \tau_i^{-1}(x,1) \equiv \widetilde{\sigma}_{\tau_i}(x)\,.$$

W wyborze danych trywializujących (globalnie) $\{\eta_i\}_{i\in I}$ ogranicza nas jedynie warunek (4), przeto dowolne dwie rodziny takich danych: $\{\eta_i^\alpha\}_{i\in I}$, $\alpha \in \{1,2\}$ spełniają warunki

$$\left(\eta_j^2 \cdot \mathrm{Inv} \circ \eta_i^2\right)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} = \gamma_{ij} = \left(\eta_j^1 \cdot \mathrm{Inv} \circ \eta_i^1\right)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}}\,, \qquad (i,j) \in \left\langle I^{\times 2}\right\rangle_{\mathscr{O}}\,,$$

z których dla odwzorowań

$$\Delta_i := \eta_i^2 \cdot \mathrm{Inv} \circ \eta_i^1 \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

wyprowadzamy **warunek 0-kocyklu**

$$\forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}} \;:\; \check{\delta}\Delta_{ij} = \left(\Delta_j \cdot \mathrm{Inv} \circ \Delta_i\right)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} = 1\,.$$

Odwzorowania te są zatem ograniczeniami odwzorowania gładkiego

$$\Delta \;:\; B \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,, \qquad \Delta\restriction_{\mathcal{O}_i} \equiv \Delta_i\,,$$

czyli stałego na spójnych składowych bazy (tj. w istocie należącego do $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{|\pi_0(B)|}$, gdzie $|\pi_0(B)|$ jest liczbą spójnych składowych B). Zauważmy, że przejściu

$$\eta_i \longmapsto \Delta \cdot \eta_i^1\,, \quad i \in I$$

towarzyszy (globalna) transformacja znaku skonstruowanego powyżej cięcia globalnego,

$$\widetilde{\sigma}_{\tau_i} \longmapsto \Delta^{-1} \cdot \widetilde{\sigma}_{\tau_i} \equiv \Delta \cdot \widetilde{\sigma}_{\tau_i}\,,$$

przy czym ilekroć $\Delta = -1$ otrzymujemy tym sposobem cięcie dyfeotopijnie nierównoważne (w sensie sprecyzowanym wcześniej) z wyjściowym, reprezentujące nierównoważną wyjściowej orientację na $\mathbb{V}$.

Nasze rozumowanie podsumowujemy w poniższym

Wnioski 2. *Ilościową miarą swobody nierównoważnych wyborów orientacji na (orientowalnej) wiązce wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ wyposażonej w strukturę metryczną $\mathrm{g} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R},B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze $(p, N-p)$, $p \in \overline{0,N}$ jest określona nad dowolnie rozdrobnionym pokryciem trywializującym $\mathscr{O}$ rodzina danych lokalnych $\{\ \Delta_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ \}_{i\in I}$ spełniających warunek 0-kocyklu*

$$\forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}} \;:\; \check{\delta}\Delta_{ij} = 1\,.$$

Relacja między dowolnymi dwiema orientacjami na $\mathbb{V}$, rozumianymi jako redukcje wiązki reperów ortogonalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{O}}\mathbb{V}$ wzdłuż włożenia kanonicznego $\jmath_{\mathrm{SO}(p,N-p;\mathbb{R})} \;:\; \mathrm{SO}(p, N-p;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{O}(p, N-p;\mathbb{R})$ o zdefiniowanych w dowodzie Tw. 4 danych lokalnych $\{\ h_i^\alpha \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{O}(p, N-p;\mathbb{R})\ \}_{i\in I}$, $\alpha \in \{1,2\}$, jest ustalana przez (stosowne) dane lokalne Δ_i według schematu

$$\det{}_{(N)} \circ h_\cdot^2 = \Delta_\cdot \cdot \det{}_{(N)} \circ h_\cdot^1\,,$$

*przy czym **klasy orientacji** wiązki $\mathbb{V}$ są określone jako klasy abstrakcji relacji równoważności*

$$h_\cdot^2 \sim_{\check{\delta}} h_\cdot^1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta_\cdot := \det{}_{(N)} \circ h_\cdot^2 \cdot \mathrm{Inv} \circ \det{}_{(N)} \circ h_\cdot^1 \equiv 1\,.$$

Nasze rozważania doprowadziły nas do momentu, w którym – o ile tylko pierwsza klasa Stiefela–Whitneya $w_1(\mathsf{T}M)$ danej rozmaitości metrycznej (M, g) znika – możemy dokonać redukcji wiązki baz wiązki stycznej wedle schematu

$$\left(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M, B, \mathrm{GL}(D;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M}\right) \qquad \searrow \qquad \left(\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathsf{T}M, B, \mathrm{SO}(p, D-p;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M}\restriction_{\mathsf{F}_{\mathrm{SO}}\mathsf{T}M}\right).$$

Stajemy przed ostatnim wyzwaniem: „przedłużenia” otrzymanej tym sposobem wiązki baz zorientowanych ortonormalnych wiązki stycznej wzdłuż nakrycia uniwersalnego (1).

4. Prolongacja wzdłuż rozszerzenia centralnego – obstrukcji i klasyfikacja

Stosownej formalizacji koncepcji „przedłużenia" wiązki głównej wzdłuż nakrycia (uniwersalnego) dostarcza nam

Definicja 7. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj Γ będzie *przemienną* grupą dyskretną, $\mathrm{G}, \widehat{\mathrm{G}}$ zaś – grupami Liego, dla których określony jest krótki ciąg dokładny grup

$$\mathbf{1} \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\jmath_\Gamma} \widehat{\mathrm{G}} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \mathrm{G} \longrightarrow \mathbf{1}$$

czyniący z trójki $(\widehat{\mathrm{G}}, \jmath_\Gamma, \widehat{\varphi})$ dyskretne rozszerzenie centralne grupy G przez grupę Γ, przy czym zakładamy, że epimorfizm $\widehat{\varphi}$ jest submersywnym nakryciem topologicznym. **Prolongacją wiązki głównej** $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ **wzdłuż rozszerzenia centralnego** $(\widehat{\mathrm{G}}, \jmath_\Gamma, \varphi)$ (albo $\widehat{\mathrm{G}}$**-strukturą na wiązce głównej** $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}))$ nazywamy parę

$$\big((\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}, B, \widehat{\mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}}), (\Phi, \mathrm{id}_B, \widehat{\varphi})\big)$$

złożoną z

- wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}, B, \widehat{\mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}})$;
- morfizmu wiązek głównych

$$(\Phi, \mathrm{id}_B, \widehat{\varphi}) \;:\; (\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}, B, \widehat{\mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}}) \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})\,.$$

Prolongacje $((\mathsf{P}^\alpha_{\widehat{\mathrm{G}}}, B, \widehat{\mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\widehat{\mathrm{G}}}}), (\Phi_\alpha, \mathrm{id}_B, \widehat{\varphi}))$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nazywamy **równoważnymi**, ilekroć istnieje izomorfizm wiązek głównych

$$(\Psi, \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{G}}}) \;:\; (\mathsf{P}^1_{\widehat{\mathrm{G}}}, B, \widehat{\mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{P}^1_{\widehat{\mathrm{G}}}}) \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}^2_{\widehat{\mathrm{G}}}, B, \widehat{\mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{P}^2_{\widehat{\mathrm{G}}}})\,.$$

Stosownej kwantyfikacji obstrukcji dla prolongacji dostarcza

Twierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 7. Prolongacja wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ wzdłuż rozszerzenia centralnego $(\widehat{\mathrm{G}}, \jmath_\Gamma, \varphi)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy tejże wiązki, z którym stowarzyszona jest rodzina odwzorowań lokalnie gładkich

$$\widehat{\gamma}_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}}\,, \quad (i,j) \in \big\langle I^{\times 2}\big\rangle_{\mathscr{O}}$$

o własnościach – zapisanych dla dowolnych $(i,j) \in \big\langle I^{\times 2}\big\rangle_{\mathscr{O}}$ –

$$\widehat{\gamma}_{ji} = \mathrm{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}$$

i

$$\forall_{i\in I} \;:\; \widehat{\gamma}_{ii} = e_{\widehat{\mathrm{G}}}$$

oraz

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij}\,,$$

gdzie $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$ są odwzorowaniami przejścia wiązki P_{G} stowarzyszonymi z pokryciem $\mathscr{O}$, i takich, dla których są określone odwzorowania lokalnie stałe

$$\gamma_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \jmath_\Gamma(\Gamma)\,, \quad (i,j) \in \big\langle I^{\times 2}\big\rangle_{\mathscr{O}}$$

spełniające warunki:

$$\forall_{i\in I} \;:\; \gamma_{ii} = e_{\widehat{\mathrm{G}}}\,, \qquad \forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}} \;:\; \gamma_{ji} = \mathrm{Inv} \circ \gamma_{ij}$$

oraz

$$\forall_{(i,j,k)\in\langle I^{\times 3}\rangle_{\mathscr{O}}} \;:\; \big(\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} = \big(\gamma_{jk} \cdot \mathrm{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}}\,.$$

__Dowód:__ Załóżmy, że istnieje prolongacja $((\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}, B, \widehat{\mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}}), (\Phi, \mathrm{id}_B, \widehat{\varphi}))$ wiązki $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ i oznaczmy jako $\widehat{r}.$ (wzgl. $r.$) działanie definiujące grupy strukturalnej $\widehat{\mathrm{G}}$ (wzgl. G) na pierwszej (wzgl. drugiej) z tych wiązek. Wybrawszy trywializacje lokalne: $\widehat{\tau}_i \;:\; \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \widehat{\mathrm{G}}$ o odwzorowaniach przejścia $\widehat{g}_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}}$ (dla wiązki $\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}$) oraz $\tau_i \;:\; \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ o odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$ (dla wiązki P_{G}), stowarzyszamy z morfizmem Φ jego dane lokalne

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}, \quad i \in I,$$

które w analogii do (dowodu) Tw. 5-6.2 definiujemy, jak następuje:

$$\tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{\mathrm{G}}}) =: \big(x, h_i(x)\big), \quad x \in \mathcal{O}_i.$$

Powyższa definicja prowadzi do tożsamości, zapisanej dla dowolnego elementu $g \in \widehat{\mathrm{G}}$, a wynikającej z $\widehat{\mathrm{G}}$-ekwiwariantności $\widehat{\tau}_i$ i Φ oraz G-ekwiwariantności τ_i,

$$\begin{aligned}\tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, g) &\equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{r}_g \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{\mathrm{G}}}) = \tau_i \circ r_{\widehat{\varphi}(g)} \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{\mathrm{G}}}) \\ &= \big(\mathrm{id}_B \times \wp^{\mathrm{G}}_{\widehat{\varphi}(g)}\big) \circ \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{\mathrm{G}}}) \equiv \big(\mathrm{id}_B \times \wp^{\mathrm{G}}_{\widehat{\varphi}(g)}\big)\big(x, h_i(x)\big) \\ &= \big(x, h_i(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(g)\big),\end{aligned}$$

na podstawie której bez trudu wyprowadzamy związek pomiędzy odwzorowaniami przejścia obu wiązek (nad $x \in \mathcal{O}_{ij}$),

$$\begin{aligned}\big(x, h_i(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}(x)\big) &\equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}\big(x, \widehat{g}_{ij}(x)\big) \equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1} \circ \big(\widehat{\tau}_i \circ \widehat{\tau}_j^{-1}\big)(x, e_{\widehat{\mathrm{G}}}) \\ &= \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_j(x, e_{\widehat{\mathrm{G}}}) = \big(\tau_i \circ \tau_j^{-1}\big) \circ \tau_j \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_j(x, e_{\widehat{\mathrm{G}}}) \\ &= \tau_i \circ \tau_j^{-1}\big(x, h_j(x)\big) = \big(x, g_{ij}(x) \cdot_{\mathrm{G}} h_j(x)\big),\end{aligned}$$

czyli

(5) $$\widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}(x) = h_i(x)^{-1} \cdot_{\mathrm{G}} g_{ij}(x) \cdot_{\mathrm{G}} h_j(x).$$

Ustalmy *dowolne* ciągłe (wzgl. gładkie) przeciwobrazy $\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}}$ odwzorowań h_i,

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{h}_i = h_i, \quad i \in I.$$

Ich istnienie gwarantuje Tw. 2-3-4.1, które zapewnia, że każdy punkt w G ma pewne (spójne) otoczenie otwarte, na którym jest określone gładkie cięcie lokalne, zatem możemy zawsze tak dobrać (rozdrobnić) pokrycie trywializujące $\mathscr{O}$, iżby ciągłe obrazy jego elementów względem odwzorowań h_i zawierały się w rzeczonych otoczeniach elementów grupy G. Wybór przeciwobrazów $\widehat{h}_i$ pozwala nam przepisać wyprowadzoną wcześniej relację w postaci

$$\widehat{\varphi}\big(\widehat{h}_i(x) \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{g}_{ij}(x) \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{h}_j(x)^{-1}\big) = g_{ij}(x),$$

z której jasno wynika, że odwzorowania (lokalnie) ciągłe (wzgl. gładkie)

(6) $$\widehat{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}} : x \longmapsto \widehat{h}_i(x) \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{g}_{ij}(x) \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{h}_j(x)^{-1}$$

spełniają warunki wymienione w tezie dowodzonego twierdzenia przy wyborze

$$\forall_{(i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathscr{O}}} : \gamma_{ij} = e_{\widehat{\mathrm{G}}} \in \jmath_\Gamma(\Gamma).$$

Odwracając tok rozumowania, przyjmijmy, że dane są trywializacje lokalne $\tau_i^{\mathrm{G}} : \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$, $i \in I$ wiązki P_{G} o odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$, $(i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathscr{O}}$ wraz ze stowarzyszonymi z nimi odwzorowaniami $\widehat{\gamma}_{ij}$ oraz γ_{ij} jak w tezie twierdzenia, a wtedy możemy zdefiniować odwzorowania

(7) $$\widetilde{\gamma}_{ij} := \widehat{\gamma}_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \gamma_{ij} \equiv \widehat{\gamma}_{ij} \cdot \gamma_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}}, \quad (i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathscr{O}}$$

które wobec relacji $\mathrm{Ker}\, \widehat{\varphi} = \jmath_\Gamma(\Gamma)$ spełniają tożsamości

$$\widehat{\varphi} \circ \widetilde{\gamma}_{ij} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij},$$

a nadto – w konsekwencji inkluzji $\jmath_\Gamma(\Gamma) \subset \mathscr{Z}(\widehat{\mathrm{G}})$ – także

$$\begin{aligned}\big(\widetilde{\gamma}_{jk} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij}\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} &= \big(\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} \cdot \mathrm{Inv} \circ \big(\gamma_{jk} \cdot \mathrm{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} \\ &= e_{\widehat{\mathrm{G}}},\end{aligned}$$

Rodzina $\{\widetilde{\gamma}_{ij}\}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}}$ definiuje przeto – na mocy Tw. 2-3-4.2 – wiązkę główną $(\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}, B, \widehat{\mathrm{G}}, [\mathrm{pr}_1])$ o grupie strukturalnej $\widehat{\mathrm{G}}$, przestrzeni totalnej

$$\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}} \equiv \big(\bigsqcup_{i\in I} (\mathcal{O}_i \times \widehat{\mathrm{G}})\big)/_{\sim_{\widetilde{\gamma}..}}$$

i odwzorowaniach przejścia $\widetilde{\gamma}_{ij}$ stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi $[\tau_i]$ zdefiniowanymi w dowodzie tegoż twierdzenia. Na rozmaitości $\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}$ możemy przy tym określić odwzorowania lokalnie gładkie

$$\Phi_i \ : \ [\mathrm{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \widehat{\mathrm{G}} \xrightarrow{\mathrm{id}_B \times \widehat{\varphi}} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \xrightarrow{\tau_i^{\mathrm{G}\,-1}} \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\,, \quad i \in I\,,$$

odwzorowujące włókna $\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}$ we włókna P_{G} w sposób jawnie $\widehat{\mathrm{G}}$-ekwiwariantny, o czym przekonujemy się nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}_i$ i dla dowolnych elementów $\widehat{g}, \widehat{h} \in \widehat{\mathrm{G}}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_i\big([(x,i,\widehat{g})] \triangleleft_{\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}} \widehat{h}\big) &= \Phi_i\big([(x,i,\widehat{g}\cdot_{\widehat{\mathrm{G}}}\widehat{h})]\big) = \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, \widehat{\varphi}\big(\widehat{g}\cdot_{\widehat{\mathrm{G}}}\widehat{h}\big)\big) \\
&= \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, \widehat{\varphi}\big(\widehat{g}\big)\cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}\big(\widehat{h}\big)\big) = \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, \widehat{\varphi}\big(\widehat{g}\big)\big) \triangleleft_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \widehat{\varphi}\big(\widehat{h}\big) \\
&\equiv \Phi_i\big([(x,i,\widehat{g})]\big) \triangleleft_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \widehat{\varphi}\big(\widehat{h}\big)\,.
\end{aligned}$$

Łatwo przekonujemy się, że odwzorowania te określają odwzorowanie globalnie gładkie

$$\Phi \ : \ \mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

o ograniczeniach

$$\Phi\restriction_{[\mathrm{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i\,,$$

albowiem dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i $\widehat{g} \in \widehat{\mathrm{G}}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned}
\Phi_j\big([(x,i,\widehat{g})]\big) &= \Phi_j\big([(x,j,\widetilde{\gamma}_{ji}(x)\cdot_{\widehat{\mathrm{G}}}\widehat{g})]\big) \equiv \tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, \widehat{\varphi}\circ\widetilde{\gamma}_{ji}(x)\cdot_{\mathrm{G}}\widehat{\varphi}(\widehat{g})\big) \\
&= \tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, g_{ji}(x)\cdot_{\mathrm{G}}\widehat{\varphi}(\widehat{g})\big) = \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g})\big) \equiv \Phi_i\big([(x,i,\widehat{g})]\big)\,.
\end{aligned}$$

Jest zatem Φ postulowanym morfizmem wiązek głównych. □

Uwaga 4. Zauważmy, że każda rodzina odwzorowań $\{\widehat{\gamma}_{ij}\}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}}$ o własnościach

$$\forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}} \ : \ \big(\ \widehat{\varphi}\circ\widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij} \quad \wedge \quad \widehat{\gamma}_{ji} = \mathrm{Inv}\circ\widehat{\gamma}_{ij} \ \big)$$

oraz

$$\forall_{i\in I} \ : \ \widehat{\gamma}_{ii} = e_{\widehat{\mathrm{G}}}$$

spełnia – dla dowolnych $(i,j,k) \in \langle I^{\times 3}\rangle_{\mathscr{O}}$ – warunki

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}\circ(\widehat{\gamma}_{jk}\cdot\mathrm{Inv}\circ\widehat{\gamma}_{ik}\cdot\widehat{\gamma}_{ij})\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} &= (\widehat{\varphi}\circ\widehat{\gamma}_{jk})\cdot(\widehat{\varphi}\circ\mathrm{Inv}\circ\widehat{\gamma}_{ik})\cdot(\widehat{\varphi}\circ\widehat{\gamma}_{ij})\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} \\
&= g_{jk}\cdot\mathrm{Inv}\circ g_{ik}\cdot g_{ij} = e_{\mathrm{G}}\,,
\end{aligned}$$

które wobec założeń poczynionych w odniesieniu do epimorfizmu $\widehat{\varphi}$ implikują

$$\forall_{(i,j,k)\in\langle I^{\times 3}\rangle_{\mathscr{O}}} \ : \ \widehat{w}_{ijk} := \widehat{\gamma}_{jk}\cdot\mathrm{Inv}\circ\widehat{\gamma}_{ik}\cdot\widehat{\gamma}_{ij} \ : \ \mathcal{O}_{ijk} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\widehat{\varphi} = \mathrm{Image}\,\jmath_\Gamma \equiv \jmath_\Gamma(\Gamma)\,.$$

Z racji inkluzji $\jmath_\Gamma(\Gamma) \subset \mathscr{Z}(\widehat{\mathrm{G}})$ otrzymujemy zatem – dla dowolnych $(i,j,k,l) \in \langle I^{\times 4}\rangle_{\mathscr{O}}$ – tożsamość

$$\begin{aligned}
\check{\delta}\widehat{w}_{ijkl} &:= \big(\widehat{w}_{jkl}\cdot(\mathrm{Inv}\circ\widehat{w}_{ikl})\cdot\widehat{w}_{ijl}\cdot(\mathrm{Inv}\circ\widehat{w}_{ijk})\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\
&\equiv \big((\widehat{\gamma}_{kl}\cdot\widehat{\gamma}_{lj}\cdot\widehat{\gamma}_{jk})\cdot(\widehat{\gamma}_{ki}\cdot\widehat{\gamma}_{il}\cdot\widehat{\gamma}_{lk})\cdot(\widehat{\gamma}_{jl}\cdot\widehat{\gamma}_{li}\cdot\widehat{\gamma}_{ij})\cdot(\widehat{\gamma}_{ji}\cdot\widehat{\gamma}_{ik}\cdot\widehat{\gamma}_{kj})\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\
&= \big((\widehat{\gamma}_{ki}\cdot\widehat{\gamma}_{il}\cdot\widehat{\gamma}_{lk})\cdot(\widehat{\gamma}_{kl}\cdot\widehat{\gamma}_{lj}\cdot\widehat{\gamma}_{jk})\cdot(\widehat{\gamma}_{jl}\cdot\widehat{\gamma}_{li}\cdot\widehat{\gamma}_{ij})\cdot(\widehat{\gamma}_{ji}\cdot\widehat{\gamma}_{ik}\cdot\widehat{\gamma}_{kj})\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\
&= \big(\widehat{\gamma}_{ki}\cdot\widehat{\gamma}_{il}\cdot\widehat{\gamma}_{lj}\cdot\widehat{\gamma}_{jk}\cdot(\widehat{\gamma}_{jl}\cdot\widehat{\gamma}_{li}\cdot\widehat{\gamma}_{ij})\cdot(\widehat{\gamma}_{ji}\cdot\widehat{\gamma}_{ik}\cdot\widehat{\gamma}_{kj})\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijkl}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\widehat{\gamma}_{ki}\cdot\widehat{\gamma}_{il}\cdot\widehat{\gamma}_{lj}\cdot\left(\widehat{\gamma}_{jl}\cdot\widehat{\gamma}_{li}\cdot\widehat{\gamma}_{ij}\right)\cdot\left(\widehat{\gamma}_{ji}\cdot\widehat{\gamma}_{ik}\cdot\widehat{\gamma}_{kj}\right)\cdot\widehat{\gamma}_{jk}\right)\restriction_{\mathcal{O}_{ijkl}} \equiv e_{\widehat{\mathrm{G}}}\,,$$

określaną mianem **warunku 2-kocyklu**. Stwierdzamy bez trudu, że tożsamość powyższa nie zmieni się, jeśli wybrawszy dowolne odwzorowania lokalnie stałe

$$\psi_{ij} \equiv \mathrm{Inv}\circ\psi_{ji}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow \jmath_\Gamma(\Gamma)\,,$$

dokonamy w niej podstawienia

$$\widehat{w}_{ijk}\longmapsto \widehat{w}_{ijk}\cdot\left(\psi_{ji}\cdot(\mathrm{Inv}\circ\psi_{ki})\cdot\psi_{kj}\right)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} =: \widehat{w}_{ijk}\cdot\check{\delta}\psi_{ijk}\,.$$

Topologia nakrycia $\widehat{\varphi}$ zapewnia istnienie lokalnie gładkich podniesień $\widehat{\gamma}_{ij}$ odwzorowań przejścia g_{ij}, przy czym (pełna) swoboda wyboru podniesienia jest opisywana przez powyższe podstawienia, możemy więc – w świetle Tw. 6 – wyciągnąć z naszych dotychczasowych rozważań następujący

Wnioski 3. *Ilościową miarą obstrukcji topologicznej dla istnienia prolongacji wiązki głównej* $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ *wzdłuż rozszerzenia centralnego* $(\widehat{\mathrm{G}},\jmath_\Gamma,\varphi)$ *jest nieznikająca przy dowolnie rozdrobnionym pokryciu trywializującym* $\mathscr{O}$ *klasa zdefiniowanych powyżej danych lokalnych* $\{\ \widehat{w}_{ijk}\ :\ \mathcal{O}_{ijk}\longrightarrow \jmath_\Gamma(\Gamma)\ \}_{(i,j,k)\in\langle I^{\times 3}\rangle_{\mathscr{O}}}$*, spełniających warunek 2-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k,l)\in\langle I^{\times 4}\rangle_{\mathscr{O}}}\ :\ \check{\delta}\widehat{w}_{ijkl} = e_{\widehat{\mathrm{G}}}\,,$$

względem relacji równoważności

$$\widehat{w}^2_{\dots}\sim_{\check{\delta}}\widehat{w}^1_{\dots}\qquad\Longleftrightarrow$$

$$\exists_{\{\ \psi_{ij}=\mathrm{Inv}\circ\psi_{ji}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\jmath_\Gamma(\Gamma)\ \}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}}}\ \forall_{(i,j,k)\in\langle I^{\times 3}\rangle_{\mathscr{O}}}\ :\ \widehat{w}^2_{ijk} = \widehat{w}^1_{ijk}\cdot\check{\delta}\psi_{ijk}\,.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia) określamy mianem ***klasy obstrukcji dla istnienia prolongacji*** *wiązki głównej* $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ *wzdłuż rozszerzenia centralnego* $(\widehat{\mathrm{G}},\jmath_\Gamma,\varphi)$.

Ilekroć wprowadzona powyżej klasa obstrukcji dla istnienia prolongacji jest zerowa, precyzyjnej kwantyfikacji dostępnej swobody wyboru prolongacji dostarcza

Twierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 7. Niechaj $((\mathsf{P}^\alpha_{\widehat{\mathrm{G}}},B,\widehat{\mathrm{G}},\pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\widehat{\mathrm{G}}}}),\ (\Phi_\alpha,\mathrm{id}_B,\widehat{\varphi})),\ \alpha\in\{1,2\}$ będą prolongacjami wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ wzdłuż rozszerzenia centralnego $(\widehat{\mathrm{G}},\jmath_\Gamma,\varphi)$ i niech $\widehat{g}^\alpha_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\widehat{\mathrm{G}},\ (i,j)\in\left\langle I^{\times 2}\right\rangle_{\mathscr{O}}$ będą odnośnymi odwzorowaniami przejścia stowarzyszonymi z trywializacjami lokalnymi $\tau^\alpha_i\ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}^\alpha_{\widehat{\mathrm{G}}}}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\widehat{\mathrm{G}},\ i\in I$ nad wspólnym pokryciem trywializującym $\mathscr{O}=\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$. Wówczas istnieją odwzorowania lokalnie gładkie

$$\widehat{h}_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\widehat{\mathrm{G}}\,,\quad i\in I$$

i odwzorowania lokalnie stałe

$$\gamma_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\jmath_\Gamma(\Gamma)$$

spełniające dla dowolnych indeksów $(i,j,k)\in\left\langle I^{\times 3}\right\rangle_{\mathscr{O}}$ warunek 1-kocyklu

$$\left(\gamma_{jk}\cdot\gamma^{-1}_{ik}\cdot\gamma_{ij}\right)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{\mathrm{G}}}\,,$$

które ustalają relację pomiędzy odwzorowaniami przejścia w postaci

$$\widehat{g}^2_{ij} = \gamma_{ij}\cdot\left(\widehat{h}_i\cdot\widehat{g}^1_{ij}\cdot\mathrm{Inv}\circ\widehat{h}_j\right)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}}\,,\quad (i,j)\in\left\langle I^{\times 2}\right\rangle_{\mathscr{O}}\,. \tag{8}$$

I odwrotnie, każda rodzina odwzorowań gładkich $\widehat{g}^2_{ij}$ pozostająca w powyższej relacji z odwzorowaniami przejścia $\widehat{g}^1_{ij}$ ustalonej prolongacji dla pewnych odwzorowań $\widehat{h}_i$ i γ_{ij} spełniających wymienione wcześniej warunki określa prolongację o odwzorowaniach przejścia tożsamych z $\widehat{g}^2_{ij}$.

Prolongacje o odwzorowaniach przejścia $\widehat{g}^1_{ij}$ i $\widehat{g}^2_{ij}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie $\mathscr{O}$ (współ)trywializujące odnośne wiązki $\mathsf{P}^1_{\widehat{\mathrm{G}}}$ i $\mathsf{P}^2_{\widehat{\mathrm{G}}}$, w którym relacja (8) jest spełniona dla

$$\gamma_{ij} = \left(\eta_j\cdot\mathrm{Inv}\circ\eta_i\right)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}}\,,\quad (i,j)\in\left\langle I^{\times 2}\right\rangle_{\mathscr{O}}\,,$$

gdzie

$$\eta_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \jmath_\Gamma(\Gamma)\,, \quad i \in I$$

są pewnymi odwzorowaniami lokalnie stałymi.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\widehat{g}^\alpha_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}},\ (i,j) \in \langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}},\ \alpha \in \{1,2\}$ będą odwzorowaniami przejścia wiązek głównych $\mathsf{P}^\alpha_{\widehat{\mathrm{G}}},\ \alpha \in \{1,2\}$ wyznaczających prolongacje wiązki głównej P_{G} i niech

$$\widehat{\gamma}^\alpha_{ij} = \widehat{h}^\alpha_i \cdot \widehat{g}^\alpha_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{h}^\alpha_j \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}} \tag{9}$$

będą odwzorowaniami, o których mowa w Tw. 6, stowarzyszonymi z nimi zgodnie z Równ. (6). Jako że

$$\widehat{\varphi} \circ \big(\widehat{\gamma}^2_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{\gamma}^1_{ij}\big) = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}^2_{ij} \cdot \widehat{\varphi} \circ \mathrm{Inv} \circ \widehat{\gamma}^1_{ij} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}^2_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}^1_{ij} = g_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ g_{ij} = e_{\mathrm{G}}\,,$$

a przy tym $\mathrm{Ker}\,\widehat{\varphi} = \mathrm{Image}\,\jmath_\Gamma$, przeto z powyższej równości wynika istnienie odwzorowań lokalnie stałych

$$\gamma^{12}_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \jmath_\Gamma(\Gamma)\,, \quad (i,j) \in \langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}$$

o własności

$$\widehat{\gamma}^2_{ij} = \gamma^{12}_{ij} \cdot \widehat{\gamma}^1_{ij}\,.$$

Na jej podstawie wyprowadzamy – w zapisie Uwagi 4 – tożsamość (por.: dowód Tw. 6)

$$\check{\delta}\gamma^{12}_{ijk} = e_{\widehat{\mathrm{G}}}\,.$$

Przywoławszy definicje (9), ustalamy postulowaną relację

$$\begin{aligned}
\widehat{g}^2_{ij} &= \mathrm{Inv} \circ \widehat{h}^2_i \cdot \widehat{\gamma}^2_{ij} \cdot \widehat{h}^2_j = \gamma^{12}_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{h}^2_i \cdot \widehat{\gamma}^1_{ij} \cdot \widehat{h}^2_j \\
&= \gamma^{12}_{ij} \cdot \big(\mathrm{Inv} \circ \widehat{h}^2_i \cdot \widehat{h}^1_i\big) \cdot \big(\mathrm{Inv} \circ \widehat{h}^1_i \cdot \widehat{\gamma}^1_{ij} \cdot \widehat{h}^1_j\big) \cdot \mathrm{Inv} \circ \big(\mathrm{Inv} \circ \widehat{h}^2_j \cdot \widehat{h}^1_j\big) \\
&= \gamma^{12}_{ij} \cdot \big(\mathrm{Inv} \circ \widehat{h}^2_i \cdot \widehat{h}^1_i\big) \cdot \widehat{g}^1_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \big(\mathrm{Inv} \circ \widehat{h}^2_j \cdot \widehat{h}^1_j\big)\,,
\end{aligned}$$

w której identyfikujemy odwzorowania

$$\widehat{h}_i = \mathrm{Inv} \circ \widehat{h}^2_i \cdot \widehat{h}^1_i\,, \qquad \gamma_{ij} = \gamma^{12}_{ij}$$

o pożądanych własnościach.

Następnie przypuśćmy, odwrotnie, że są dane odwzorowania $\widehat{h}_i$ i γ_{ij} o własnościach wypisanych w treści dowodzonego twierdzenia, które w połączeniu z odwzorowaniami przejścia $\widehat{g}^1_{ij}$ wiązki głównej $\mathsf{P}^1_{\widehat{\mathrm{G}}}$ zadającej prolongację wiązki P_{G} definiują odwzorowania $\widehat{g}^2_{ij} = \gamma_{ij} \cdot \big(\widehat{h}_i \cdot \widehat{g}^1_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{h}_j\big),\ (i,j) \in \langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}$. Te ostatnie spełniają warunek 1-kocyklu – dla dowolnych $(i,j,k) \in \langle I^{\times 3}\rangle_{\mathscr{O}}$ –

$$\check{\delta}\widehat{g}^2_{ijk} = \check{\delta}\gamma_{ijk} \cdot \big(\widehat{h}_j \cdot \check{\delta}\widehat{g}^1_{ijk} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{h}_j\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{\mathrm{G}}} \cdot \big(\widehat{h}_j \cdot e_{\widehat{\mathrm{G}}} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{h}_j\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{\mathrm{G}}}\,,$$

zatem określają – na mocy Tw. 2-3-4.2 – wiązkę główną $(\mathsf{P}^2_{\widehat{\mathrm{G}}}, B, \widehat{\mathrm{G}}, [\mathrm{pr}_1])$ o grupie strukturalnej $\widehat{\mathrm{G}}$, przestrzeni totalnej

$$\mathsf{P}^2_{\widehat{\mathrm{G}}} \equiv \Big(\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \widehat{\mathrm{G}})\Big)/_{\sim_{\widehat{\gamma}^2_{..}}}$$

i odwzorowaniach przejścia $\widehat{\gamma}^2_{ij}$ pomiędzy trywializacjami lokalnymi $[\tau_i]$ wskazanymi w dowodzie tegoż twierdzenia. Niechaj $h^1_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G},\ i \in I$ będą danymi lokalnymi morfizmu prolongacji $\Phi_1 \;:\; \mathsf{P}^1_{\widehat{\mathrm{G}}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ określonymi w ścisłej analogii do Równ. (5), tj. poprzez równości

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{g}^1_{ij} = \big(\mathrm{Inv} \circ h_i \cdot g_{ij} \cdot h_j\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}}\,,$$

a wtedy używamy odwzorowań

$$h^{12}_i := h^1_i \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{h}_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}\,, \quad i \in I\,,$$

aby na przestrzeni totalnej $\mathsf{P}^2_{\widehat{\mathrm{G}}}$ zadać odwzorowania lokalnie gładkie

$$\Phi_i \;:\; [\mathrm{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \widehat{\mathrm{G}} \xrightarrow{\mathrm{id}_B \times \ell_{h_i^{12}} \circ \widehat{\varphi}} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \xrightarrow{\tau_i^{\mathrm{G}\,-1}} \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)\,, \quad i \in I\,,$$

odwzorowujące włókna $\mathsf{P}^2_{\widehat{\mathrm{G}}}$ we włókna P_{G} w sposób jawnie $\widehat{\mathrm{G}}$-ekwiwariantny, czego dowodzi bezpośredni rachunek, wykonany nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}_i$ i dla dowolnych elementów $\widehat{g}, \widehat{h} \in \widehat{\mathrm{G}}$,

$$\begin{aligned}
&\Phi_i\big([(x,i,\widehat{g})] \triangleleft_{\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}} \widehat{h}\big) = \Phi_i\big([(x,i,\widehat{g} \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{h})]\big) = \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, h_i^{12}(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g} \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{h})\big) \\
= \;& \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, h_i^{12}(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{h})\big) = \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, h_i^{12}(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g})\big) \triangleleft_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \widehat{\varphi}(\widehat{h}) \\
\equiv \;& \Phi_i\big([(x,i,\widehat{g})]\big) \triangleleft_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \widehat{\varphi}(\widehat{h})\,.
\end{aligned}$$

O istnieniu odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi \;:\; \mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

spełniającego warunki

$$\Phi \restriction_{[\mathrm{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$$

przesądza bezpośredni rachunek, przeprowadzony dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$, $(i,j) \in \big\langle I^{\times 2} \big\rangle_{\mathscr{O}}$ i $\widehat{g} \in \widehat{\mathrm{G}}$:

$$\begin{aligned}
&\Phi_j\big([(x,i,\widehat{g})]\big) = \Phi_j\big([(x,j,\widehat{g}^2_{ji}(x) \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{g})]\big) \\
\equiv \;& \tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, h_j^{12}(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}^2_{ji}(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g})\big) \\
= \;& \tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, h_j^1(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}\big(\widehat{h}_j(x)^{-1} \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{h}_j(x) \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{g}^1_{ji}(x) \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{h}_i(x)^{-1}\big) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g})\big) \\
= \;& \tau_j^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, h_j^1(x) \cdot_{\mathrm{G}} h_j^1(x)^{-1} \cdot_{\mathrm{G}} g_{ji}(x) \cdot_{\mathrm{G}} h_i^1(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}\big(\widehat{h}_i(x)^{-1}\big) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g})\big) \\
= \;& \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, h_i^1(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}\big(\widehat{h}_i(x)^{-1}\big) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g})\big) \equiv \tau_i^{\mathrm{G}\,-1}\big(x, h_i^{12}(x) \cdot_{\mathrm{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g})\big) \\
\equiv \;& \Phi_i\big([(x,i,\widehat{g})]\big)\,.
\end{aligned}$$

Wraz z podaną wcześniej definicją wiązki głównej $\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}$ morfizm ten określa poszukiwaną prolongację wiązki P_{G}.

Na zakończenie zajmiemy się opisem lokalnym prolongacji (nie)równoważnych. Niechaj więc $\mathsf{P}^\alpha_{\widehat{\mathrm{G}}}$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą dwiema wiązkami głównymi współdefiniującymi prolongacje wiązki P_{G}, o odnośnych odwzorowaniach przejścia $\widehat{g}^\alpha_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}}$, $(i,j) \in \big\langle I^{\times 2} \big\rangle_{\mathscr{O}}$, przy czym założymy, że istnieje morfizm wiązek głównych $\Psi \;:\; \mathsf{P}^1_{\widehat{\mathrm{G}}} \longrightarrow \mathsf{P}^2_{\widehat{\mathrm{G}}}$ pokrywający identyczność na bazie. W świetle Tw. 5-6.2 dane lokalne $\widehat{h}_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}}$, $i \in I$ takiego morfizm zadają relację między odwzorowaniami przejścia w postaci

$$\widehat{g}^2_{ij} = \big(\widehat{h}_i \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \widehat{g}^1_{ij} \cdot_{\widehat{\mathrm{G}}} \mathrm{Inv} \circ \widehat{h}_j\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}}\,, \quad (i,j) \in \big\langle I^{\times 2} \big\rangle_{\mathscr{O}}$$

to jednak oznacza, że dla dowolnej pary $(i,j) \in \big\langle I^{\times 2} \big\rangle_{\mathscr{O}}$ mamy

$$\gamma_{ij} \equiv e_{\widehat{\mathrm{G}}}$$

i możemy położyć

$$\eta_i = e_{\widehat{\mathrm{G}}} \in \jmath_\Gamma(\Gamma)\,, \quad i \in I\,.$$

Odwracając bieg rozumowania, rozpatrzmy parę prolongacji o odwzorowaniach przejścia powiązanych relacją (8), w której odwzorowania lokalnie stałe $\gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \mathrm{Inv} \circ \eta_i)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}}$, $(i,j) \in \big\langle I^{\times 2} \big\rangle_{\mathscr{O}}$ są wyznaczane przez takież odwzorowania $\eta_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \jmath_\Gamma(\Gamma)$, $i \in I$. Wykorzystując inkluzję $\jmath_\Gamma(\Gamma) \subset \mathscr{Z}(\widehat{\mathrm{G}})$, przepisujemy Równ. (8) w postaci

$$\widehat{g}^2_{ij} = \big(\big(\mathrm{Inv} \circ \eta_i \cdot \widehat{h}_i\big) \cdot \widehat{g}^1_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \big(\mathrm{Inv} \circ \eta_j \cdot \widehat{h}_j\big)\big)\restriction_{\mathcal{O}_{ij}}\,,$$

z której odczytujemy – ponownie w odwołaniu do Tw. 5-6.2 – dane lokalne morfizmu wiązek głównych

$$\widetilde{h}_i := \mathrm{Inv} \circ \eta_i \cdot \widehat{h}_i \ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}}\,, \quad i \in I\,.$$

Teza Stw. 5-6.4 przesądza, że jest to w istocie izomorfizm, i tym samym zamyka dowód. □

Uwaga 5. Należy odnotować, że skwantyfikowana w powyższym twierdzeniu w Równ. (8) swoboda redefinicji odwzorowań przejścia $\widehat{g}^1_{ij}$ w wiązce głównej $\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}$ określającej prolongację wiązki wyjściowej P_{G} obejmuje wszelkie wybory dowolne, przed jakimi stawia nas procedura prolongacji. Istotnie, uwzględnia ona możliwość przetransformowania wiązki $\mathsf{P}_{\widehat{\mathrm{G}}}$ wzdłuż dowolnego morfizmu wiązek głównych o grupie strukturalnej $\widehat{\mathrm{G}}$,

$$\widehat{g}^1_{ij} \longmapsto \widehat{h}_i \cdot \widehat{g}^1_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \widehat{h}_j\,, \quad \widehat{h}_i \ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}}\,,$$

zmiany wyboru podniesienia odwzorowań przejścia na P_{G} zgodnej ze strukturą rozszerzenia centralnego,

$$\widehat{g}^1_{ij} \longmapsto \gamma_{ij} \cdot \widehat{g}^1_{ij}\,, \quad \gamma_{ij} \ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \jmath_\Gamma(\Gamma)\,,$$

a nawet – spójnie ze Stw. 5-6.4 – możliwość przekształcenia wzdłuż dowolnego morfizmu wyjściowej wiązki głównej P_{G}.

Wreszcie też na zakończenie warto podsumować wyniki naszych dociekań w formie

Wnioski 4. *Ilościową miarą swobody nierównoważnych wyborów prolongacji wiązki głównej* $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ *wzdłuż rozszerzenia centralnego* $(\widehat{\mathrm{G}}, \jmath_\Gamma, \varphi)$ *jest określonych nad dowolnie rozdrobnionym pokryciem trywializującym* $\mathscr{O}$ *grupa przemienna klas zdefiniowanych w Tw. 7 danych lokalnych* $\{\ \gamma_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \jmath_\Gamma(\Gamma)\ \}_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}}$, *spełniających warunek 1-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k)\in\langle I^{\times 3}\rangle_{\mathscr{O}}}\ :\ \check{\delta}\gamma_{ijk} = e_{\widehat{\mathrm{G}}}\,,$$

względem relacji równoważności

$$\gamma^2_{..} \sim_{\check{\delta}} \gamma^1_{..} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists_{\{\ \eta_i\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \jmath_\Gamma(\Gamma)\ \}_{i\in I}}\ \forall_{(i,j)\in\langle I^{\times 2}\rangle_{\mathscr{O}}}\ :\ \gamma^2_{ij} = \gamma^1_{ij} \cdot \check{\delta}\eta_{ij}\,.$$

Grupę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia) określamy mianem ***grupy klasyfikującej prolongacji*** *wiązki głównej* $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ *wzdłuż rozszerzenia centralnego* $(\widehat{\mathrm{G}}, \jmath_\Gamma, \varphi)$. *Zbiór klas równoważności prolongacji jest grupy tej torsorem.*

Dodatek A. Krótkie i trochę dłuższe ciągi dokładne grup

Niechaj G będzie grupą, $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ zaś – jej podgrupą normalną (tj. taką, która spełnia warunek $\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \mathrm{Ad}_g(\mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$), i niech $\jmath_{\mathrm{H}}\ :\ \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}$ będzie włożeniem kanonicznym, a $\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}\ :\ \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{H}$ – rzutem kanonicznym na grupę ilorazową. Para homomorfizmów $(\jmath_{\mathrm{H}}, \pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}})$, którą zapiszemy w postaci

$$\mathrm{H} \xrightarrow{\ \jmath_{\mathrm{H}}\ } \mathrm{G} \xrightarrow{\ \pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}\ } \mathrm{G}/\mathrm{H}$$

spełnia oczywistą relację

$$\mathrm{Ker}\,\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} = \mathrm{Image}\,\jmath_{\mathrm{H}}\,,$$

wyrażającą klasyczne utożsamienie pomiędzy dzielnikami normalnymi grup a jądrami homomorfizmów tychże. Jej naturalną abstrakcję opisuje

Definicja 8. Niechaj $\mathrm{G}_\alpha,\ \alpha \in \{1,2,3\}$ będzie trójką grup i niech $\chi_\beta\ :\ \mathrm{G}_\beta \longrightarrow \mathrm{G}_{\beta+1}, \beta \in \{1,2\}$ będzie parą homomorfizmów grup. Piątkę

$$\mathrm{G}_1 \xrightarrow{\ \chi_1\ } \mathrm{G}_2 \xrightarrow{\ \chi_2\ } \mathrm{G}_3$$

nazywamy **ciągiem dokładnym** (**grup**), jeżeli

$$\mathrm{Ker}\,\chi_2 = \mathrm{Image}\,\chi_1\,.$$

Ogólniej, rodzina grup i stowarzyszonych homomorfizmów opisana diagramem

$$\mathrm{G}_1 \xrightarrow{\chi_1} \mathrm{G}_2 \xrightarrow{\chi_2} \cdots \xrightarrow{\chi_{n-1}} \mathrm{G}_n$$

nosi miano ciągu dokładnego, jeśli

$$\forall_{k\in\overline{1,n-2}} \ : \ \mathrm{Ker}\,\chi_{k+1} = \mathrm{Image}\,\chi_k \,.$$

Krótki ciąg dokładny to ciąg dokładny szczególnej postaci

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{G}_1 \xrightarrow{\chi_1} \mathrm{G}_2 \xrightarrow{\chi_2} \mathrm{G}_3 \longrightarrow \mathbf{1}\,,$$

w którym ($\mathbf{1}$ jest grupą trywialną i) spełniona jest koniunkcja warunków:

(1) χ_1 jest monomorfizmem;
(2) χ_2 jest epimorfizmem;
(3) $\mathrm{Ker}\,\chi_2 = \mathrm{Image}\,\chi_1$.

Trójkę $(\mathrm{G}_2, \chi_1, \chi_2)$ nazywamy wtedy **rozszerzeniem grupy** G_3 **przez grupę** G_1. Przy tym ilekroć $\mathrm{Image}\,\chi_1 \subset \mathscr{Z}(\mathrm{G}_2)$, mówimy o **rozszerzeniu centralnym**[1] (możliwym wtedy tylko, gdy G_1 jest przemienna).

Przykłady 1. Niechaj G będzie dowolną grupą, $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ zaś – jej dzielnikiem normalnym. Wówczas diagram

$$\mathbf{1} \longrightarrow H \xrightarrow{\jmath_{\mathrm{H}}} \mathrm{G} \xrightarrow{\pi_{\mathrm{G/H}}} \mathrm{G/H} \longrightarrow \mathbf{1} \tag{10}$$

zadaje krótki ciąg dokładny, zwany **normalnym ciągiem dokładnym**. Ważnym przykładem takiego ciągu jest

$$\mathbf{1} \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\jmath_{2\pi\mathbb{Z}}} \mathbb{R} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{1}\,.$$

Wobec oczywistej relacji

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot} = 2\pi\mathbb{Z}$$

wypisanej dla epimorfizmu grup $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot} \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{U}(1) \ : \ r \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,r}$, otrzymujemy izomorfizm

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1)\,,$$

którego istnienie pozwala przepisać powyższy normalny ciąg dokładny w postaci powszechnie spotykanej w literaturze, tj.

$$\mathbf{1} \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathbf{1}\,.$$

Ciągi dokładne grup odgrywają istotną rolę w algebrze homologicznej. Poniżej zademonstrujemy ich przydatność i naturalność w opisie struktury nader powszechnie stosowanej w matematycznym modelowaniu zjawisk (w szczególności w kontekście opisu symetrii układów fizykalnych), a stanowiącej naturalne uogólnienie struktury produktu grup. Ażeby zrozumieć właściwie sens owego uogólnienia, przeformułujemy definicję produktu pary grup $(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$ przy użyciu stosownego krótkiego ciągu dokładnego, a mianowicie:

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{G}_1 \xrightarrow{\jmath_1} \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathbf{1}\,,$$

w którego zapisie $\jmath_1 \ : \ \mathrm{G}_1 \longrightarrow \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \ : \ g_1 \longmapsto (g_1, e_2)$ jest zanurzeniem kanonicznym. Zauważmy, że w tym przypdku istnieją homomorfizmy grup $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2, \mathrm{G}_1)$ oraz $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathrm{G}_2, \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2)$ o własnościach

$$\rho \circ \jmath_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{G}_1}\,, \qquad \mathrm{pr}_2 \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{G}_2}\,.$$

Są nimi odwzorowania

$$\rho \equiv \mathrm{pr}_1 \ : \ \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathrm{G}_1 \ : \ (g_1, g_2) \longmapsto g_1$$

oraz

$$\sigma \equiv \jmath_2 \ : \ \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \ : \ g_2 \longmapsto (e_1, g_2)\,.$$

[1] Rozszerzenia centralne grup odgrywają istotną rolę w (kwantowo)mechanicznych i teoriopolowych realizacjach symetrii.

Powstaje naturalne pytanie o pojemność strukturalną tego ostatniego warunku w oderwaniu od jego powyższej szczególnej (i dość trywialnej) instancjacji. Droga do precyzyjnej odpowiedzi na to pytanie wiedzie przez poniższą

Definicja 9. Niechaj $(\mathrm{G}_\alpha, \cdot_\alpha, \mathrm{Inv}_\alpha, \bullet \longmapsto e_\alpha)$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą grupami, $\varphi_\cdot : \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_1)$ zaś – homomorfizmem grup. **Iloczyn półprosty grup** G_1 i G_2 **prawo-stowarzyszony z automorfizmem** φ to grupa

$$\left(\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2, m_{\varphi_\cdot} \equiv \cdot_{\varphi_\cdot}, \mathrm{Inv}_{\varphi_\cdot}, \bullet \longmapsto (e_1, e_2)\right),$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} m_{\varphi_\cdot} \quad &: \quad (\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2)^{\times 2} \longrightarrow \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \\ &: \quad \big((g_1, g_2), (h_1, h_2)\big) \longmapsto \big(g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2\big) \end{aligned}$$

i odwrotnością

$$\mathrm{Inv}_{\varphi_\cdot} : \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \circlearrowleft : (g_1, g_2) \longmapsto \big(\varphi_{\mathrm{Inv}_2(g_2)} \circ \mathrm{Inv}_1(g_1), \mathrm{Inv}_2(g_2)\big).$$

Iloczyn kartezjański grup z tak zadaną strukturą grupy oznaczamy symbolem

$$\mathrm{G}_1 \rtimes_{\varphi_\cdot} \mathrm{G}_2 .$$

Iloczyn półprosty grup G_1 i G_2 **lewo-stowarzyszony z automorfizmem** φ to grupa

$$\left(\mathrm{G}_2 \times \mathrm{G}_1, {}_{\varphi_\cdot}m \equiv {}_{\varphi_\cdot}\cdot, {}_{\varphi_\cdot}\mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto (e_1, e_2)\right),$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} {}_{\varphi_\cdot}m \quad &: \quad (\mathrm{G}_2 \times \mathrm{G}_1)^{\times 2} \longrightarrow \mathrm{G}_2 \times \mathrm{G}_1 \\ &: \quad \big((g_2, g_1), (h_2, h_1)\big) \longmapsto \big(g_2 \cdot_2 h_2, \varphi_{\mathrm{Inv}_2(h_2)}(g_1) \cdot_1 h_1\big) \end{aligned}$$

i odwrotnością

$${}_{\varphi_\cdot}\mathrm{Inv} : \mathrm{G}_2 \times \mathrm{G}_1 \circlearrowleft : (g_2, g_1) \longmapsto \big(\mathrm{Inv}_2(g_2), \varphi_{g_2} \circ \mathrm{Inv}_1(g_1)\big).$$

Iloczyn kartezjański grup z tak zadaną strukturą grupy oznaczamy symbolem

$$\mathrm{G}_2 \, {}_{\varphi_\cdot}\!\ltimes \mathrm{G}_1 .$$

Uwaga 6. O tym, że w istocie mamy do czynienia ze strukturą grupową, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku – tutaj tylko dla iloczynu prawo-stowarzyszonego (dla przykładu) – wykorzystującym zarówno homomorficzny charakter $\varphi_\cdot$,

$$\forall_{g,h \in \mathrm{G}_2} : \varphi_{g \cdot_2 h} = \varphi_g \circ \varphi_h ,$$

jak i automorficzny charakter obrazu względem tego odwzorowania dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}_2$,

$$\forall_{(g,h_1,h_2) \in \mathrm{G}_2 \times \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_1} : \varphi_g(h_1 \cdot_1 h_2) = \varphi_g(h_1) \cdot_1 \varphi_g(h_2) .$$

Te warunki pozwalają nam sprawdzić – dla dowolnych $(g_1, g_2), (h_1, h_2), (k_1, k_2) \in \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ – wszystkie aksjomaty grupy, więc łączność mnożenia,

$$\begin{aligned} &\big((g_1, g_2) \cdot_{\varphi_\cdot} (h_1, h_2)\big) \cdot_{\varphi_\cdot} (k_1, k_2) = \big(g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2\big) \cdot_{\varphi_\cdot} (k_1, k_2) \\ = \quad &\big(g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1) \cdot_1 \varphi_{g_2 \cdot_2 h_2}(k_1), g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 k_2\big) = \big(g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}\big(h_1 \cdot_1 \varphi_{h_2}(k_1)\big), g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 k_2\big) \\ \equiv \quad &(g_1, g_2) \cdot_{\varphi_\cdot} \big(h_1 \cdot_1 \varphi_{h_2}(k_1), h_2 \cdot_2 k_2\big) \equiv (g_1, g_2) \cdot_{\varphi_\cdot} \big((h_1, h_2) \cdot_{\varphi_\cdot} (k_1, k_2)\big), \end{aligned}$$

neutralność pary (e_1, e_2),

$$(g_1, g_2) \cdot_{\varphi_\cdot} (e_1, e_2) = \big(g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(e_1), g_2 \cdot_2 e_2\cdot\big) = (g_1 \cdot_1 e_1, g_2 \cdot_2 e_2) = (g_1, g_2),$$

$$\begin{aligned} &(e_1, e_2) \cdot_{\varphi_\cdot} (g_1, g_2) = \big(e_1 \cdot_1 \varphi_{e_2}(g_1), e_2 \cdot_2 g_2\big) = \big(e_1 \cdot_1 \mathrm{id}_{\mathrm{G}_1}(g_1), e_2 \cdot_2 g_2\big) \\ = \quad &(e_1 \cdot_1 g_1, e_2 \cdot_2 g_2) = (g_1, g_2) \end{aligned}$$

oraz fundamentalną własność odwrotności,

$$\begin{aligned}&(g_1, g_2) \cdot_{\varphi.} \big(\varphi_{g_2^{-1}}\big(g_1^{-1}\big), g_2^{-1}\big) = \big(g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_2^{-1}}\big(g_1^{-1}\big), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}\big)\\ = \ &\big(g_1 \cdot_1 \varphi_{e_2}\big(g_1^{-1}\big), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}\big) = \big((g_1 \cdot_1 \mathrm{id}_{\mathrm{G}_1}\big(g_1^{-1}\big), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}\big) = \big(g_1 \cdot_1 g_1^{-1}, g_2 \cdot_2 g_2^{-1}\big)\\ = \ &(e_1, e_2)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\big(\varphi_{g_2^{-1}}\big(g_1^{-1}\big), g_2^{-1}\big) \cdot_{\varphi.} (g_1, g_2) = \big(\varphi_{g_2^{-1}}\big(g_1^{-1}\big) \cdot_1 \varphi_{g_2^{-1}}(g_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2\big)\\ = \ &\big(\varphi_{g_2^{-1}}\big(g_1^{-1} \cdot_1 g_1\big), g_2^{-1} \cdot_2 g_2\big) = \big(\varphi_{g_2^{-1}}(e_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2\big) = (e_1, e_2)\,.\end{aligned}$$

Obie formy iloczynu półprostego pozostają w prostej relacji wzajemnej, o czym przekonuje

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 9. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup między iloczynami półprostymi: prawo- i lewo-stowarzyszonymi danej pary grup (przy ustalonym homomorfizmie φ), który przybiera postać

$$\tau_\varphi \ :\ \mathrm{G}_2 \ {}_{\varphi.}\!\ltimes \mathrm{G}_1 \xrightarrow{\cong} \mathrm{G}_1 \rtimes_{\varphi.} \mathrm{G}_2 \ :\ (g_2, g_1) \longmapsto \big(\varphi_{g_2}(g_1), g_2\big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Zapostulowane odwzorowanie jest jawnie odwracalne, oto bowiem odwzorowanie odwrotne do niego to

$$\tau_\varphi^{-1} \ :\ \mathrm{G}_1 \rtimes_{\varphi.} \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathrm{G}_2 \ {}_{\varphi.}\!\ltimes \mathrm{G}_1 \ :\ (g_1, g_2) \longmapsto \big(g_2, \varphi_{\mathrm{Inv}_2(g_2)}(g_1)\big)\,.$$

Wystarczy zatem sprawdzić warunek definiujący homomorfizm, co czynimy w bezpośrednim rachunku, dla dowolnych $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$,

$$\begin{aligned}\tau_\varphi(g_2, g_1) \cdot_\varphi \tau_\varphi(h_2, h_1) \ &= \ \big(\varphi_{g_2}(g_1), g_2\big) \cdot_\varphi \big(\varphi_{h_2}(h_1), h_2\big)\\ &= \ \big(\varphi_{g_2}(g_1) \cdot_1 \varphi_{g_2} \circ \varphi_{h_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2\big)\\ &= \ \big(\varphi_{g_2 \cdot_2 h_2}\big(\varphi_{h_2^{-1}}(g_1) \cdot_1 h_1\big), g_2 \cdot_2 h_2\big)\\ &\equiv \ \tau_\varphi\big(g_2 \cdot_2 h_2, \varphi_{h_2^{-1}}(g_1) \cdot_1 h_1\big)\\ &\equiv \ \tau_\varphi\big((g_2, g_1)_{\varphi.} \cdot (h_2, h_1)\big)\,.\end{aligned}$$

□

Powyższe stwierdzenie pozwala nam skupić się w dalszej części dyskusji na jednej z form, np. na formie prawo-stowarzyszonej, a obserwacje poczynione w odniesieniu do niej przetłumaczą się prosto na obserwacje dotyczące drugiej z form za pośrednictwem znalezionego izomorfizmu. Definicja iloczynu półprostego pozwala sformułować oczekiwane

Twierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Def. 8 oraz 9 i niechaj $(\mathrm{G}_\alpha, \cdot_\alpha, \mathrm{Inv}_\alpha, \bullet \longmapsto e_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą grupami. Istnienie krótkiego ciągu dokładnego grup

(11) $$\mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{G}_1 \xrightarrow{\chi_1} \mathrm{G}_2 \xrightarrow{\chi_2} \mathrm{G}_3 \longrightarrow \mathbf{1}\,,$$

wraz z parą homomorfizmów grup

$$\rho \ :\ \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathrm{G}_1\,, \qquad\qquad \sigma \ :\ \mathrm{G}_3 \longrightarrow \mathrm{G}_2$$

o własnościach

(12) $$\rho \circ \chi_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{G}_1}$$

i

(13) $$\chi_2 \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{G}_3}$$

jest równoważne istnieniu homomorfizmu grup $\varphi : G_3 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_1)$ oraz izomorfizmu grup

$$\imath : G_2 \xrightarrow{\cong} G_1 \rtimes_\varphi G_3 .$$

Homomorfizm ρ nazywamy **retrakcją** χ_1, a σ – **cięciem** χ_2.

Dowód: Niechaj będzie dany krótki ciąg dokładny (11) z retrakcją ρ i cięciem σ. Wykorzystując warunek (13), obliczamy – dla dowolnego elementu $g_2 \in G_2$ –

$$\begin{aligned}\chi_2\big(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \mathrm{Inv}_2(g_2)\big) &= \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma \circ \chi_2 \circ \mathrm{Inv}_2(g_2) \\ &= \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2 \circ \mathrm{Inv}_2(g_2) = \chi_2\big(g_2 \cdot_2 \mathrm{Inv}_2(g_2)\big) = \chi_2(e_2) \\ &= e_3 ,\end{aligned}$$

a stąd wniosek, że

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \mathrm{Inv}_2(g_2) \in \mathrm{Ker}\, \chi_2 ,$$

czyli też – z racji założonej dokładności ciągu (w G_2) –

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \mathrm{Inv}_2(g_2) \in \mathrm{Image}\, \chi_1 .$$

Wobec injektywności χ_1 możemy zatem zdefiniować odwzorowanie

$$\begin{aligned}\imath \quad : \quad G_2 \longrightarrow G_1 \times G_3 \ : \ g_2 \longmapsto &\Big(\chi_1{\restriction}^{-1}_{\mathrm{Image}\,\chi_1}\big(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \mathrm{Inv}_2(g_2)\big), \chi_2(g_2)\Big) \\ &\equiv \big(\xi(g_2), \chi_2(g_2)\big) .\end{aligned}$$

Przekonamy się najpierw, że jest ono postulowanym homomorfizmem grup, przy czym dyskusja tej ewentualności doprowadzi nas wprost do definicji stosownego homomorfizmu φ. Dla dowolnych $g_2, h_2 \in G_2$ wyznaczamy

$$\begin{aligned}&\imath(g_2 \cdot_2 h_2) = \Big(\chi_1{\restriction}^{-1}_{\mathrm{Image}\,\chi_1}\big(g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2\big(h_2^{-1} \cdot_2 g_2^{-1}\big)\big), \chi_2(g_2 \cdot_2 h_2)\Big) \\ = \ &\Big(\chi_1{\restriction}^{-1}_{\mathrm{Image}\,\chi_1}\big(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2\big(g_2^{-1}\big) \cdot_2 \mathrm{Ad}_{\sigma\circ\chi_2(g_2)}\big(h_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2\big(h_2^{-1}\big)\big)\big), \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2(h_2)\Big) \\ \equiv \ &\Big(\chi_1{\restriction}^{-1}_{\mathrm{Image}\,\chi_1}\big(\chi_1 \circ \xi(g_2) \cdot_2 \mathrm{Ad}_{\sigma\circ\chi_2(g_2)} \circ \chi_1 \circ \xi(h_2)\big), \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2(h_2)\Big) ,\end{aligned}$$

a ponieważ dla każdych $(g_1, g_3) \in G_1 \times G_3$ zachodzi

$$\chi_2\big(\mathrm{Ad}_{\sigma(g_3)} \circ \chi_1(g_1)\big) = \chi_2 \circ \sigma(g_3) \cdot_3 \chi_2 \circ \chi_1(g_1) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma\big(g_3^{-1}\big) = g_3 \cdot_3 e_3 \cdot_3 g_3^{-1} = e_3 ,$$

przeto możemy przepisać powyższe w sugestywnej postaci

$$\imath(g_2 \cdot_2 h_2) = \Big(\xi(g_2) \cdot_1 \big(\chi_1{\restriction}^{-1}_{\mathrm{Image}\,\chi_1} \circ \mathrm{Ad}_{\sigma\circ\chi_2(g_2)} \circ \chi_1\big) \circ \xi(h_2), \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2(h_2)\Big) .$$

Zważywszy, że obraz G_3 względem odwzorowania

$$\chi_1{\restriction}^{-1}_{\mathrm{Image}\,\chi_1} \circ \mathrm{Ad}_{\sigma(\cdot)} \circ \chi_1 \ : \ G_3 \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{Grp}}(G_1) \ : \ g_3 \longmapsto \chi_1{\restriction}^{-1}_{\mathrm{Image}\,\chi_1} \circ \mathrm{Ad}_{\sigma(g_3)} \circ \chi_1$$

w oczywisty sposób zawiera się w podzbiorze $\mathrm{Aut}(G_1) \subset \mathrm{End}_{\mathbf{Grp}}(G_1)$, możemy ostatecznie – na podstawie porównania wyniku naszych rachunków z formułą na m_φ w Def. 9 – zapisać

$$\imath(g_2 \cdot_2 h_2) = \imath(g_2) \cdot_{\chi_1{\restriction}^{-1}_{\mathrm{Image}\,\chi_1} \circ \mathrm{Ad}_{\sigma(\cdot)} \circ \chi_1} \imath(h_2) .$$

Odwzorowanie $\imath$ zostało skonstruowane jako homomorfizm grup, na obecnym etapie pozostaje przeto jedynie przekonać się o bijektywnym charakterze $\imath$. Po pierwsze więc równość

$$\imath(g_2) = (e_1, e_3)$$

oznacza parę równości

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2\big(g_2^{-1}\big) = \chi_1(e_1) = e_2 \qquad \wedge \qquad \chi_2(g_2) = e_3 ,$$

które możemy przepisać w postaci równoważnej

$$g_2 = \sigma\big(\chi_2(g_2)\big) \qquad \wedge \qquad \chi_2(g_2) = e_3 ,$$

otrzymując tym sposobem równość

$$g_2 = \sigma(e_3) = e_2\,,$$

przesądzającą o injektywności $\imath$. Dla dowolnej pary $(g_1, g_3) \in \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_3$ wybierzmy dowolne $g_2 \in \mathrm{G}_2$ o własności $\chi_2(g_2) = g_3$ (co jest możliwe z racji surjektywności χ_2), po czym z jego warstwy $g_2 \operatorname{Ker}\chi_2 = g_2 \operatorname{Image}\chi_1$ wybierzmy reprezentanta $g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1)$, $h_1 \in \mathrm{G}_1$, który spełnia dodatkowy warunek

$$g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2\big(\chi_1\big(h_1^{-1}\big) \cdot_2 g_2^{-1}\big) \overset{!}{=} \chi_1(g_1)\,.$$

Ażeby przekonać się o tym, że reprezentant taki istnieje, upraszczamy powyższy warunek – wykorzystując po drodze dokładność ciągu (11) w G_2 – do postaci

$$g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2)^{-1} \overset{!}{=} \chi_1(g_1)$$

albo równoważnej

$$\chi_1(h_1) \overset{!}{=} g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2)\,.$$

Bezpośredni rachunek

$$\begin{aligned} \chi_2\big(g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2)\big) &= \chi_2(g_2)^{-1} \cdot_3 \chi_2 \circ \chi_1(g_1) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma \circ \chi_2(g_2) \\ &= \chi_2(g_2)^{-1} \cdot_3 e_3 \cdot_3 \chi_2(g_2) = e_3\,, \end{aligned}$$

w którym raz jeszcze przywołujemy dokładność ciągu (11) w G_2 oraz warunek definiujący σ, przesądza o istnieniu h_1, oto bowiem pozwala on stwierdzić, że

$$g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2) \in \operatorname{Ker}\chi_2 = \operatorname{Image}\chi_1\,.$$

Znaleziony przez nas element $\widetilde{g}_2 := g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1)$ spełnia koniunkcję warunków

$$\chi_2(\widetilde{g}_2) = g_3 \qquad \wedge \qquad \widetilde{g}_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2\big(\widetilde{g}_2^{-1}\big) = \chi_1(g_1)\,,$$

więc też jego obrazem względem $\imath$ jest

$$\imath(\widetilde{g}_2) = \big(\chi_1{\restriction}_{\operatorname{Image}\chi_1}^{-1} \circ \chi_1(g_1), g_3\big) = (g_1, g_3)\,.$$

To kończy dowód pierwszej implikacji.

I odwrotnie, niechaj $\varphi_{\cdot} : \mathrm{G}_3 \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathrm{G}_1)$ będzie homomorfizmem grup zadającym strukturę iloczynu półprostego na $\mathrm{G}_1 \rtimes_{\varphi_{\cdot}} \mathrm{G}_3$ i niech $\imath : \mathrm{G}_2 \xrightarrow{\cong} \mathrm{G}_1 \rtimes_{\varphi_{\cdot}} \mathrm{G}_3$ będzie izomorfizmem grup. Wówczas definiujemy odwzorowania:

$$\begin{aligned} \chi_1 &: \mathrm{G}_1 \longrightarrow \mathrm{G}_2 : g_1 \longmapsto \imath^{-1}(g_1, e_3)\,, \\ \chi_2 &: \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathrm{G}_3 : g_2 \longmapsto \mathrm{pr}_2 \circ \imath(g_2)\,, \end{aligned}$$

które w oczywisty sposób są homomorfizmami grup. Injektywność χ_1 wynika wprost z ciągu równoważności

$$\chi_1(g_1) = e_2 \iff (g_1, e_3) = \imath(e_2) = (e_1, e_3) \iff g_1 = e_1\,,$$

a równość

$$\chi_2\big(\imath^{-1}(e_1, g_3)\big) \equiv \mathrm{pr}_2 \circ \imath \circ \imath^{-1}(e_1, g_3) = \mathrm{pr}_2(e_1, g_3) = g_3\,,$$

słuszna dla dowolnego $g_3 \in \mathrm{G}_3$, przesądza o surjektywności χ_2. Pozostaje wskazać retrakcję ρ dla χ_1 oraz cięcie σ dla χ_2. Bez trudu przekonujemy się, że homomorfizmy

$$\rho : \mathrm{G}_2 \longrightarrow \mathrm{G}_1 : g_2 \longmapsto \mathrm{pr}_1 \circ \imath(g_2)$$

oraz

$$\sigma : \mathrm{G}_3 \longrightarrow \mathrm{G}_2 : g_3 \longmapsto \imath^{-1}(e_1, g_3)$$

mają pożądane własności. □