

METODY ALGEBRY I GEOMETRII WYŻSZEJ W FIZYCE II
W CZASACH ZARAŻY
2., 3. I 4. WYKŁAD ZDALNY
W ZWIĄZKU Z WIĄZKAMI

SPIS TREŚCI

1. Geometryzacje konstrukcji liniowych	17
1.1. Suma prosta wiązek wektorowych	17
1.2. Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych	18
1.3. Wiązka homomorfizmów i wiązka dualna	18
1.4. Kompleksyfikacja rzeczywistej wiązki wektorowej	19

W wykładzie pierwszym określiliśmy pierwszy cel naszych rozważań – jest nim konstrukcja gładkich rozkładów struktur modelujących przestrzenie wewnętrznych stopni swobody (przestrzenie wektorowe, algebry, grupy itd. z uzgodnioną strukturą topologiczną i różniczkowalną) nad rozmaitością czasoprzestrzenną. Pojęcia podstawowego dostarcza nam

Definicja 1. Wiązka włóknista klasy C^∞ to czwórka

$$(E, B, F, \pi_E)$$

złożona z rozmaitości gładkich:

- E , zwanej **przestrzenią totalną (wiązki)**;
- B , zwanej **bazą (wiązki)**;
- F , zwanej **włóknem typowym (wiązki)**;

oraz odwzorowania surjektywnego klasy C^∞

$$\pi_E : E \twoheadrightarrow B,$$

zwanego **rzutem na bazę (wiązki)**, dla których istnieje pokrycie otwarte $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B wraz ze stowarzyszoną z nim rodziną dyfeomorfizmów klasy C^∞

$$\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F,$$

zwanych **trywializacjami lokalnymi (wiązki)**, domykających diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i} & \mathcal{O}_i \times F \\ & \searrow \pi_E & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & \mathcal{O}_i \end{array} .$$

Pokrycie o powyższej własności określamy mianem **trywializującego**. Odwzorowania

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F) \equiv \text{Diff}^\infty(F, F)$$

określone, dla wszystkich par indeksów $(i, j) \in I \times I$, dla których $\mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset$, przez superpozycje dyfeomorfizmów

$$\tau_{ij} := \tau_i \circ \tau_j^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times F} : \mathcal{O}_{ij} \times F \hookrightarrow \mathcal{O}_{ij} \times F : (x, f) \mapsto (x, g_{ij}(x)(f)),$$

gdzie odwzorowanie $\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F : (x, f) \mapsto g_{ij}(x)(f)$ jest z założenia klasy C^∞ , są nazywane **odwzorowaniami przejścia (wiązki)**, a grupa automorfizmów $\text{Aut}(F)$ włókna typowego (lub

dowolna jej podgrupa, do której należą wszystkie odwzorowania przejścia) zyskuje miano **grupy strukturalnej (wiązki)**, Wiązkę będziemy nieraz reprezentować przy użyciu diagramu

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \pi_E \\ & & B \end{array} .$$

Przeciwbraz punktu $x \in B$ względem rzutu kanonicznego,

$$\pi_E^{-1}(\{x\}) \equiv E_x$$

nazywamy **włóknem wiązki E nad x** .

Morfizm wiązek włóknistych między dwiema wiązkami włóknistymi $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to para (Φ, f) odwzorowań klasy C^∞ , które czynią przemiennym poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \pi_{E_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array} .$$

Izomorfizm wiązek włóknistych pokrywający identyczność na bazie, czyli spełniający warunek $f = \text{id}_B$, nosi miano **równoważności wiązek włóknistych**.

Przykłady 1. (1) **Wiązka trywialna** to czwórka

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & B \times F \\ & & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & B \end{array} ,$$

a więc np. 2-torus $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, walec $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

(2) **Wstęga Möbiusa** jako wiązka nietrywialna nad \mathbb{S}^1 .

(3) Niechaj (E, B_2, F, π_E) będzie wiązką włóknistą o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$ stowarzyszonych z pokryciem trywializującym $\mathcal{O}_{B_2} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B_2 , a $f : B_1 \longrightarrow B_2$ – odwzorowaniem klasy C^∞ . Wówczas czwórka

$$(f^*E \equiv B_1 \times_{B_2} E, B_1, F, \text{pr}_1),$$

jest wiązką, zwaną **wiązką cofniętą (wzdłuż f)**, o

- przestrzeni totalnej w postaci produktu włóknistego [struktura do samodzielnego opracowania na podstawie dostarczonych materiałów]

$$\begin{array}{ccc} B_1 \times_{B_2} E & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array} ,$$

który wyposażamy w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na $B_1 \times E \supset B_1 \times_{B_2} E$;

- rzucie na bazę $\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E} : B_1 \times_{B_2} E \longrightarrow B_1$ danym jako (odpowiednio ograniczony, a jawnie surjektywny) rzut kanoniczny na pierwszą składową;
- włóknie typowym tożsamym z włóknem typowym E i włóknem nad punktem bazy $x \in B_1$ danym w postaci $\{x\} \times \pi_E^{-1}(\{f(x)\}) \equiv E_{f(x)}$;

- trywializacjach lokalnych

$$\tau_i^{f*} := (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \downarrow_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))} : \text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) \xrightarrow{\cong} f^{-1}(\mathcal{O}_i) \times F$$

stowarzyszonych z pokryciem trywializującym $f^* \mathcal{O}_{B_2} \equiv \{f^{-1}(\mathcal{O}_i)\}_{i \in I}$ (jego otwartość jest oczywistą konsekwencją ciągłości f).

Trywializacje są w oczywisty sposób dobrze określone, oto bowiem mamy tożsamość

$$\text{pr}_1 \downarrow_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) = \text{pr}_2 \downarrow_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)) \equiv \text{pr}_2 \downarrow_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(\tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i \times F)),$$

wynikającą z przemienności powyższego diagramu. Ponadto gładkość odwzorowań strukturalnych: π_{f^*E} i τ_i^{f*} jest konsekwencją submersywności π_E . Oznaczywszy rzeczone włożenie (klasy C^∞) jako $\iota_{f^*} : B_1 \times_{B_2} E \hookrightarrow B_1 \times E$, możemy zapisać oba odwzorowania jako superpozycje odwzorowań gładkich:

$$\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \circ \iota_{f^*}, \quad \tau_i^{f*} \equiv (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \circ \iota_{f^*} \downarrow_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))}.$$

Bez trudu wyznaczamy odwzorowania przejścia wiązki cofniętej,

$$g_{ij}^{f*} \equiv g_{ij} \circ f \downarrow_{f^{-1}(\mathcal{O}_{ij})} : f^{-1}(\mathcal{O}_{ij}) \longrightarrow \text{Aut}(F).$$

- (4) Niechaj (E_A, B, F_A, π_{E_A}) , $A \in \{1, 2\}$ będą wiązkami włóknistymi o trywializacjach lokalnych $\tau_{A_i} : \pi_{E_A}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F_A$ i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g_{A_{ij}} : \mathcal{O}_{ij} \times F_A \hookrightarrow \mathcal{O}_i \times F_A$: $(x, f_A) \mapsto (x, g_{A_{ij}}(x)(f_A))$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B . Wówczas czwórka

$$(\pi_{E_1}^* E_2 \equiv \pi_{E_2}^* E_1 \equiv E_1 \times_B E_2, B, F_1 \times F_2, \pi_{E_1} \circ \text{pr}_1 \equiv \pi_{E_2} \circ \text{pr}_2)$$

jest wiązką nad wspólną bazą obu wiązek¹, określaną mianem **produktu włóknistego wiązek włóknistych**, o

- przestrzeni totalnej w postaci produktu włóknistego

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times_B E_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E_2 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ E_1 & \xrightarrow{\pi_{E_1}} & B \end{array},$$

będącego podrozmaitością włożoną w $E_1 \times E_2$ [struktura do samodzielnej opracowania na podstawie dostarczonych materiałów];

- rzucie na bazę $\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1 \equiv \pi_{E_2} \circ \text{pr}_2 : E_1 \times_B E_2 \longrightarrow B$ danym jako rzut kanoniczny obliczony na dowolnej składowej kartezjańskiej;
- włóknie typowym tożsamym z produktem kartezjańskim włókien typowych obu składowych, $E_1 \times E_2$, i włóknie nad punktem bazy $x \in B$ danym w postaci $E_{1,x} \times E_{2,x}$;
- trywializacjach lokalnych

$$\tau_i^{12} : (\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1)^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F_1 \times F_2 : (e_1, e_2) \mapsto (\tau_i^1(e_1), \text{pr}_2 \circ \tau_i^2(e_2)).$$

Trywializacje lokalne są w oczywisty sposób gładkie (klasy C^∞), podobnie jak ich odwrotności

$$\begin{aligned} \tau_i^{12-1} : \mathcal{O}_i \times F_1 \times F_2 &\xrightarrow{\cong} (\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1)^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ &: (x, f_1, f_2) \mapsto (\tau_i^{1-1}(x, f_1), \tau_i^{2-1}(x, f_2)). \end{aligned}$$

Znajomość tych ostatnich pozwala nam ustalić odwzorowania przejścia:

$$\tau_i^{12} \circ \tau_j^{12-1} : \mathcal{O}_{ij} \times F_1 \times F_2 \hookrightarrow \mathcal{O}_i \times F_1 \times F_2 : (x, f_1, f_2) \mapsto (x, g_{ij}^1(x)(f_1), g_{ij}^2(x)(f_2)).$$

¹To czyni z niej obiekt zasadniczo różny od rozważanej poprzednio wiązki cofniętej.

Jak przekonuje chwila zastanowienia nad strukturą lokalną wiązki w obrazie trywializacji lokalnej, rzut na bazę jest surjektywną submersją. Prostą, acz nader istotną fizykalnie konsekwencję tego faktu wysławia

Twierdzenie 1. Niechaj M_A , $A \in \{1, 2\}$ będą rozmaitościami gładkimi i niech $f : M_1 \rightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem submersywnym w punkcie $x \in M_1$. Istnieje wówczas otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$ punktu $f(x)$, na którym jest określone odwzorowanie $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$ klasy C^∞ o własnościach

$$f \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} \quad \wedge \quad \sigma \circ f(x) = x,$$

zwane **cięciem lokalnym** odwzorowania f .

Dowód: Teza ma charakter lokalny, możemy zatem ograniczyć rozważania do pewnego otoczenia $\mathcal{O}_x \ni x$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_1 : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_1})$, $n_1 \equiv \dim M_1$, w której $\kappa_1(x) = 0$, a także – do pewnego otoczenia $\tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \ni f(x)$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_2 : \tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_2})$, $n_2 \equiv \dim M_2$, w której $\kappa_2 \circ \pi(x) = 0$. Submersywność f w x oznacza, że odwzorowanie styczne

$$\mathbb{T}_{\kappa(x)=0}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}) : \mathbb{T}_{\kappa_1(x)=0} \mathbb{R}^{n_1} \equiv \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{T}_{\kappa_2 \circ f(x)=0} \mathbb{R}^{n_2} \equiv \mathbb{R}^{n_2}$$

jest epimorfizmem przestrzeni \mathbb{R} -liniowych. Niechaj zatem $V_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ będzie (dowolną) podprzestrzenią izomorficznie odwzorowywaną w \mathbb{R}^{n_2} przez (ograniczenie) $\mathbb{T}_{\kappa(x)}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})$, a wtedy odwzorowanie styczne do odwzorowania klasy C^∞

$$F := \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}|_{\mathcal{U}_1 \cap V_1} : \mathcal{U}_1 \cap V_1 \rightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2},$$

o jawnie niepustej dziedzinie (wszak V_1 jest podprzestrzenią w \mathbb{R}^{n_1} , a \mathcal{U}_1 jest otoczeniem wektora 0), jest odwracalne. Istotnie, wobec tożsamości $\mathbb{T}_0 V_1 \equiv V_1$, dziedzina $\mathbb{T}_0 F$ przyjmuje postać $\mathbb{T}_0 \mathcal{U}_1 \cap \mathbb{T}_0 V_1 \equiv \mathbb{R}^{n_1} \cap V_1 = V_1$, co oznacza, że $\mathbb{T}_0 F$ jest izomorfizmem

$$\mathbb{T}_0 F \equiv \mathbb{T}_0(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})|_{V_1}.$$

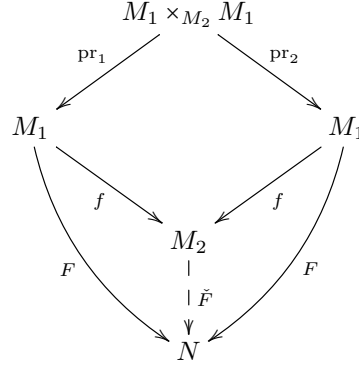
W odwołaniu do Twierdzenia o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań wnioskujemy zatem, że $F \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}|_{\mathcal{U}_1 \cap V_1}$ ma pożądaną lokalną odwrotność $\kappa_1 \circ \sigma \circ \kappa_2^{-1}|_{F(\mathcal{U}_0)}$ klasy C^∞ na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \cap V_1$ wektora $0 \equiv \kappa_1(x)$. Homeomorficzny przeciwobraz $\kappa_1^{-1}(\mathcal{U}_0)$ tego ostatniego jest postulowanym otoczeniem punktu x , na którym jest określone lokalne cięcie σ klasy C^∞ . \square

Dodamy w tym miejscu rzut oka na własność submersji, która ukazuje ją jako byt pokrewny dyskutowanym w pierwszym semestrze algebraicznym strukturom uniwersalnym.

Stwierdzenie 1 (Kwazi-universalna² własność submersji). Niechaj $f : M_1 \rightarrow M_2$ będzie surjektywną submersją klasy C^∞ . Ponadto niech N będzie C^∞ -rozmaitością, a $\tilde{F} : M_2 \rightarrow N$ dowolnym odwzorowaniem. Odwzorowanie \tilde{F} jest klasy C^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie złożone $\tilde{F} \circ f : M_1 \rightarrow N$ ma tę własność. W szczególności każdemu C^∞ -odwzorowaniu $F : M_1 \rightarrow N$ stałemu na poziomicach f odpowiada dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{F} \in C^\infty(M_2, N)$

²Powodem, dla którego wzbraniamy się przed nadaniem tej własności submersji miana „uniwersalnej”, jest to, że klasa obiektów, pośród których para (M_2, f) odgrywa rolę „inicjalną”, jest zdefiniowana w terminach odwzorowania f (chodzi o stałość na poziomicach tego odwzorowania).

o własności wyrażonej – wraz z rzeczoną własnością f – przez diagram przemienny



Dowód: Ilekcóć \check{F} jest klasy C^∞ , takżę $\check{F} \circ f$ ma tę własność jako superpozycja odwzorowań klasy C^∞ .

I odwrotnie, niechaj $\check{F} \circ f \in C^\infty(M_1, N)$. Wobec surjektywności f dowolny punkt w M_2 możemy przedstawić w postaci $f(x)$ dla pewnego $x \in M_1$. Wybierzmy zatem (dowolnie) punkt $f(x) \in M_2$ oraz jego otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$, na którym jest określone cięćie lokalne $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$ odwzorowania f spełniające warunki z tezy Stw.1. Przyjąwszy zapis dowodu rzeczzonego stwierdzenia, otrzymujemy tożsamość

$$\check{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}} \equiv \check{F} \circ \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} = (\check{F} \circ f) \circ \sigma,$$

która dowodzi C^∞ -gładkości $\check{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}}$ na gruncie założenia o C^∞ -gładkości $\check{F} \circ f$ oraz wynikającej ze Stw.1 C^∞ -gładkości cięćia lokalnego σ . Dowolność wyboru $f(x)$ pozwala wnioskować o globalnej C^∞ -gładkości \check{F} .

Wreszcie na koniec zajmijmy się udowodnieniem istnienia i jednoznaczności odwzorowania $\check{F} \in C^\infty(M_2, N)$, spełniającego tożsamość

$$F = \check{F} \circ f.$$

Po pierwsze zauważmy, że każde dwa takie odwzorowania pokrywają się na zbiorze $f(M_1)$, który z racji surjektywności f jest tożsamy z M_2 , przeto odwzorowanie g może być co najwyżej jedno. Postulujemy

$$\check{F} : M_2 \rightarrow N : f(x) \mapsto F(x),$$

wykorzystując raz jeszcze surjektywność f . Założona przez nas stałość F na włóknach f przesądza o sensowności powyższego postulatu ($F(x)$ nie zależy od wyboru reprezentanta włókna $f^{-1}(\{f(x)\})$), a do tego wprost z definicji zachodzi pożądana tożsamość

$$\check{F} \circ f(x) = F(x).$$

□

Powyższa analiza elementarnych własności surjektywnych submersji odniesiona do rzutu na bazę wiązki prowadzi do wyróżnienia zbiorów odwzorowań z

Uwaga 1. Zbiór cięć lokalnych wiązki (E, B, F, π_E) będziemy oznaczać symbolem

$$\Gamma_{\text{loc}}(E),$$

a zbiór jej cięć globalnych – symbolem

$$\Gamma(E).$$

Z Def.1 wyłania się obiekt geometryczny dostarczający rygorystycznego modelu gładkiego rozkładu przestrzeni wewnętrznych stopni swobody F nad bazą czasoprzestrzenną B (ewentualna obecność dodatkowej struktury różniczkowej na B , tudzież na TB , jak np. tensora metrycznego, nie odgrywa na tym etapie żadnego znaczenia). Zarazem istnienie trywializacji lokalnych wskazuje

wyraźnie na możliwość zakodowania informacji o strukturze wiązki w *lokalnie* gładkich odwzorowaniach przejścia g_{ij} . O tym, jak bogata i jak wiernie przez nie kodowana jest to informacja, mówi

Twierdzenie 2 (O rekonstrukcji (izotypu) wiązki włóknistej). Przyjmijmy zapis Def. 1. Odwzorowania przejścia wiązki włóknistej (E, B, F, π_E) o pokryciu trywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B spełniają **warunek 1-kocyklu**

$$(1) \quad \forall_{i,j,k \in I, x \in \mathcal{O}_{ijk}} : g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x) = \text{id}_F.$$

I odwrotnie, niechaj $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ będzie pokryciem otwartym rozmaitości gładkiej B i niech F będzie dowolną rozmaitością gładką o grupie automorfizmów $\text{Aut}(F)$. Dowolna stowarzyszona z \mathcal{O}_B rodzina odwzorowań

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F), \quad i, j \in I$$

indukujących odwzorowania klasy C^∞

$$\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F : (x, f) \longmapsto g_{ij}(x)(f)$$

i spełniających powyższy warunek określa wiązkę włóknistą o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z \mathcal{O}_{ij} tożsamy z g_{ij} . Ilekroć odwzorowania te są odwzorowaniami przejścia pewnej wiązki włóknistej nad B o włóknie typowym F , ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez odwzorowania przejścia g_{ij} .

Dowód: Pierwsza część tezy jest bezpośrednią konsekwencją następującej równości, słusznej dla dowolnej trójki $(i, j, k) \in \{I\}^3$ oraz $(x, f) \in \mathcal{O}_{ijk} \times F$:

$$\begin{aligned} (x, f) &\equiv (\text{id}_{\mathcal{O}_{ijk}} \times \text{id}_F)(x, f) = ((\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ (\tau_k \circ \tau_j^{-1})^{-1} \circ (\tau_k \circ \tau_i^{-1}))(x, f) \\ &= (x, g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x)(f)). \end{aligned}$$

Punktem wyjścia do dowodu drugiej jego części jest konstrukcja sumy rozłącznej $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$, na której określamy relację

$$(x, f, i) \sim_{g_\cdot} (y, g, j) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ g = g_{ji}(x)(f) \end{cases},$$

Warunek 1-kocyklu spełniony przez odwzorowania przejścia sprawia, że jest to relacja równoważności, oto bowiem dla $i = j = k$ dostajemy

$$g_{ii}(x) \equiv g_{ii}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ii}(x) = \text{id}_F,$$

zatem \sim_{g_\cdot} jest zwrotna, a dalej tenże warunek w połączeniu z poprzednią konkluzją implikuje skośną symetrię g_{ij} ,

$$g_{ji}(x) \circ g_{ij}(x) = g_{ji}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ij}(x) = \text{id}_F,$$

która pociąga za sobą jej symetrię, i wreszcie stosownie przepisany warunek 1-kocyklu,

$$g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x)^{-1} = g_{ik}(x),$$

oznacza, że jest ona przechodnia. Możemy zatem przejść od $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$ do zbioru klas abstrakcji

$$\mathcal{R}_{g_\cdot} := \left(\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \right) / \sim_{g_\cdot},$$

na którym określamy surjekcję

$$\pi_{\mathcal{R}_{g_\cdot}} : \mathcal{R}_{g_\cdot} \rightarrow B : [(x, f, i)]_{\sim_{g_\cdot}} \longmapsto x.$$

Zauważmy, że dowolna klasa $[(x, f, i)]_{\sim_{g_\cdot}}$ zawiera dokładnie jednego reprezentanta o ustalonym indeksie, $(x, f, i) \in \mathcal{O}_i \times F \times \{i\}$, gdyż – wprost z definicji –

$$(y, g, i) \in [(x, f, i)]_{\sim_{g_\cdot}} \implies (y, g) = (x, g_{ii}(x)(f)) = (x, \text{id}_F(f)) = (x, f),$$

a ponieważ także

$$\forall_{(x,f) \in \mathcal{O}_i \times F} : (x, f, i) \in [(x, f, i)]_{\sim_{g_\cdot}},$$

przeto otrzymujemy bijekcję

$$[\tau_i] : \pi_{\mathcal{R}_{g,\cdot}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F : [(x, f, i)]_{\sim_{g,\cdot}} \mapsto (x, f).$$

Następnie wprowadzamy na $\mathcal{R}_{g,\cdot}$ topologię ilorazową nazywając otwartym dowolny podzbiór $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}_{g,\cdot}$, którego przeciwobraz względem rzutu

$$(2) \quad \pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \longrightarrow \mathcal{R}_{g,\cdot}$$

jest otwarty w $\widetilde{\mathcal{R}}_{g,\cdot}$ w topologii sumy rozłącznej³ przestrzeni $\mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$, z których każda jest nośnikiem topologii produktowej. W rzeczonyj topologii ilorazowej bijekcje $[\tau_i]$ są homeomorfizmami, a rzut $\pi_{\mathcal{R}_{g,\cdot}}$ jest ciągły. Otrzymana tu topologia jest hausdorffowska. Istotnie, ilekroć $[(x_1, f_1, i_1)]_{\sim_{g,\cdot}} \neq [(x_2, f_2, i_2)]_{\sim_{g,\cdot}}$, mamy dwie możliwości: albo $x_2 \neq x_1$, a wtedy rozdzielamy punkty x_1 i x_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_{i_1}$ i $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_{i_2}$ w hausdorffowskiej (z założenia) bazie, po czym tworzymy jawnie rozłączne otoczenia otwarte $\pi_{\sim}(\mathcal{O}_\alpha \times F \times \{i_\alpha\})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ obu klas w $\mathcal{R}_{g,\cdot}$, albo też $x_2 = x_1$ przy $i_2 = i_1$, a wtedy rozdzielamy punkty f_1 i f_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – \mathcal{U}_1 i \mathcal{U}_2 w hausdorffowskim (także z założenia) włóknie F i na zakończenie tworzymy rozłączne otoczenia otwarte $\pi_{\sim}(\mathcal{O}_{i_1} \times \mathcal{U}_\alpha \times \{i_1\})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ obu klas w $\mathcal{R}_{g,\cdot}$.

Możemy już teraz skonstruować atlas na tak określonej przestrzeni topologicznej. W tym celu ustalamy atlas na zbiorze \mathcal{O}_i poprzez ograniczenie dowolnego atlasu na bazie B , otrzymując tym sposobem mapy lokalne $\xi_{i,A} : \mathcal{O}_{i,A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i,A}$, $A \in J_i$ na podzbiorach $\mathcal{O}_{i,A} \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i)$ (w topologii podprzestrzeni) modelowanych na $\mathcal{U}_{i,A} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_n})$, $n = \dim B$, a do tego – atlas na włóknie złożony z map lokalnych $\zeta_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{W}_\alpha$, $\alpha \in K$ na podzbiorach $\mathcal{V}_\alpha \in \mathcal{T}(F)$ modelowanych na $\mathcal{W}_\alpha \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_m})$, $m = \dim F$. To uczyniwszy, definiujemy atlas na $\mathcal{R}_{g,\cdot}$ jako zbiór map lokalnych

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha} & : \quad \mathcal{Q}_{i,A,\alpha} \equiv \pi_{\sim}(\mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_\alpha) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i,A} \times \mathcal{W}_\alpha \subset \mathbb{R}^{x_{n+m}} \\ & : \quad [(x, f, i)]_{\sim_{g,\cdot}} \mapsto (\xi_{i,A}(x), \zeta_\alpha(f)), \end{aligned}$$

które są dobrze określone, jako że – w świetle wcześniejszych naszych ustaleń – istnieje jedyny reprezentant $(x, f) \in \mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{O}_i \times F$ klasy $[(x, f, i)]_{\sim_{g,\cdot}}$ o ustalonym indeksie pokrycia $i \in I$. Na przecięciu ich dziedzin znajdujemy transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha} \circ \kappa_{j,B,\beta}^{-1} & : \quad \kappa_{j,B,\beta}(\mathcal{O}_{i,A,j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\cong} \kappa_{i,A,\alpha}(\mathcal{O}_{i,A,j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}) \\ & : \quad (\xi_{j,B}(x), \zeta_\beta(f)) \mapsto (\xi_{i,A}(x), \zeta_\alpha \circ g_{ij}(x)(f)) \\ & \equiv (\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}(\xi_{j,B}(x)), \zeta_\alpha \circ (g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1})(\xi_{j,B}(x)) \circ \zeta_\beta^{-1}(\zeta_\beta(f))). \end{aligned}$$

Zważywszy, że odwzorowania $\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}$ są transformacjami współrzędniowymi (rozdrobionego) atlasu na B , C^∞ -gładkimi z założenia, a ponadto $g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami odwzorowań przejścia, także C^∞ -gładkimi (w działaniu na F , w rozumieniu opisu odwzorowań g_{ij} podanego w treści dowodzonego twierdzenia) z założenia, i wreszcie $\zeta_\alpha \circ g_{ij}(x) \circ \zeta_\beta^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami automorfizmów $g_{ij}(x)$ włókna F , również C^∞ -gładkimi z założenia, stwierdzamy, że transformacje $\kappa_{i,A,\alpha} \circ \kappa_{j,B,\beta}$ są C^∞ -gładkie, zatem mapy lokalne $\kappa_{i,A,\alpha}$ określają na $\mathcal{R}_{g,\cdot}$ strukturę różniczkowalnej klasy C^∞ . Względem tejże struktury odwzorowania $[\tau_i]$ są (tautologicznie) dyfeomorfizmami klasy C^∞ (także rzut na bazę, $\pi_{\mathcal{R}_{g,\cdot}} \upharpoonright_{\mathcal{Q}_{i,A,\alpha}} \equiv \text{pr}_1 \circ [\tau_i]$, jest klasy C^∞) i określają na $\mathcal{R}_{g,\cdot}$ strukturę wiązki włóknistej klasy C^∞ .

³Topologię sumy rozłącznej tworzą zbiory, których przeciwobrazy względem *wszystkich* iniekcji kanonicznych $\mathcal{O}_j \times F \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$ są otwarte.

Na zakończenie wykażemy równoważność struktur wiązki włóknistej: wyjściowej na danej wiązce włóknistej (E, B, F, π_E) , o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$, i tej zrekonstruowanej w sposób opisany wyżej z jej odwzorowań przejścia g_{ij} . W tym celu rozważymy odwzorowania dane lokalnie w postaci

$$(3) \quad \iota_i := [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F \xrightarrow{\cong} \pi_{\mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}}}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I$$

i zauważamy, że te lokalne dyfeomorfizmy w dowolnym punkcie $y \in \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$, zadawanym przez pewne $x \in \mathcal{O}_{ij}$ oraz $f \in F$ w postaci $y = \tau_i^{-1}(x, f)$, spełniają relację

$$\begin{aligned} \iota_j(y) &\equiv \iota_j(\tau_i^{-1}(x, f)) \equiv [\tau_j]^{-1} \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, f) = [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) \\ &= [\tau_i]^{-1} \circ [\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) = [\tau_i]^{-1}(x, g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x)(f)) \\ &= [\tau_i]^{-1}(x, f) \equiv [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x, f) \equiv \iota_i(y), \end{aligned}$$

czyli że stanowią ograniczenia określonego globalnie dyfeomorfizmu

$$\iota : E \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}},$$

dane wzorem

$$\iota \upharpoonright_{\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \iota_i,$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}} \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{R}_{g_{\cdot,\cdot}}} \\ B & \xlongequal{\text{id}_B} & B \end{array},$$

która pozwala nam zidentyfikować ι jako postulowany izomorfizm wiązek. \square

Geometrycznie absolutnie naturalnym i – także, choć nie wyłącznie z tego powodu – modelowym przykładem wiązki włóknistej jest wiązka styczna nad rozmaitością różniczkowalną (M, \mathcal{A}) klasy C^∞ . Wiązkę tę można definiować na kilka wzajem równoważnych sposobów, z których każdy eksponuje inną jej cechę strukturalną – jeden z nich wykorzystuje np. odwzorowania styczne do odwzorowań przejścia pomiędzy mapami lokalnymi do rekonstrukcji wiązki stycznej z jej lokalnych trywializacji współrzędniowych według schematu sformalizowanego w Tw. 2.

Definicja 2. **Wiązka styczna** C^{k+1} -rozmaitości (M, \mathcal{A}) wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$, o atlasie $\mathcal{A} = \{\kappa_i\}_{i \in I}$ stowarzyszonym z pokryciem otwartym $\mathcal{O}_M = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, to C^k -rozmaitość $(TM, \mathbb{T}\mathcal{A})$ utworzona, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$TM := \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \right) / \sim_{\text{Dt.}}$$

relacji

$$(x, i, v) \sim (y, j, w) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ w = \text{Dt}_{ji}(\kappa_i(x))(v) \end{cases},$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{TM} : TM \longrightarrow M : [(x, i, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \longmapsto x,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki stycznej)**, którego poziomicą

$$\mathbb{T}_x M := \pi_{TM}^{-1}(\{x\})$$

nosi miano **przestrzeni stycznej** w punkcie x ;

- topologia zbioru $\mathbb{T}M$ jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \longrightarrow \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \right) / \sim_{\text{Dt.}} : (x, i, v) \longmapsto [(x, i, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni $\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n}$, o injekcjach kanonicznych

$$J_i : \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times \mathbb{R}^{x_n} : (x, v) \longmapsto (x, i, v), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{T}(\mathbb{T}M) := \left\{ \mathcal{O} \subset \mathbb{T}M \mid \forall_{i \in I} : J_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n}) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej $\mathbb{T}M$ definiują (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$\mathbb{T}\kappa_i : \pi_{\mathbb{T}M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{x_n} : [(x, i, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \longmapsto (\kappa_i(x), v), \quad i \in I,$$

zwane **mapami naturalnymi**, które określają transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \mathbb{T}t_{ji} := \mathbb{T}\kappa_j \circ (\mathbb{T}\kappa_i)^{-1} \upharpoonright_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{x_n}} & : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{x_n} \xrightarrow{\cong} \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{x_n} \\ & : (\kappa_i(x), v) \longmapsto (\kappa_j(x), \text{Dt}_{ji}(\kappa_i(x))(v)), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy C^k .

Klasę abstrakcji

$$(4) \quad V(x) := [(x, i, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \in \mathbb{T}_x M$$

określamy mianem **wektora stycznego** do C^{k+1} -rozmaitości (M, \mathcal{A}) (zaczepionego) w punkcie $x \in M$.

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^k)

$$\mathbf{0}_{\mathbb{T}M} : M \longrightarrow \mathbb{T}M : x \longmapsto [(x, i, \mathbf{0}^n)]_{\sim_{\text{Dt.}}}$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki stycznej $\mathbb{T}M$.

Struktura liniowa, której oczekujemy od modelu „przestrzeni ruchów nieskończenie małych” albo „przestrzeni prędkości”, jest w tym ujęciu zakamuflowana pod postacią przemyślnego wyboru lokalnego modelu włókna $\mathbb{R}^{\dim M}$, o naturalnej interpretacji w terminach lokalnych współrzędnych.

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Wybierzmy dowolny punkt $x \in \mathcal{O}_i \subset M$ C^k -rozmaitości (M, \mathcal{A}) wymiaru $n \in \mathbb{N}^x$, a wówczas odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x \kappa_i & : \mathbb{T}_x M \xrightarrow{\mathbb{T}\kappa_i} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \xrightarrow{\text{Pr}_2} \mathbb{R}^{x_n} \\ & : [(x, i, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \longmapsto (\kappa_i(x), v) \longmapsto v, \end{aligned}$$

będące złożeniem lokalnej mapy naturalnej na $\mathbb{T}M$ z kanonicznym rzutem na drugą składową iloczynu kartezjańskiego, jest bijekcją i jako takie w kanoniczny sposób indukuje na $\mathbb{T}_x M$ strukturę przestrzeni \mathbb{R} -liniowej,

$$\mathbb{T}_x M \underset{\mathbb{R}\text{-lin.}}{\cong} \mathbb{R}^{x_n},$$

określaną mianem **przestrzeni stycznej do rozmaitości M** w punkcie x .

Dowód: Strukturę \mathbb{R} -liniową, o której mowa w tezie stwierdzenia, określa formuła

$$\lambda_1 \triangleright [(x, i, v_1)]_{\sim_{\text{Dt.}}} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, v_2)]_{\sim_{\text{Dt.}}} := [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{\text{Dt.}}},$$

zapisana dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wobec \mathbb{R} -liniowego charakteru relacji z Def. 2, struktura ta jest dobrze określona. Istotnie, niechaj $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i niech $w_\alpha := \text{Dt}_{ji}(\kappa_i(x))(v_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$, a wtedy

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \triangleright [(x, j, w_1)]_{\sim_{\text{Dt.}}} + \lambda_2 \triangleright [(x, j, w_2)]_{\sim_{\text{Dt.}}} = [(x, j, \lambda_1 \triangleright w_1 + \lambda_2 \triangleright w_2)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \\ & = [(x, j, \lambda_1 \triangleright \text{Dt}_{ji}(\kappa_i(x))(v_1) + \lambda_2 \triangleright \text{Dt}_{ji}(\kappa_i(x))(v_2))]_{\sim_{\text{Dt.}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(x, j, Dt_{ji}(\kappa_i(x))(\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2))]_{\sim} = [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{Dt.}} \\
 &\equiv \lambda_1 \triangleright [(x, j, w_1)]_{\sim_{Dt.}} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, v_2)]_{\sim_{Dt.}} .
 \end{aligned}$$

□

Ponizej przedyskutujemy odmienne spojrzenie na tę samą strukturę, stanowiące udaną próbę uwolnienia opisu wewnętrznej geometrii stycznościowej od lokalnej euklidesowej kartografii rozmaitości. Pierwszy krok w tym kierunku czynimy w

Stwierdzenie 3. Rozważmy relację równoważności na zbiorze **ścieżek** klasy C^1 w C^k -rozmaitości (M, \mathcal{A}) wymiaru $n \in \mathbb{N}^x$ przechodzących przez jej punkt x ,

$$\gamma :] - \varepsilon_\gamma, \varepsilon_\gamma[\longrightarrow M, \quad \varepsilon_\gamma > 0, \quad \gamma(0) = x,$$

określając przez warunek (współ)styczności w x ,

$$\tilde{\gamma} \sim_x \gamma \iff \begin{cases} \tilde{\gamma}(0) = x = \gamma(0) \\ D(\kappa \circ \tilde{\gamma})(0) = D(\kappa \circ \gamma)(0) \end{cases},$$

wypowiedziany w terminach dowolnej mapy $\kappa : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{x^n}$ określonej na otoczeniu otwartym $\mathcal{O} \ni x$. Oznaczywszy $v_\gamma := D(\kappa \circ \gamma)(0) \in \mathbb{R}^{x^n}$ dla skrótu, na zbiorze P_x klas abstrakcji ścieżek względem powyższej relacji określamy strukturę grupy przemiennej z działaniem

$$P_x \times P_x \longrightarrow P_x$$

$$\begin{aligned}
 : \quad &([\gamma_1]_{\sim_x}, [\gamma_2]_{\sim_x}) \longmapsto [] - \varepsilon, \varepsilon[\ni t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2})) \in \mathcal{O}]_{\sim_x} \\
 &=: [\gamma_1]_{\sim_x} + [\gamma_2]_{\sim_x}
 \end{aligned}$$

i elementem neutralnym danym w postaci klasy $[\gamma_x]_{\sim_x}$ ścieżki stałej

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow M : t \longmapsto x,$$

a następnie działanie ciała \mathbb{R}

$$\mathbb{R} \times P_x \longrightarrow P_x : (\lambda, [\gamma]_{\sim_x}) \longmapsto [] - \varepsilon, \varepsilon[\ni t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \cdot \lambda \triangleright v_\gamma) \in \mathcal{O}]_{\sim_x},$$

przy czym w obu przypadkach $\varepsilon > 0$ jest dobrane tak, ażeby ścieżka będąca wynikiem działania leżała w całości w \mathcal{O} . Tak zdefiniowana przestrzeń \mathbb{R} -liniowa jest izomorficzna z przestrzenią \mathbb{R} -liniową o nośniku $T_x M$ opisaną w Stw. 2.

Dowód: Zaczniemy od spostrzeżenia, że relacja współstyczności nie zależy od wyboru lokalnej mapy – istotnie, jeśli $\psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{x^n}$ jest lokalną mapą na otoczeniu otwartym $\mathcal{U} \ni x$, to dla ścieżek γ i $\tilde{\gamma}$ z treści stwierdzenia zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}
 D(\psi \circ \tilde{\gamma})(0) &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \tilde{\gamma}(0)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) \\
 &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) \\
 &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma(0)) \circ D(\varphi \circ \gamma)(0) = D(\psi \circ \gamma)(0).
 \end{aligned}$$

Bez trudu sprawdzamy też analogiczną własność definicji struktury \mathbb{R} -liniowej na zbiorze ścieżek, a to za sprawą tożsamości

$$\begin{aligned}
 &\psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) \upharpoonright_{t=0} = \psi^{-1} \circ \psi(x) = x \\
 &\equiv \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) \upharpoonright_{t=0}
 \end{aligned}$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) = \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2$$

$$= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)).$$

Możemy następnie przystąpić do konstrukcji pożądanego izomorfizmu przestrzeni \mathbb{R} -liniowych. Oto więc klasie współstyczności ścieżek przez $x \in \mathcal{O}_i$ przyporządkowujemy punkty we włóknie $\Gamma_x M$ wedle formuły (w oczywisty sposób dobrze określonej)

$$(5) \quad V_x : [\gamma]_{\sim_x} \mapsto [(\gamma(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{Dt..}},$$

i odwrotnie – punktowi $[(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}}$ w tymże włóknie przypisujemy klasę ścieżki (trajektorii) „ruchu jednostajnego prostoliniowego” wedle formuły

$$\Gamma_x : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \mapsto [-\varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \varphi_i^{-1}(\varphi_i(x) + t \triangleright v) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x}],$$

przy czym liczba $\varepsilon > 0$ w ostatnim wzorze jest dobrana tak, by warunek $\kappa_i(x) + t \triangleright v \in \kappa_i(\mathcal{O}_i)$ był spełniony dla dowolnego $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ (jej istnienie jest konsekwencją otwartości $\kappa_i(\mathcal{O}_i)$). Zauważmy, że oba przyporządkowania są dobrze określone, oto bowiem dla $x \in \mathcal{O}_{ij}$ dostajemy z jednej strony

$$\begin{aligned} [(\gamma(0), j, D(\kappa_j \circ \gamma)(0))]_{\sim} &= [(\gamma(0), j, Dt_{ji}(\kappa_i \circ \gamma(0)) \circ D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{Dt..}} \\ &\equiv [(\gamma(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{Dt..}}, \end{aligned}$$

a z drugiej, dla $w := Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v)$,

$$\Gamma_x([(x, j, w)]_{\sim_{Dt..}}) = [\gamma_j^w :] - \varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \kappa_j^{-1}(\kappa_j(x) + t \triangleright w) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

więc też

$$\gamma_j^w(0) = \kappa_j^{-1}(\kappa_j(x) + 0 \triangleright w) \equiv \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j(x) = x = \gamma_i^v(0)$$

oraz

$$\begin{aligned} D(\kappa_i \circ \gamma_j^w)(0) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (t_{ij}(\kappa_j(x) + t \triangleright w)) = Dt_{ij}(\kappa_j(x))(w) \\ &\equiv Dt_{ij}(\kappa_j(x)) \circ Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) = \text{Did}_{\kappa_i(\mathcal{O}_i)}(\kappa_i(x))(v) \\ &= \text{id}_{\Gamma_{\kappa_i(x)} \mathbb{R}^n}(v) = v = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\kappa_i(x) + t \triangleright v) = D(\kappa_i \circ \gamma_i^v)(0), \end{aligned}$$

co implikuje pożądaną równoważność

$$\gamma_j^w \sim \gamma_i^v.$$

Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowania te są wzajem odwrotne. Istotnie, jak pokazuje powyższy rachunek,

$$V_x \circ \Gamma_x([(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}}) = V_x([\gamma_i^v]_{\sim_x}) = [(\gamma_i^v(0), j, D(\kappa_j \circ \gamma_i^v)(0))]_{\sim_{Dt..}} = [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}},$$

a ponadto

$$\Gamma_x \circ V_x([\gamma]_{\sim_x}) = [\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)} :] - \varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \kappa_i^{-1}(\kappa_i \circ \gamma(0) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

przy czym

$$\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}(0) = \kappa_i^{-1} \circ \kappa_i \circ \gamma(0) = \gamma(0)$$

oraz

$$D(\kappa_i \circ \gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)})(0) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\kappa_i \circ \gamma(0) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) = D(\kappa_i \circ \gamma)(0)$$

więc też

$$[\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}]_{\sim_x} = [\gamma]_{\sim_x},$$

zgodnie z wysłownym wcześniej stwierdzeniem.

Na zakończenie dowodzimy liniowości obu przyporządkowań. W tym celu w definicji kombinacji liniowej klas ścieżek współstycznych w x wybierzmy lokalną mapę $\kappa \equiv \kappa_i$ i oznaczmy

$$\gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i}(t) := \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)),$$

a wtedy

$$\begin{aligned}
 & V_x(\lambda_1 \triangleright [\gamma_1]_{\sim_x} + \lambda_2 \triangleright [\gamma_2]_{\sim_x}) \equiv [(\gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i}(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i})(0))]_{\sim_x} \\
 & = [(\kappa_i^{-1} \circ \kappa_i(x), i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_x} = [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_x} \\
 & \equiv \lambda_1 \triangleright [(x, i, D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0))]_{\sim_x} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0))]_{\sim_x} \\
 & \equiv \lambda_1 \triangleright V_x([\gamma_1]_{\sim_x}) + \lambda_2 \triangleright V_x([\gamma_2]_{\sim_x}).
 \end{aligned}$$

Jako odwrotność \mathbb{R} -liniowej bijekcji odwzorowanie Γ_x jest automatycznie \mathbb{R} -liniowe. \square

Możemy już teraz przedstawić alternatywną w stosunku do tej z Tw. 2 metodę rekonstrukcji struktury globalnej wiązki włóknistej z danych lokalnych, która doprowadzi nas do opisu (równoważnego temu wspomnianemu uprzednio) przestrzeni totalnej wiązki (włóknistej) stycznej TM .

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Wiązka (włóknista) styczna nad rozmaitością** klasy C^{k+1} (M, \mathcal{A}) wymiaru $n \in \mathbb{N}^{\times}$ o atlasie \mathcal{A} złożonym z map lokalnych $\kappa_i : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i$, $i \in I$ to wiązka włóknista o składowych:

- baza M , o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^{k+1} zadawanej przez atlas \mathcal{A} ;
- przestrzeń totalna

$$TM := \bigsqcup_{x \in M} P_x$$

- o strukturze rozmaitości opisanej poniżej;
- włókno typowe $\mathbb{R}^{\times n}$ o naturalnej strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^{∞} (więc też w szczególności klasy C^k);
- rzut na bazę

$$\pi_{TM} : TM \longrightarrow M : ([\gamma]_{\sim_x}, x) \longmapsto x.$$

Przy tym odwzorowania

$$T\kappa_i : T\mathcal{O}_i := \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} : ([\gamma]_{\sim_x}, x) \longmapsto (\kappa_i(x), D(\kappa_i \circ \gamma)(0))$$

indukują na TM mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \subset \mathbb{R}^{\times 2n}$, tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{V} \subset TM$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall i \in I : T\kappa_i(\mathcal{V} \cap T\mathcal{O}_i) \in \mathcal{S}(\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n}).$$

W tej topologii odwzorowania $T\kappa_i$ są jawnie homeomorficzne, stanowią przeto mapy lokalne, zwane **mapami naturalnymi**, dla których transformacje współrzędniowe to

$$\begin{aligned}
 Tt_{ij} := T\kappa_i \circ (T\kappa_j)^{-1} & : \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \\
 & : (\kappa_j(x), D(\kappa_j \circ \gamma)(0)) \longmapsto (\kappa_i(x), D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \\
 & \equiv (t_{ij}(\kappa_j(x)), D(t_{ij} \circ \kappa_j \circ \gamma)(0)) \\
 & = (t_{ij}(\kappa_j(x)), Dt_{ij}(\kappa_j(x))(D(\kappa_j \circ \gamma)(0))).
 \end{aligned}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest klasy C^{k+1} w składowej bazowej (z założenia),

$$t_{ij} \in \text{Diff}^{k+1}(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \kappa_i(\mathcal{O}_{ij})),$$

i klasy C^k w składowej z włókna w argumencie bazowym,

$$Dt_{ij} \in C^k(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \mathbb{R}^{\times n^2}),$$

a nadto liniowa, więc klasy C^k w argumencie z włókna $D(\kappa_j \circ \gamma)(0)$, czyli ostatecznie klasy C^k , i jako taka zadaje na TM strukturę rozmaitości różniczkowalnej klasy C^k . Zarazem odwzorowania

$\mathbb{T}\kappa_i$ pełnią też rolę lokalnych trywializacji, tautologicznie C^k -gładkich względem zdefiniowanej tu (przy ich użyciu) struktury różniczkowej. Wreszcie też rzut na bazę jest surjekcją klasy C^k jako superpozycja odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{\mathbb{T}M} \upharpoonright_{\mathbb{T}\mathcal{O}_i} = \kappa_i^{-1} \circ \text{pr}_1 \circ \mathbb{T}\kappa_i.$$

Uwaga 2. Odwzorowania (5) określają równoważność (izomorfizm) między oboma opisami wiązki stycznej zgodną z naturalną strukturą liniową na włóknach $\mathbb{T}M$, opisaną w Stw. 3. Odwzorowanie

$$\iota_{x,i} : (\mathbb{T}M)_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{\times n} : ([\gamma]_{\sim_x}, x) \mapsto D(\kappa^i \circ \gamma)(0).$$

jest izomorfizmem (niekanonicznym) włókna $(\mathbb{T}M)_x \equiv P_x$ nad punktem $x \in \mathcal{O}_i \subset B$ z włóknem typowym $\mathbb{R}^{\times n}$. Bez trudu wskazujemy nad każdym punktem B bazę w wiązce przestrzeni \mathbb{R} -liniowych $\mathbb{T}M$, a mianowicie – dla $x \in \mathcal{O}_i$ i pewnego $\varepsilon_k > 0$ –

$$\mathbb{T}_x M = \bigoplus_{k=1}^n \langle [\gamma_k]_{\sim_x} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \gamma_k :]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[\rightarrow M : t \mapsto \tau_i^{-1}(\tau_i(x) + t \triangleright e_k),$$

gdzie $\{e_k\}_{k \in \overline{1,n}}$ jest bazą standardową $\mathbb{R}^{\times n}$.

Zaobserwowaną w powyższym przykładzie strukturę wiązki przestrzeni liniowych formalizujemy w

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ze standardową topologią (euklidesową) i strukturą różniczkową klasy C^∞ . **Wiązka wektorowa rzędu n nad ciałem \mathbb{K}** klasy C^∞ to wiązka włóknista $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ o własnościach

- $\forall x \in B : \mathbb{V}_x \equiv \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\{x\}) \in \text{Ob } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$;
- ograniczenia dyfeomorfizmów klasy C^∞ (lokalnych trywializacji)

$$\text{pr}_2 \circ \tau_i \upharpoonright_{\mathbb{V}_x} : \mathbb{V}_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times n}, \quad x \in B$$

są izomorfizmami przestrzeni \mathbb{K} -liniowych,

przy czym odwzorowania definiujące strukturę \mathbb{K} -liniową na włóknach \mathbb{V} są klasy C^∞ , w szczególności więc mamy dyfeomorfizm

$$(6) \quad \mathbb{A} : \mathbb{V} \times_B \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$$

modelowany na definiującej operacji binarnej $A^n : \mathbb{K}^{\times n} \times \mathbb{K}^{\times n} \rightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ w rozumieniu diagramu przemiennego

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{A}} & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \times \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) \times_{\mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) & \xrightarrow{(\text{pr}_1, A^n \circ \text{pr}_{2,4})} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{array}$$

oraz rodzinę dyfeomorfizmów

$$(8) \quad \mathbb{K}^\times \rightarrow \text{Diff}^k(\mathbb{V}) : \lambda \mapsto \mathbb{L}_\lambda$$

o \mathbb{K} -liniowych ograniczeniach do włókien, uzupełnianą przez odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe $\mathbb{L}_{0_{\mathbb{K}}}$, modelowanych na definiującym działaniu $\ell^n : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\times n} \rightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ w rozumieniu diagramu przemiennego

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{L}_\lambda} & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} & \xrightarrow{\ell_\lambda^n} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{array}.$$

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mówimy o **rzeczywistej wiązce wektorowej**, gdy zaś $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – o **zespolonej wiązce wektorowej**.

Rząd wiązki będziemy oznaczać symbolem $\text{rk } \mathbb{V}$. Ilekroć $\text{rk } \mathbb{V} = 1$, wiązkę określamy mianem **wiązki liniowej** i zwyczajowo oznaczamy symbolem L ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & L \\ & & \downarrow \pi_L \\ & & B \end{array} .$$

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^∞)

$$\mathbf{0}_{\mathbb{V}} : B \longrightarrow \mathbb{V} : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, \mathbf{0}^n), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki wektorowej \mathbb{V} . Jest ono cięciem globalnym \mathbb{V} w rozumieniu Uwagi 1, przy czym zarówno zbiór cięć lokalnych $\Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$, jak i zbiór cięć globalnych $\Gamma(\mathbb{V})$ nosią naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(B, \mathbb{K})$.

Podwiązka wektorowa rzędu $m \leq n$ wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{n \times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ to podwiązka $(\mathbb{W}, B, \mathbb{K}^{m \times m}, \pi_{\mathbb{W}} \upharpoonright_{\mathbb{W}})$ tejże wiązki (włóknistej) o tej własności, że nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jej włókno $\mathbb{W}_x \subset \mathbb{V}_x$ jest podprzestrzenią \mathbb{K} -liniową.

Morfizm wiązek wektorowych (nad ciałem \mathbb{K}) $(\mathbb{V}_\alpha, B_\alpha, \mathbb{K}^{n_\alpha \times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $n_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to dwójka (Φ, f) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{n_1 \times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{n_2 \times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2}),$$

którego ograniczenie do włókna nad dowolnym punktem bazy $x \in B_1$,

$$(10) \quad \Phi \upharpoonright_{\mathbb{V}_{1x}} : \mathbb{V}_{1x} \longrightarrow \mathbb{V}_{2f(x)},$$

jest odwzorowaniem \mathbb{K} -liniowym. **Rząd morfizmu wiązek wektorowych** (Φ, f) to odwzorowanie

$$\text{rk}(\Phi, f) : B_1 \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto \text{rk}(\Phi \upharpoonright_{\mathbb{V}_{1x}}).$$

Wiązki wektorowe skończonego rzędu nad ciałem \mathbb{K} o bazie B wraz z morfizmami wiązek wektorowych między nimi tworzą **kategorię wiązek wektorowych skończonego rzędu nad ciałem \mathbb{K} nad B** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{VectBun}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}(B).$$

Poniższe stwierdzenie ustanawia intymną relację pomiędzy cięciami i trywializacjami wiązki liniowej.

Stwierdzenie 4. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między nigdzie nieznikającymi cięciami lokalnymi wiązki liniowej i jej trywializacjami lokalnymi. W szczególności wiązka liniowa jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma nigdzie nieznikające cięcie globalne.

Dowód: Każde nigdzie nieznikające cięcie $\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow L \setminus \{\mathbf{0}_L(B)\}$ wiązki liniowej L nad zbiorem $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$ jest gładko indeksowaną przez bazę \mathcal{O} wiązki rodziną baz $\sigma(x)$, $x \in \mathcal{O}$ poszczególnych jednowymiarowych włókien L_x , zatem dowolnemu wektorowi $v \in \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$ z włókna $L_{\pi_L(v)}$ możemy przypisać w jednoznaczny sposób skalar $\lambda(v) \in \mathbb{K}$ o własności

$$v = \mathbb{L}_{\lambda(v)}(\sigma \circ \pi_L(v)),$$

przy czym zależność tegoż skalaru od wektora v jest gładka (wszak własność tę ma superpozycja odwzorowań gładkich $\sigma \circ \pi_L$). To pozwala nam zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma : \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K} : v \longmapsto (\pi_L(v), \lambda(v)),$$

jawnie \mathbb{K} -liniowe i gładkie. Bez trudu wskazujemy jego odwrotność:

$$\tau_\sigma^{-1} : \mathcal{O} \times \mathbb{K} \longrightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) : (x, \lambda) \longmapsto \mathbb{L}_\lambda(\sigma(x)),$$

o tych samych cechach strukturalnych.

Cięcie lokalne przyporządkowane dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau : \pi_{\mathbb{P}^1}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathbb{K}$ to

$$\sigma_\tau : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) : x \longmapsto \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}).$$

O jego niezerowości przekonuje prosty argument: jeśli dopuścimy równość

$$0_{L_x} = \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}})$$

nad pewnym punktem $x \in \mathcal{O}$, to wówczas wobec założonej przez nas \mathbb{K} -liniowości τ dochodzimy do sprzeczności

$$(x, 0_{\mathbb{K}}) \equiv \tau(0_{L_x}) = \tau \circ \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = (x, 1_{\mathbb{K}}).$$

Wypisane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}$ wyznaczamy

$$\sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = \mathbb{L}_{1_{\mathbb{K}}}(\sigma(x)) = \sigma(x),$$

zatem

$$\sigma_{\tau_\sigma} = \sigma.$$

Ponadto jeśli dla dowolnego wektora $v \in L_{\pi_L(v)} \subset \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$ zdefiniować (w sposób jednoznaczny) skalar $\lambda(v)$ równaniem

$$v =: \mathbb{L}_{\lambda(v)}(\sigma_\tau \circ \pi_L(v)) \equiv \mathbb{L}_{\lambda(v)} \circ \tau^{-1}(\pi_L(v), 1_{\mathbb{K}}) = \tau^{-1}(\pi_L(v), \lambda(v)),$$

to wyznaczamy

$$\lambda(v) = \text{pr}_2 \circ \tau(v),$$

a stąd także

$$\tau_{\sigma_\tau}(v) = (\pi_L(v), \text{pr}_2 \circ \tau(v)) \equiv \tau(v),$$

czyli

$$\tau_{\sigma_\tau} = \tau.$$

□

Powyższe stwierdzenie ma naturalne uogólnienie na przypadek $\text{rk } \mathbb{V} > 1$.

Twierdzenie 3. Przyjmijmy oznaczenia Def.4. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między trywilizacjami lokalnymi wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ i zbiorami N nigdzie nieznikających cięć lokalnych definiującymi nad każdym punktem bazy $x \in B$ (w ich wspólnym nośniku) N wektorów liniowo niezależnych $\sigma^k(x)$, $k \in \overline{1, N}$ w odnośnych włóknach \mathbb{V}_x . W szczególności wiązka wektorowa jest globalnie trywialna, tj. izomorficzna z wiązką $(B \times \mathbb{K}^{\times N}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \text{pr}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje N jej cięć globalnych o tej własności.

Dowód: Wariacja na temat dowodu poprzedniego stwierdzenia. □

Podobnie jak same wiązki wektorowe, morfizmy tych wiązek pokrywające dyfeomorfizm identycznościowy na bazie mają prosty opis lokalny, z którego przyjdzie nam skorzystać w przyszłości.

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def.4. Dowolny morfizm (Φ, id_B) wiązek wektorowych $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o odnośnych trywilizacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n_\alpha}$

(stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(n_\alpha; \mathbb{K})$, opisany przez diagram przemienności

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{V}_2 \\ \pi_{\mathbb{V}_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{V}_2} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i \in I}$ odwzorowań macierzowych (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K}), \quad i \in I$$

o własności

$$(11) \quad \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) = h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x).$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

Dowód: Wybierzmy (dowolnie) bazę $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n_1}}$ w przestrzeni \mathbb{K}^{n_1} i na tej podstawie zdefiniujemy cięcia lokalne

$$(12) \quad \varepsilon_a^{(i)} : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{V}_1 : x \mapsto \tau_i^{1-1}(x, e_a).$$

Zauważmy, że odwzorowanie Φ jest w pełni określone przez wartości przyjmowane przezeń na powyższych cięciach, oto bowiem wobec założonej \mathbb{K} -liniowości τ_i oraz Φ w dowolnym punkcie

$$v \equiv \tau_i^{-1}(x, v^a \triangleright_n e_a) \equiv \mathbb{L}_{v^a}^{(1)}(\varepsilon_a^{(i)}(x)), \quad x \in \mathcal{O}_i$$

otrzymujemy

$$\Phi(v) = \Phi(\mathbb{L}_{v^a}^{(1)}(\varepsilon_a^{(i)}(x))) = \mathbb{L}_{v^a}^{(2)} \circ \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)).$$

Wybierzmy zatem (dowolnie) bazę $\{f_r\}_{r \in \overline{1, n_2}}$ w \mathbb{K}^{n_2} , o bazie dualnej $\{f_r^*\}_{r \in \overline{1, n_2}}$, i oznaczmy odnośne cięcia lokalne \mathbb{V}_2 jako

$$\phi_r^{(i)} : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{V}_2 : x \mapsto \tau_i^{2-1}(x, f_r),$$

po czym zdefiniujemy

$$h_{iar} := f_r^* \circ \text{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}(\cdot, e_a) : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K}),$$

czyli poprzez formułę

$$(13) \quad \mathbb{L}_{h_{iar}(x)}^2(\phi_r^{(i)}(x)) := \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)).$$

Powyższe dane lokalne morfizmu Φ możemy zapisać w postaci macierzy (ε_A to stosowne kanoniczne izomorfizmy $V_A^* \otimes_{\mathbb{K}} W_A \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_A, W_A)$)

$$h_i(x) := h_{iar}(x) \triangleright \varepsilon_1(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} f_r), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

podobnie reprezentujemy też odwzorowania przejścia:

$$g_{ij}^1(x) = g_{ij\ ab}^1(x) \triangleright \varepsilon_2(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b), \quad g_{ij}^2(x) = g_{ij\ rs}^2(x) \triangleright \varepsilon_3(f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s).$$

Przywołując definicję tych ostatnich, ustalamy relację

$$\tau_j^{2-1}(x, h_j(x)(e_a)) = \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x)(e_a)),$$

a jednocześnie, wobec \mathbb{K} -liniowości τ_i^α oraz Φ , znajdujemy

$$\begin{aligned} \tau_j^{2-1}(x, h_j(x)(e_a)) &= \Phi(\tau_j^{1-1}(x, e_a)) = \Phi(\tau_i^{1-1}(x, g_{ij}^1(x)(e_a))) \\ &= \mathbb{L}_{g_{ij\ ab}^1(x)}^2 \circ \Phi(\tau_i^{1-1}(x, e_b)) = \mathbb{L}_{g_{ij\ ab}^1(x)}^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(e_b)) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x)(e_a)). \end{aligned}$$

Niechaj teraz $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami wektorowymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n_\alpha}$ i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(n_\alpha; \mathbb{K})$. Niech też $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})$, $i \in I$ będzie rodziną odwzorowań jak w tezie dowodzonego twierdzenia, przy użyciu której określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i : \pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \pi_{\mathbb{V}_2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{1-1}(x, v) \mapsto \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(v)),$$

które w świetle tożsamości, spełnionej dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i $v \in \mathbb{K}^{\times n_1}$,

$$\begin{aligned} \Phi_j(\tau_i^{1-1}(x, v)) &= \Phi_j(\tau_j^{1-1}(x, g_{ji}^1(x)(v))) = \tau_j^{2-1}(x, h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)(v)) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)(v)) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(v)) \\ &= \Phi_i(\tau_i^{1-1}(x, v)), \end{aligned}$$

jawią się ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2, \quad \Phi \upharpoonright_{\pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i.$$

Odwzorowanie to jest w oczywisty sposób \mathbb{K} -liniowe i zachowuje włókna. □

1. GEOMETRYZACJE KONSTRUKCJI LINIOWYCH

Definicja wiązki wektorowej nad rozmaitością dostarcza schematu geometryzacji czysto algebraicznej przestrzeni wektorowej. W ślad za nią możemy – na gruncie Tw. 2 – dokonać geometryzacji rozmaitych naturalnych operacji na przestrzeniach wektorowych. Poniżej przedstawiamy kilka z nich, które napotkamy w dalszej części kursu.

1.1. Suma prosta wiązek wektorowych.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 4. **Suma prosta (Whitneya) wiązek wektorowych** $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad \mathbb{K} , o wspólnej bazie B to wiązka wektorowa

$$(\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2 \equiv \mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2, B, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \mathbb{K}^{\times n_2} \equiv \mathbb{K}^{\times n_1 + n_2}, \pi_{\mathbb{V}_1} \circ \text{pr}_1 \upharpoonright_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2}),$$

w której $\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2$ jest produktem włóknistym rozmaitości \mathbb{V}_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ opisywanym przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2 & \\ \text{pr}_1 \upharpoonright_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2} \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \upharpoonright_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2} \\ \mathbb{V}_1 & & \mathbb{V}_2 \\ \swarrow \pi_{\mathbb{V}_1} & & \searrow \pi_{\mathbb{V}_2} \\ & B & \end{array}$$

i wyposażonym w strukturę podrozmaitości gładko włożonej w rozmaitość produktową $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$, zgodnie z tezą Tw. 0.8.

Włókno sumy Whitneya nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ przyjmuje postać

$$(\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2)_x \equiv \mathbb{V}_{1x} \oplus \mathbb{V}_{2x},$$

stanowi więc suma Whitneya naturalną adaptację konstrukcji sumy prostej przestrzeni wektorowych do geometrycznej kategorii przestrzeni modelowanych lokalnie na produktach (elementów topologii) rozmaitości różniczkowalnej z topologicznymi przestrzeniami wektorowymi $\mathbb{K}^{\times n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Wiązkę tę można również opisać – w duchu Tw. 2 – w terminach danych lokalnych jej składników, tj. wspólnego pokrycia trywializującego $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ wiązek \mathbb{V}_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ (otrzymanego np. poprzez wspólne rozdrobnienie odnośnych pokryć trywializujących) wraz z określonymi dlań odwzorowaniami przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$. Odwzorowania przejścia sumy

Whitneya obu wiązek, stowarzyszone z tym samym pokryciem trywializującym i stanowiące podstawę rekonstrukcji (klasy równoważności) wiązki $\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2$, to

$$g_{ij}^{1\oplus 2} := g_{ij}^1 \oplus g_{ij}^2 : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1) \oplus \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_2) \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1 + n_2).$$

Z sumą Whitneya wiązek wektorowych stowarzyszona jest para epimorfizmów wiązek wektorowych

$$\mathrm{pr}_{\alpha} : \mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2 \rightarrow \mathbb{V}_{\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

przyjmujących nad (dowolnym) punktem $x \in B$ postać

$$\mathrm{pr}_{\alpha x} : \mathbb{V}_{1x} \oplus \mathbb{V}_{2x} \rightarrow \mathbb{V}_{\alpha x} : (x, (v_1, v_2)) \mapsto (x, v_{\alpha}).$$

1.2. Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych.

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 4. **Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych** $(\mathbb{V}_{\alpha}, B, \mathbb{K}^{\times n_{\alpha}}, \pi_{\mathbb{V}_{\alpha}})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad \mathbb{K} , o wspólnej bazie B i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^{\alpha} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_{\alpha})$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$(\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2, B, \mathbb{K}^{\times n_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\times n_2} \cong \mathbb{K}^{\times n_1 \cdot n_2}, \pi_{\mathbb{V}_1} \circ \mathrm{pr}_1)$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 2, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{1\otimes 2} := g_{ij}^1 \otimes g_{ij}^2 : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1) \otimes \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_2) \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1 \cdot n_2).$$

Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych można w szczególności utworzyć dokonując stosownej topologizacji sumy rozłącznej włókien nad punktami bazy $B \ni x$, wybierając je w postaci

$$(\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2)_x \cong \mathbb{V}_{1x} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_{2x}.$$

Mamy tu zatem do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji iloczynu tensorowego przestrzeni wektorowych.

1.3. Wiązka homomorfizmów i wiązka dualna.

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Def. 4. **Wiązka homomorfizmów** (zwana także **wiązką Hom**) wiązek wektorowych $(\mathbb{V}_{\alpha}, B, \mathbb{K}^{\times n_{\alpha}}, \pi_{\mathbb{V}_{\alpha}})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad \mathbb{K} , o wspólnej bazie B i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^{\alpha} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_{\alpha})$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}, B}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2), B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \cong \mathbb{K}^{\times n_1 \cdot n_2}, \pi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)})$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 2, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{1 \rightarrow 2} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_2}, g_{ij}^2(\cdot)) \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(g_{ij}^1(\cdot)^{-1}, \mathbb{K}^{\times n_2})$$

$$: \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2})),$$

zapisanych w terminach odwzorowań \mathbb{K} -liniowych, które w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ przyjmują postać – odpowiednio –

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(g_{ij}^1(x)^{-1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) & : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \circlearrowright \\ & : \chi \mapsto \chi \circ g_{ij}^1(x)^{-1}, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_2}, g_{ij}^2(x)) & : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \circlearrowright \\ & : \chi \mapsto g_{ij}^2(x) \circ \chi. \end{aligned}$$

Włókno wiązki homomorfizmów nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jest postaci

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)_x \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_{1x}, \mathbb{V}_{2x}),$$

mamy przeto do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji przestrzeni \mathbb{K} -liniowej homomorfizmów między (ustalonymi) przestrzeniami wektorowymi.

Definicja 8. Przyjmijmy zapis Def. 7. **Wiązka dualna** (zwana także **wiązką dwoistą**) wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ to wiązka wektorowa (o oczywistym rzucie na bazę)

$$(\mathbb{V}^* \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}, B}(\mathbb{V}, B \times \mathbb{K}), B, \mathbb{K}^{\times n*} \cong \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}^*}),$$

w której definicji $(B \times \mathbb{K}, B, \mathbb{K}, \text{pr}_1)$ jest trywialną wiązką wektorową rzędu 1 nad \mathbb{K} .

1.4. Kompleksyfikacja rzeczywistej wiązki wektorowej.

Definicja 9. Przyjmijmy zapis Def. 4, zakładając przy tym, że $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$. **Kompleksyfikacja wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ to wiązka wektorowa (o oczywistym rzucie na bazę)

$$(\mathbb{V}^{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{R}, B} (B \times \mathbb{C}), B, \mathbb{C}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}),$$

w której definicji $(B \times \mathbb{C}, B, \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}, \text{pr}_1)$ jest trywialną wiązką wektorową rzędu 1 nad \mathbb{C} , z naturalną strukturą trywialnej wiązki wektorowej rzędu 2 nad \mathbb{R} (indukowanej przez kanoniczne włożenie $j_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r, 0)$). Działanie ciała bazowego \mathbb{C} na $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ jest przy tym dziedziczone z naturalnego działania

$$\text{id}_B \times \ell_{\zeta} : B \times \mathbb{C} \curvearrowright : (x, z) \mapsto (x, \zeta \cdot z)$$

tegoż ciała na czynniku trywialnym $B \times \mathbb{C}$ wedle schematu

$$\mathbb{L}_{\zeta} \equiv \text{id}_{\mathbb{V}} \otimes (\text{id}_B \times \ell_{\zeta}), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$