I REKAPITULACJA POPRZ. SEMESTRU:

KAT. PRZ. KWADRATOWYCH

FUNKTOR Clifforda $\mathrm{Cliff} : \square\text{-}\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathrm{uAlgAss}_{\mathbb{K}}$

$\mathbb{K}$ – CIAŁO BAZOWE

(SKŁ. OBIEKTOWA) OBIEKT UNIWERSALNY!

$$\mathrm{Obj}\ \square\text{-}\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \ni (V,Q) \longmapsto \mathrm{Cliff}(V,Q) \in \mathrm{Obj}\ \mathrm{uAlgAss}_{\mathbb{K}}$$

ALGEBRA Clifforda PRZESTRZENI $\square$ (V,Q)

$Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$

(SKŁ. MORFIZMOWA) $\quad (Q_2 \circ \chi = Q_1)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1,V_2) \supset \mathrm{Isom}((V_1,Q_1),(V_2,Q_2)) \ni \chi$$

$$\longmapsto \mathrm{Cliff}(\chi)\ \left(: \mathrm{Cliff}(V_1,Q_1) \longrightarrow \mathrm{Cliff}(V_2,Q_2) \right)$$

PRZY TYM

$(*)\quad \gamma_C : V \rightarrowtail \mathrm{Cliff}(V,Q)$ (KANONICZNE ODWZ. CLIFFORDA)

$$(**)\quad \mathrm{Cliff}\big((V_1,Q_1)\oplus(V_2,Q_2)\big)$$
$$\simeq \mathrm{Cliff}(V_1,Q_1)\,\hat{\otimes}\,\mathrm{Cliff}(V_2,Q_2)$$
$$(\gamma_1\otimes\gamma_2)\cdot(\gamma_1'\otimes\gamma_2') \quad (-1)^{|\gamma_2|\cdot|\gamma_1'|}$$

$$\mathrm{Cliff}(V,Q) = \otimes V \Big/ \big\langle v\otimes v - Q(v)\mathbb{1},\ v\in V\big\rangle$$
$$\otimes V = \mathbb{K}\oplus V\oplus V^{\otimes 2}\oplus V^{\otimes 3}\oplus\ldots$$

(***) $X \in \mathrm{Isom}((V_1, Q_1), (V_2, Q_2))$ jest mono/epi/izo

$\Downarrow$

$\mathrm{Cliff}(X)$ —— " ——

PONADTO: ALGEBRY Clifforda nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$

- PROSTE (MACIERZOWE) lub SUMY PROSTE DWÓCH KOPII TYCHŻE

$\Downarrow$

SZACHOWNICA Clifforda

$$V \hookrightarrow \mathrm{Cliff}(V,Q) \implies$$ REALIZACJA $O(V,Q)$ WEWNĄTRZ $\mathrm{Cliff}(V,Q)$

$$O(V,Q) = \{ X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V \mid Q \circ X = Q \}$$

GRUPA Pin

$$u \longmapsto \left(\gamma \xmapsto{\widetilde{Ad}_u} J_V(u) \cdot \gamma \cdot u^{-1} \right)$$

$$\widetilde{Ad} : \mathrm{Pin}(V,Q) \to \mathrm{Aut}_{\text{u.Alg}\,\mathbb{Z}_2\text{S}}(\mathrm{Cliff}(V,Q))$$

$$\mathrm{Pin}(V,Q) = \langle v \equiv j_C(v) \in Q^{-1}(\{-1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}) \rangle$$

ZAŁ.: $\mathbb{K}$ - CIAŁO SPINOWE

tj. $\mathbb{K}^\times = (\mathbb{K}^\times)^2 \cup (-(\mathbb{K}^\times)^2)$

np. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\cap$$

$$P(V,Q) \equiv \langle v \in V^\times \rangle$$

MULTYPL. GRUPA JEDNOŚCI

$$\cap$$

GRUPA Clifforda

$$\Gamma(V,Q) = \{ u \in \mathrm{Cliff}(V,Q)^\times \mid \widetilde{Ad}_u(V) = V \}$$

$$\{ \gamma \in \mathrm{Cliff}(V,Q) \mid \exists \gamma^{-1} \}$$

MAMY FUNDAMENTALNY KCD GRUP

$$1 \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{K}} \rightarrowtail Pin(V,Q) \twoheadrightarrow O(V,Q) \longrightarrow 1$$

(DYSKRETNA, ZAL. OD $\mathbb{K}$)

oraz - dla

GRUPA SPIN $\quad Spin(V,Q) := Pin(V,Q) \cap Cliff(V,Q)^{0}$

$$1 \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{K}} \longrightarrow Spin(V,Q) \longrightarrow SO(V,Q) \longrightarrow 1$$

$$SO(V,Q) = \{ X \in End_{\mathbb{K}}(V) \mid Q \circ X = Q \wedge \det X = 1 \}$$

WYKORZYSTUJEMY : TW. CARTANA-DIEUDONNEGO

MODUŁ Clifforda

$W \in \mathrm{ObVect}_{\mathbb{K}}$

$$\rho : \mathrm{Cliff}(V,Q) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$$

REALIZACJA / REPREZENTACJA $\rightsquigarrow \rho(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \rho(\gamma_1) \circ \rho(\gamma_2)$

INDUKUJA MODUŁY SPINOROWE $\ni$ SPINORY

(PRZ. NIEPRZYW. REALIZACJI ALGEBR Clifforda)

$$\rho\restriction_{\mathrm{Spin}(V,Q)\ (\subset \mathrm{Cliff}(V,Q))} : \mathrm{Spin}(V,Q) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$$

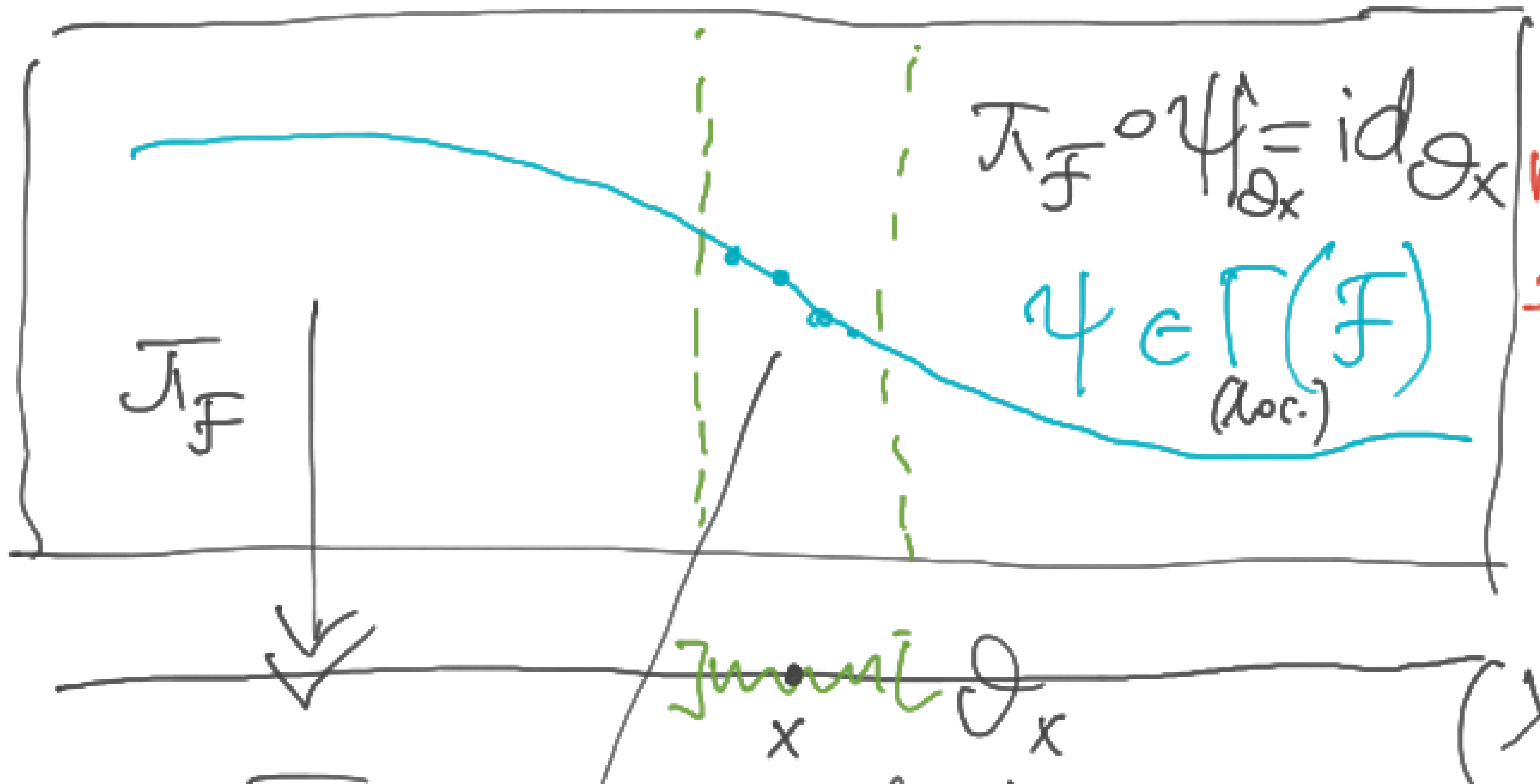
TEORIA REPREZENTACJI ALGEBR PROSTYCH (i ich sum prostych) $\Longrightarrow$ KLASYFIKACJA SPINORÓW nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$

II TELEWIZJA

W FIZYCE INTERESUJĄ NAS POLA ψ

$\parallel\!\!|$

„GŁADKIE ROZKŁADY NAD CZASOPRZESTRZENIĄ OBIEKTÓW (ze strukturą modelowaną) MODELUJĄCYCH FIZ. STOPNIE SWOBODY"



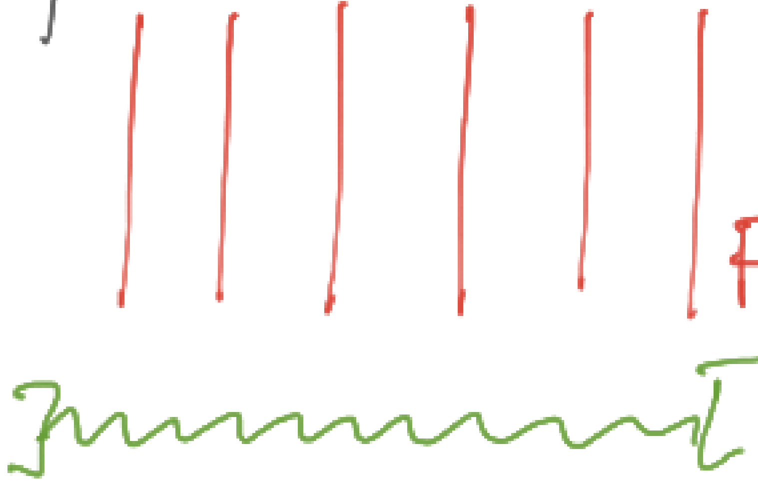
F WIĄZKA PÓL

(X, g) - CZASOPRZESTRZEŃ

π_F i $T\pi_F$ - surjekcje

$g \in \Gamma\left(T^*X \otimes^{sym}_{X, C^\infty(X,\mathbb{R})} T^*X\right)$

LOKALNY MODEL



F. PRZESTRZEŃ WEWN. STOPNI SWOBODY (IDOF)

$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_x \times F$

ROZWAŻAMY (LFT)

$$\mathcal{A}_{DF}[\cdot] : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow U(1)$$

$$: \psi \longmapsto \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\psi]\right)$$

AMPLITUDA Diraca–Feynmana

<u>NOTABENE</u> : MODELOWANIE <u>DYNAMIKI</u> WYMAGA „NATURALNEGO" RÓŻNICZKOWANIA NA $\Gamma(\mathcal{F})$!

STRUKTURA $\mathcal{F}$ DYKTOWANA PRZEZ FENOMENOLOGIĘ (lub [illegible] naukowego) ~ Wigner!

NASZ CEL :

IDOF :

$\mathcal{S}(X,g) \leftsquigarrow F_1 \equiv W$ (MODUŁ SPINOROWY) WIĄZKA SPINOROWA

$\mathcal{C}(X,g) \leftsquigarrow F_2 \equiv Cliff(\mathbb{R}^{p,q})$ WIĄZKA Clifforda

$(TX,g) \underset{lok.}{\cong} \mathbb{R}^{p,q}$

$\mathcal{S}(X,g) \circlearrowleft \mathcal{C}(X,g)$

$\mathcal{C}(X,g) \times_X \mathcal{S}(X,g) \to \mathcal{S}(X,g)$

w sposób lok. modelowany

$g\big|_{Spin(p,q)} \leftsquigarrow$ na $W \circlearrowleft Cliff(\mathbb{R}^{p,q})$

KONSTRUKCJA $\mathcal{S}(X,g)$ WYMAGA PROLONGACJI

GRUPY LIEGO

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Spin}(p,q) \arrow[r] \arrow[d] & SO(p,q) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & F_{\mathrm{Spin}}TX \arrow[r] \arrow[d] & F_{SO}TX \arrow[d] & \\
 & & X \arrow[r, equal] & X &
\end{tikzcd}
$$

WIĄZKI GŁÓWNE

ORAZ GEOMETRYZACJI ALGEBR. PROCEDURY PARAMETRYZACJI (IZOKLASY) PRZ. WEKTOROWEJ I JEJ BAZY

WIĄZKA STOWARZYSZONA

$$\left(\beta : V \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{BAZA} \right)$$

$\dim_{\mathbb{K}} V = n$

ISTNIEJE iff X ORIENTOWALNA!

MEMENTO: PROLONGACJA $F_{SO}TX$

DO $F_{Spin}TX$ NAPOTYKA W OGÓLNOŚCI

KONTRAST: (WIĘC TEŻ ISTNIENIE $S(X,g)$!)

$TX \rightsquigarrow$ OBSTRUKCJĘ TOPOLOGICZNĄ

kanonicznie przypisane X (KWANTYFIKOWANĄ PRZEZ II KL. STIEFELA-WHITNEYA (X,g))

(a $S(X,g)$ NIE!)

NOTABENE: „NATURALNYCH" RÓŻNICZKOWAŃ NA $\Gamma(S(X,g))$

DOSTARCZA POWIĄZANIE SPINOWE

OPERATOR DIRACA

III ELEMENTY TEORII WIĄZEK WŁÓKNISTYCH

III.1 PRZYPOMNIENIE Z TEORII ROZMAITOŚCI

POJĘCIE GŁADKOŚCI ROZKŁADU OBIEKTÓW O UST. IDOF WYWODZIMY Z

Def. 1. N-WYMIAROWA ROZMAITOŚĆ RÓŻNICZKOWALNA (KLASY C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) TO PRZ. HAUSDORFFA $(M, \mathcal{T}(M))$ WRAZ Z WYRÓŻNIONYM POKRYCIEM OTWARTYM

$$\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(M), \quad \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i = M$$

, RODZINA STOW. Z NIM HOMEOMORFIZMÓW

$$k_i : \mathcal{O}_i \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \quad , \quad \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^N), \ i \in I,$$

ZW. LOKALNYMI UKŁADAMI WSPÓŁRZĘDNYCH,

O WŁASNOŚCI – $\forall (i,j) \in I^{\times 2} : \ \underbrace{\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j}_{\equiv \mathcal{O}_{ij}} \neq \emptyset$ –

$$k_j \circ k_i^{-1}\restriction_{k_i(\mathcal{O}_{ij})} : k_i(\mathcal{O}_{ij}) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow k_j(\mathcal{O}_{ij})$$

LOKALNE TRANSFORMACJE WSPÓŁRZĘDNYCH

! $\in C^{k}\big(k_i(\mathcal{O}_{ij}), k_j(\mathcal{O}_{ij})\big)$

POWYŻSZE WRAZ Z ODWZOROWANIAMI GŁADKIMI

$$f : (M_1, \mathcal{T}(M_1)) \longrightarrow (M_2, \mathcal{T}(M_2))$$

O LOKALNYCH PREZENTACJACH WSPÓŁRZĘDNIOWYCH

$$! \quad C^k(\kappa_i^1(\mathcal{O}_i^1), \kappa_{\phi(i)}^2(\mathcal{O}_{\phi(i)}^2))$$

$$\kappa_{\phi(i)}^2 \circ f \circ (\kappa_i^1)^{-1} : \kappa_i^1(\mathcal{O}_i^1) \longrightarrow \kappa_{\phi(i)}^2(\mathcal{O}_{\phi(i)}^2), \quad i \in I_1$$

dla $\phi : I_1 \to I_2$ PODPORZ. f:

$$f(\mathcal{O}_i^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i)}^2$$

TWORZĄ KATEGORIĘ ROZMAITOŚCI RÓŻNICZK. KL. C^k

$\mathbf{Man}^{(k)}$.

DISCLAIMER: ODTĄD ROZWAŻAMY $k = \infty$.

MORAŁ: $ObMan^{(k)}$ TO PRZESTRZENIE TOP. WIERNIE LOK. MODELOWANE NA $\mathbb{R}^N$

STR. MOD.

IZOMORFIZMY TOP

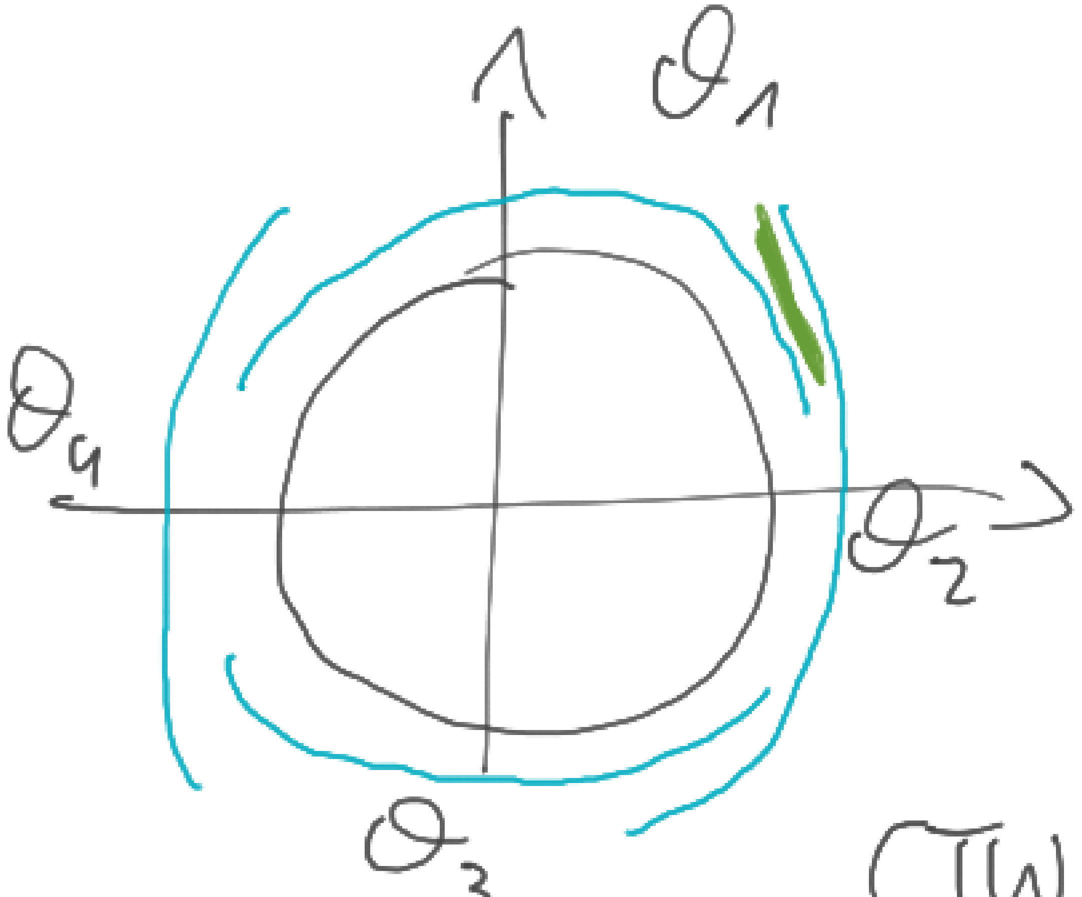
PRZYKŁADY:

1° ROZMAITOŚĆ KLASY C^∞:

ZANURZONA

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

(OPIS UWIKŁANY!)



θ_i – ŚCIĄGALNE $\quad i \in \{1,2,3,4\}$

θ_{ij} — // —

$\theta_{ijk\ldots} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \{\theta_i\}_{i\in\{1,2,3,4\}}$ JEST POKRYCIE DOBRE

(TW. DE RHAMA-WEILA: $\forall\, M \in \mathrm{Obj}\,\mathrm{Man}^{(2)}$ $\exists$ DOBRO)

2° ODWZOROWANIE C^∞ – GŁADKIE (DYFEOMORFIZM)

HOMOGRAFIE* PRZEPROWADZAJĄCE

S^1 W OKRĘGI UOG.

WAŻNE WŁASNOŚCI:

(1) $Man^{(\infty)}$ JEST KATEGORIĄ Z PRODUKTEM

(2) $Man^{(\infty)}$ —— " —— Z COFNIĘCIEM

Niech $f : (M, \mathcal{J}(M)) \longrightarrow (N, \mathcal{J}(N))$

BĘDZIE HOMEOMORFIZMEM NA OBRAZ $f(M) \subset N$

i $(N, \mathcal{J}(N))$ NIESIE STRUKTURĘ różniczk. klasy C^∞. $\{\kappa_i^N\}_{i \in I_N}$

wówczas NA $(M, \mathcal{J}(M))$ STR. RÓŻNICZK. klasy C^∞

$$f^* \kappa_i^N : f^{-1}(\mathcal{O}_i^N) \longrightarrow \mathcal{U}_i, \quad i \in I_N$$

STRUKTURA COFNIĘTA

(3) $\mathrm{Man}^{(\infty)}$ JEST KATEGORIĄ Z PRODUKTEM WŁÓKNISTYM.

$$f_A : M_A \xrightarrow{C^\infty} N, \quad A \in \{1,2\}$$

$$:= \{(x_1,x_2) \in M_1 \times M_2 \mid f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \times_N M_2 \equiv M_1 \, {}_{f_1}\!\times_{f_2} M_2 \arrow[r, "pr_2 \upharpoonright"] \arrow[d, "pr_1 \upharpoonright"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\
M_1 \arrow[r, "f_1"'] & N
\end{tikzcd}$$

$$\cap$$

$$M_1 \times M_2$$

$\Uparrow$: ZNAJDŹ STRUKTURĘ RÓŻN. NA