METODY ALGEBRY WYŻSZEJ W FIZYCE I W CZASACH ZARAZY
4. WYKŁAD ZDALNY

Ostatnim brakującym elementem wiedzy ogólnej, którego potrzebujemy do wprowadzenia pojęcia centralnego niniejszego kursu, są rudymenty teorii algebr, do których omówienia przejdziemy obecnie.

1. Algebry

Pojęcie podstawowe wprowadzamy w

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niech $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$. **Algebra nad pierścieniem** R (albo inaczej R**-algebra**) to kolekcja $\big(\big((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big), m_{\mathfrak{A}}\big)$ złożona z R-modułu $\big((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big)$ oraz odwzorowania dwu-R-liniowego

$$m_{\mathfrak{A}} \;:\; \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A} \;:\; (a, b) \longmapsto a \cdot_{\mathfrak{A}} b \equiv m_{\mathfrak{A}}(a, b)\,,$$

zwanego **mnożeniem**. Równoważnie możemy traktować mnożenie jako odwzorowanie R-liniowe

$$m_{\mathfrak{A}} \;:\; \mathfrak{A} \otimes_R \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}\,,$$

przeto w dalszej części wykładu będziemy obu wersji definicji używać zamiennie, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień. Podobnie, jeśli tylko struktura rozważanej algebry nie będzie budzić wątpliwości, będziemy czasami gwoli odciążenia zapisu używać skrótu

$$m_{\mathfrak{A}}(a, b) \equiv a.b\,.$$

Algebra przeciwna do $\big(\big((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big), m_{\mathfrak{A}}\big)$ to R-algebra $\big(\big((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big), m_{\mathfrak{A}}^{\mathrm{opp}}\big)$ z mnożeniem danym wzorem

$$m_{\mathfrak{A}}^{\mathrm{opp}} := m_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{A}}\,.$$

Będziemy ją oznaczać symbolem $\mathfrak{A}^{\mathrm{opp}}$.

Algebra przemienna to taka, w której

$$m_{\mathfrak{A}} \equiv m_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{A}}\,.$$

Algebra łączna to taka, w której mnożenie jest operacją łączną.

Algebra unitalna (zwana także **algebrą z jednością**) to kolekcja $\big(\big((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big), m_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\big)$ złożona z R-algebry $\big(\big((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}\big), m_{\mathfrak{A}}\big)$ oraz stałej $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$ będącej elementem neutralnym mnożenia, zwanej **jednością** lub **jedynką**.

Podalgebra $\mathfrak{B}$ algebry $\mathfrak{A}$ to taki jej podmoduł, który spełnia warunek domkniętości względem mnożenia,

$$m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}\,.$$

Homomorfizm R**-algebry** $\big(\big((\mathfrak{A}_1, +_{\mathfrak{A}_1}, P_{\mathfrak{A}_1}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}_1}), \ell_{\mathfrak{A}_1}\big), m_{\mathfrak{A}_1}\big)$ **w** R**-algebrę** $\big(\big((\mathfrak{A}_2, +_{\mathfrak{A}_2}, P_{\mathfrak{A}_2}, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}_2}), \ell_{\mathfrak{A}_2}\big), m_{\mathfrak{A}_2}\big)$ to odwzorowanie $\chi \in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ o dodatkowej własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1 \arrow[r, "m_{\mathfrak{A}_1}"] \arrow[d, "\chi\times\chi"'] & \mathfrak{A}_1 \arrow[d, "\chi"] \\
\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2 \arrow[r, "m_{\mathfrak{A}_2}"'] & \mathfrak{A}_1
\end{tikzcd}\,.$$

Homomorfizm R-algebr z jednością nazwiemy **unitalnym**, jeśli obrazem jedności w jego dziedzinie względem tego homomorfizmu jest jedność w jego przeciwdziedzinie.

Algebry nad pierścieniem R wraz z odnośnymi homomorfizmami tworzą **kategorię algebr nad pierścieniem** R, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{Alg}_R\,.$$

Kategorię R-algebr łącznych oznaczymy symbolem

$$\mathbf{AssAlg}_R\,,$$

natomiast **kategorię R-algebr unitalnych** (z unitalnymi homomorfizmami R-algebr jako morfizmami) – symbolem

$$\mathbf{uAlg}_R\,.$$

Wreszcie **kategorię unitalnych R-algebr łącznych** oznaczymy symbolem

$$\mathbf{uAssAlg}_R\,.$$

Przykłady 1.

(1) Macierze kwadratowe $\mathrm{Mat}(n;R) \equiv R(n)$ (rozmiaru $n \times n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) o współczynnikach z pierścienia przemiennego R z dodawaniem po współrzędnych i takimż braniem przeciwności, a także macierzą zerową w charakterze elementu neutralnego tworzą grupę przemienną, na której jest określone naturalne działanie (po współrzędnych) pierścienia R, czyniące z rzeczonej grupy moduł nad R, a nadto – mnożenie (macierzowe), nadające temu R-modułowi strukturę R-algebry (nieprzemiennej dla $n > 1$), zwanej **algebrą macierzową**. Naturalną (standardową) bazę tej algebry tworzą macierze $\{E_{ij}\}_{i,j\in\overline{1,n}}$ o wyrazach

$$\left(E_{i,j}^{(n)}\right)^k{}_l = \delta_{k,i}^R \cdot \delta_{l,j}^R\,, \tag{1}$$

spełniające prostą algebrę

$$E_{i,j}^{(n)} \odot E_{k,l}^{(n)} = \delta_{k,j}^{\mathbb{K}} \triangleright E_{i,l}^{(n)}\,. \tag{2}$$

(2) Endomorfizmy $\mathrm{End}_R(G)$ modułu G nad pierścieniem przemiennym R z określonym punktowo dodawaniem i braniem przeciwności, a także endomorfizmem zerowym w charakterze elementu neutralnego tworzą grupę przemienną, na której jest określone punktowe działanie pierścienia R, czyniące z rzeczonej grupy moduł nad R, a nadto – mnożenie zadawane przez superpozycję endomorfizmów, nadające temu R-modułowi strukturę R-algebry (w ogólności nieprzemiennej), zwanej **algebrą endomorfizmów**.

(3) Dowolny pierścień jest algebrą łączną nad swym centrum.

(4) Unitalna $\mathbb{R}$-algebra **kwaternionów** $\mathbb{H}$, czyli przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa $\mathbb{R}^{\times 4}$ z **iloczynem Hamiltona** (zapisanym dla dowolnych $r_i, s_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3,4\}$)

$$\begin{aligned} & m_{\mathbb{H}}\big((r_1,r_2,r_3,r_4),(s_1,s_2,s_3,s_4)\big) \equiv (r_1,r_2,r_3,r_4) \cdot_{\mathbb{H}} (s_1,s_2,s_3,s_4) \\ = \quad & (r_1 \cdot s_1 - r_2 \cdot s_2 - r_3 \cdot s_3 - r_4 \cdot s_4, r_1 \cdot s_2 + r_2 \cdot s_1 + r_3 \cdot s_4 - r_4 \cdot s_3, \\ & r_1 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_4 + r_3 \cdot s_1 + r_4 \cdot s_2, r_1 \cdot s_4 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2 + r_4 \cdot s_1\big) \end{aligned}$$

o elemencie neutralnym

$$1_{\mathbb{H}} := (1,0,0,0)\,.$$

Tak jak w przypadku liczb zespolonych istnieje monomorfizm ciał

$$\jmath_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}} \;:\; \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{H} \;:\; r \longmapsto (r,0,0,0)\,,$$

który pozwala zdefiniować działanie $\mathbb{R} \cong \jmath_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ na $\mathbb{H}$,

$$\ell_\cdot \;:\; \mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrowtail \mathbb{H} \;:\; (r,q) \longmapsto \jmath_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}}(r) \cdot_{\mathbb{H}} q\,,$$

i uzasadnia zapis

$$\mathbb{H} \ni (a,b,c,d) \equiv a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k}\,.$$

Wyróżnione wektory

$$\mathsf{i} \equiv (0,1,0,0)\,, \qquad \mathsf{j} \equiv (0,0,1,0)\,, \qquad \mathsf{k} \equiv (0,0,0,1)$$

spełniają relacje

$$\begin{gathered} \mathsf{i} \cdot_{\mathbb{H}} \mathsf{i} = -1 = \mathsf{j} \cdot_{\mathbb{H}} \mathsf{j} = \mathsf{k} \cdot_{\mathbb{H}} \mathsf{k}\,, \\ \mathsf{i} \cdot_{\mathbb{H}} \mathsf{j} = \mathsf{k} = -\mathsf{j} \cdot_{\mathbb{H}} \mathsf{i}\,, \qquad \mathsf{k} \cdot_{\mathbb{H}} \mathsf{i} = \mathsf{j} = -\mathsf{i} \cdot_{\mathbb{H}} \mathsf{k}\,, \qquad \mathsf{j} \cdot_{\mathbb{H}} \mathsf{k} = \mathsf{i} = -\mathsf{k} \cdot_{\mathbb{H}} \mathsf{j}\,. \end{gathered} \tag{3}$$

W analogii do liczb zespolonych definiujemy $\mathbb{R}$-liniowe, antymultyplikatywne i inwolutywne **sprzężenie kwaternionowe**

$$\cdot^* \;:\; \mathbb{H} \circlearrowleft \;:\; a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \longmapsto a - b\mathsf{i} - c\mathsf{j} - d\mathsf{k}$$

i przy jego użyciu **normę kwaternionową**

$$\|\cdot\|_{\mathbb{H}} \;:\; \mathbb{H} \circlearrowleft \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; q \longmapsto \sqrt{q \cdot q^*}\,,$$

która dystrybuuje względem mnożenia,

$$\forall_{q_1, q_2 \in \mathbb{H}} \;:\; \|q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2\|_{\mathbb{H}} = \|q_1\|_{\mathbb{H}} \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}\,.$$

Mamy zatem oczywistą tożsamość

$$\forall_{q \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0,0)\}} \;:\; q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|_{\mathbb{H}}^2}\,,$$

która pokazuje, że kwaterniony tworzą pierścień z dzieleniem. Można je otrzymać z uniwersalnej konstrukcji Cayleya–Dicksona zastosowanej do liczb zespolonych. Są to więc pary liczb zespolonych (czyli przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \equiv \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle \mathsf{j} \rangle_{\mathbb{C}}$) z mnożeniem określonym przez sugestywny zapis

$$\mathbb{H} \ni a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \leftrightarrow (a + b\,\mathsf{i}) \triangleright 1 + (c + d\,\mathsf{i}) \triangleright \mathsf{j} \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,.$$

W tym ujęciu pojawia się naturalnie monomorfizm $\mathbb{R}$-algebr

$$\jmath_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} \;:\; \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{H} \;:\; a + b\mathsf{i} \longmapsto (a + b\,\mathsf{i}) \triangleright 1 + (0 + 0\,\mathsf{i}) \triangleright \mathsf{j}\,. \tag{4}$$

Warto też zauważyć, że algebra kwaternionów ma naturalną interpretację geometryczną – oto w obrazie izomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych

$$\iota_{\mathbb{H}} \;:\; \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} \;:\; a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \longmapsto \big(a, (b, c, d)\big) \tag{5}$$

iloczyn Hamiltona tłumaczy się, jak łatwo sprawdzić, na mnożenie

$$\begin{aligned} m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}} := \iota_{\mathbb{H}} \circ m_{\mathbb{H}} \circ \big(\iota_{\mathbb{H}}^{-1} \times \iota_{\mathbb{H}}^{-1}\big) \quad &: \quad \big(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}\big)^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} \\ &: \quad \big((r, v), (s, w)\big) \longmapsto \big(r \cdot s - \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}}(v, w), \\ &\qquad\qquad v \times w + r \triangleright w + s \triangleright v\big)\,, \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $\Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(3)}} \;:\; \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest standardową (euklidesową) niezwyrodniałą 2-liniową formą symetryczną (czyli iloczynem skalarnym) na $\mathbb{R}^{\times 3}$, symbol $v \times w$ oznacza iloczyn wektorowy v i w, natomiast $\triangleright$ jest kanonicznym działaniem ciała bazowego $\mathbb{R}$ na grupie przemiennej $\mathbb{R}^{\times 3}$. Tym samym kwaterniony w zgrabnej postaci kodują pełną informację o elementarnej strukturze metrycznej i orientacji przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej $\mathbb{R}^{\times 3}$.

(5) Mnożenie punktowe funkcji wraz z określonym punktowo działaniem $\mathbb{R}$ nadaje pierścieniowi funkcji ciągłych na danym zbiorze o wartościach rzeczywistych strukturę przemiennej i łącznej $\mathbb{R}$-algebry unitalnej.

(6) Z każdą grupą skończoną G można stowarzyszyć $\mathbb{C}$-algebrę, w której nośnikiem struktury jest zbiór $\mathbb{C}^G$ funkcji na G o wartościach zespolonych z punktową strukturą $\mathbb{C}$-liniową (j/w) oraz mnożeniem określonym wzorem
$$\star \;:\; \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}^G \;:\; (f_1, f_2) \longmapsto \sum_{g \in G} f_1(g) \triangleright \ell^*_{g^{-1}} f_2$$
i noszącym miano **splotu funkcji**. Algebrę tę określamy mianem **algebry grupowej nad** G. Dyskusję funktorialności tego przyporządkowania, jak również szczegółowy opis dodatkowych własności tak określonego obiektu algebraicznego, można znaleźć w notatkach do wykładu z Teorii Grup I Autora pt. „Algebra grupowa, kategorycznie".

(7) Zbiór $\mathbb{R}^3$ ze standardową strukturą przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej oraz iloczynem wektorowym jest algebrą niełączną bez jedności.

(8) Z dowolnym zbiorem S można stowarzyszyć **R-algebrę wolną na** S, daną jako R-moduł wolny na słowniku na S, czyli na zbiorze skończonych ciągów elementów S, zwanych słowami, z mnożeniem określonym jako konkatenacja słów.

(9) Dowolna R-algebra $\mathfrak{A}$ z mnożeniem $m_{\mathfrak{A}}$ określa algebrę przemienną o nośniku $\mathfrak{A}$ z mnożeniem
$$\{\cdot, \cdot\}_{m_{\mathfrak{A}}} := m_{\mathfrak{A}} + m_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{A}}\,,$$
określanym mianem **antykomutatora**, jak również algebrę antyprzemienną o nośniku $\mathfrak{A}$ z mnożeniem
$$[\cdot, \cdot]_{m_{\mathfrak{A}}} := m_{\mathfrak{A}} - m_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{A}}\,,$$
określanym mianem **komutatora**.

(10) Jądro homomorfizmu algebr jest podalgebrą jego dziedziny, obraz zaś – podalgebrą jego przeciwdziedziny.

(11) Przecięcie wszystkich podalgebr algebry $\mathfrak{A}$ zawierających podzbiór $S \subset \mathfrak{A}$ zwany jest **podalgebrą generowaną przez** S. Podzbiór S nazywamy w tym kontekście **zbiorem generującym**.

(12) Podalgebra $S' \equiv C_{\mathfrak{A}}(S)$ algebry łącznej $\mathfrak{A}$ złożona z elementów $\mathfrak{A}$ komutujących (czyli przemiennych) ze wszystkimi elementami podzbioru $S \subset \mathfrak{A}$,
$$C_{\mathfrak{A}}(S) := \left\{\; a \in \mathfrak{A} \quad | \quad \forall_{s \in S} \;:\; [a, s]_{m_{\mathfrak{A}}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{A}} \;\right\},$$
jest nazywana **centralizatorem** S **(w** $\mathfrak{A}$**)**. Ilekroć S jest podalgebrą, to $S \cap C_{\mathfrak{A}}(S)$ określamy mianem **centrum** S. W szczególności gdy $S = \mathfrak{A}$, mówimy o **centrum algebry** $\mathfrak{A}$ i piszemy $Z(\mathfrak{A}) \equiv C_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$.

Obecność jedności w algebrze pozwala ustalić

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 1 i Przykł. 1 (3), zakładając przy tym, że R-algebra $\mathfrak{A}$ ma jedność $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$. Odwzorowanie
$$\jmath_R \;:\; R \longrightarrow \mathfrak{A} \;:\; r \longmapsto r \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$$
jest homomorfizmem R-algebr.

Dowód: Oczywisty. □

Uwaga 1. Monomorfizm, o którym mowa w Stw. 1, pozwala utożsamić pierścień bazowy R z podalgebrą przemienną $\jmath_R(R) \subset Z(\mathfrak{A})$ (w notacji Przykł. 1 (11)), co też będziemy czynić w dalszej części wykładu.

Elementarne przejście od algebry nieunitalnej do algebry unitalnej opisuje

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychchczasowy i niechaj $\mathfrak{A}$ będzie R-algebrą bez jedności. Na sumie prostej R-modułów $\mathfrak{A} \oplus R$ istnieje kanoniczna struktura R-algebry unitalnej z mnożeniem
$$m_{\mathfrak{A} \oplus R} \quad : \quad (\mathfrak{A} \oplus R)^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A} \oplus R$$

$$:\quad \big((a,r),(b,s)\big) \longmapsto \big(m_{\mathfrak{A}}(a,b) +_{\mathfrak{A}} r \triangleright_{\mathfrak{A}} b +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} a, r \cdot_R s\big)$$

i jednością

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}\oplus R} = (0, 1_R)\,.$$

Dowód: Oczywisty. □

Nakreśliwszy kontekst naszych dalszych rozważań, możemy obecnie przystąpić do omówienia w tymże kontekście podstawowych konstrukcji algebraicznych napotkanych w dyskusji modułów nad pierścieniem (lub ogólniej: w kategorii przemiennej) takich jak iloraz algebraiczny, produkt i suma prosta oraz iloczyn tensorowy. Zaczniemy od koniecznej rafinacji pojęcia podalgebry.

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ będzie podalgebrą R-algebry $\mathfrak{A}$. Powiemy, że $\mathfrak{I}$ jest **ideałem lewostronnym**, jeśli spełnia warunek

$$\mathfrak{A}.\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}\,,$$

jeżeli zaś spełniony jest warunek

$$\mathfrak{I}.\mathfrak{A} \subset \mathfrak{I}\,,$$

to mówimy o **ideale prawostronnym**. Ideał, który jest zarazem lewo- i prawostronny, nazywamy **ideałem obustronnym**. **Ideał minimalny** (**lewostronny**, **prawostronny** lub **obustronny**) to taki, który nie zawiera niezerowych podideałów właściwych (tego samego typu).

Algebra prosta to taka, która nie zawiera ideałów innych niż $\{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz $\mathfrak{A}$ i w której mnożenie jest nietrywialne, $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$.

Przykłady 2.

(1) Podzbiór $R(n)$ złożony z macierzy, których ostatni rząd tworzą same 0_R, jest (nieobustronnym w ogólności) ideałem prawostronnym w algebrze z Przykł. 1 (1). Podobnie podzbiór złożony z macierzy, których ostatnią kolumnę tworzą same 0_R, jest (nieobustronnym w ogólności) ideałem lewostronnym w tejże algebrze.

(2) Zbiór funkcji przyjmujących wartość 0 w ustalonym (dowolnie) punkcie dziedziny jest ideałem (z konieczności obustronnym) w algebrze z Przykł. 1 (4). Ideałem takim jest także

$$C_{\searrow}(\mathbb{R};\mathbb{R}) := \{\ f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}) \quad | \quad \exists_{L>0}\ \forall_{|x|>L}\ :\ f(x) = 0\ \}\,.$$

(3) Jądro homomorfizmu R-algebr jest ideałem obustronnym dziedziny.

(4) Przecięcie wszystkich ideałów lewostronnych (wzgl. prawostronnych, wzgl. obustronnych) zawierających podzbiór $S \subset \mathfrak{A}$ algebry $\mathfrak{A}$ nad pierścieniem R jest ideałem lewostronnym (wzgl. prawostronnym, wzgl. obustronnym), zwanym **ideałem generowanym przez** S,

$$\mathfrak{I}_S \equiv \langle S\rangle_{\mathfrak{A}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{I}\supset S \\ \mathfrak{I}\subset\mathfrak{A}\ \text{ideał}}} \mathfrak{I}\,.$$

Ważnej egzemplifikacji pojęcia algebry prostej dostarcza

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Algebra endomorfizmów $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ jest $\mathbb{K}$-algebrą prostą. W szczególności jest nią algebra macierzowa

$$\mathbb{K}(n) \equiv \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})\,,\quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,.$$

Algebrami prostymi nad ciałem $\mathbb{R}$ są także pierścienie $R(n)$ macierzy kwadratowych wymiaru n o współczynnikach z pierścienia $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Dowód: Załóżmy, że $\mathfrak{I} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest nietrywialnym ideałem obustronnym i wybierzmy zeń dowolny element $\chi_0 \in \mathfrak{I} \setminus \{0\}$, a wtedy istnieje $v_0 \in V$ o własności $\chi_0(v_0) \neq 0_V$, który ustalamy. Wziąwszy dowolną bazę $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$ w przestrzeni V, definiujemy endomorfizmy $\{\chi_i\}_{i\in\overline{1,N}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będące (jedynymi) $\mathbb{K}$-liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\chi_i(e_j) := \delta_{ij}^{\mathbb{K}} \triangleright v_0\,,$$

a następnie – dowolne endomorfizmy $\{\psi_i\}_{i\in\overline{1,N}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ spełniające warunki

$$\psi_i \circ \chi_0(v_0) := e_i\,,$$

co wobec niezerowości $\chi_0(v_0)$ zawsze jest możliwe (wystarczy uzupełnić układ liniowo niezależny $\{\chi_0(v_0)\}$ do bazy V, po czym jej elementom różnym od $\chi_0(v_0)$ przyporządkować wektory bazy e_j, $j \neq i$ i ostatecznie dokonać $\mathbb{K}$-liniowego rozszerzenia tak określonego przyporządkowania). Rozważmy następnie dowolne odwzorowanie $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ o macierzy $(\chi_{ij})_{i,j\in\overline{1,N}}$ względem bazy $\mathcal{E}$, w której obliczamy

$$\begin{aligned}\chi(e_i) &= \chi_{ij} \triangleright e_j = \chi_{ij} \triangleright \psi_j \circ \chi_0(v_0) \equiv \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0\big(\delta_{ki}^{\mathbb{K}} \triangleright v_0\big)\\ &= \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k(e_i)\,,\end{aligned}$$

co pozwala zapisać

$$\chi = \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k\,. \tag{7}$$

Jednakowoż zachodzi

$$\psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \circ \mathfrak{I} \circ \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \subset \mathfrak{I}\,,$$

przeto $\chi \in \mathfrak{I}$, czyli $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \subset \mathfrak{I}$, a ponieważ także $\mathfrak{I} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, zatem ostatecznie $\mathfrak{I} = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

W przypadku $\mathbb{R}$-algebr $R(n)$, $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ dowód opiera się na rozumowaniu identycznym z powyższym, które prowadzimy w odniesieniu do lewego $\mathbb{C}$-modułu $\mathbb{C}^{\times n}$ wzgl. *prawego* $\mathbb{H}$-modułu $\mathbb{H}^{\times n}$ ze standardowym działaniem (współrzędna po współrzędnej). W szczególności odwzorowania

$$\mathbb{H}(n) \ni (\chi_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}} \;:\; \mathbb{H}^{\times n} \circlearrowleft \;:\; (q_i)_{i\in\overline{1,n}} \longmapsto (\chi_{ij} \cdot_{\mathbb{H}} q_j)_{i\in\overline{1,n}}$$

są jawnie $\mathbb{H}$-liniowe względem tak określonego (prawego) działania i jest $\mathbb{H}(n) \equiv \mathrm{End}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{\times n})$. Omówione rozumowanie doprowadza nas ostatecznie do równości (7), która wyraża χ jako kombinację $\mathbb{K}$-liniową elementów ideału $\mathfrak{I}$. Każdy z jej współczynników χ_{ij} jest *rzeczywistą* kombinacją liniową liczb $(1,0),(0,1) \in \mathbb{C}$ wzgl. liczb $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) \in \mathbb{H}$, które działają (punktowo) na endomorfizmy ψ_j przekształcając je w inne elementy tej samej ($\mathbb{R}$-)algebry $\mathbb{K}(n)$ (można o nich myśleć jako o endomorfizmach skalarnych $\lambda \triangleright \mathbf{1}_n$, gdzie $\lambda \in R$ jest jedną z wyróżnionych liczb o normie jednostkowej). Koniec końców mamy zatem do czynienia z *rzeczywistą* kombinacją liniową elementów ideału, czyli z elementem ideału $\mathbb{R}$-algebry. □

O praktycznym znaczeniu pojęcia ideału przekonuje

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ będzie ideałem obustronnym R-algebry $\mathfrak{A}$. Istnieje kanoniczna struktura R-algebry na module ilorazowym $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ indukowana z $\mathfrak{A}$, z mnożeniem

$$m_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} \;:\; \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \times \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \;:\; (a +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}, b +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}) \longmapsto m_{\mathfrak{A}}(a,b) +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}\,.$$

Struktura ta nosi miano **algebry ilorazowej**. Rzut kanoniczny

$$\pi_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} \;:\; \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$$

jest epimorfizmem R-algebr, o jądrze $\mathfrak{I}$. Istnieje zatem wzajem jednoznaczna odpowiedniość między jądrami homomorfizmów R-algebr i ideałami obustronnymi.

Dowód: Oczywisty. □

Scharakteryzujemy następnie podstawowe operacje na rodzinach algebr, poczynając od

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}. \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R^\Lambda$ dla $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$. Istnieje kanoniczna struktura R-algebry na R-module $\mathfrak{A}^\sqcap := \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ zadawana przez odwzorowanie

$$m_{\mathfrak{A}^\sqcap} \;:\; \mathfrak{A}^\sqcap \times \mathfrak{A}^\sqcap \longrightarrow \mathfrak{A}^\sqcap \;:\; (a., b.) \longmapsto a..b. \,,$$

gdzie

$$a..b. \;:\; \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda \;:\; \lambda \longmapsto m_{\mathfrak{A}_\lambda}(a_\lambda, b_\lambda) \in \mathfrak{A}_\lambda$$

oraz kanoniczna struktura R-algebry na R-module $\mathfrak{A}^\oplus := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ zadawana przez odwzorowanie

$$m_{\mathfrak{A}^\oplus} \equiv m_{\mathfrak{A}^\sqcap} \restriction_{\mathfrak{A}^\oplus \times \mathfrak{A}^\oplus} \;:\; \mathfrak{A}^\oplus \times \mathfrak{A}^\oplus \longrightarrow \mathfrak{A}^\oplus \,.$$

Pierwszą z tych struktur określamy mianem **produktu algebr z rodziny** $\mathfrak{A}.$, a drugą – mianem **sumy prostej algebr z rodziny** $\mathfrak{A}.$. Ilekroć elementy $\mathfrak{A}.$ są łączne (wzgl. przemienne, wzgl. unitalne), także $\mathfrak{A}^\sqcap \supset \mathfrak{A}^\oplus$ mają tę własność.

<u>*Dowód:*</u> Trywialny. □

Obecność mnożenia w algebrze pozwala na podniesienie wniosków ze stwierdzenia dotyczącego odpowiedniości pomiędzy rozkładami modułów nad pierścieniem na sumy proste ich podmodułów a zupełnymi rodzinami rzutów komplementarnych na tychże modułach do kategorii algebr poprzez naturalną specjalizację definicji operatora rzutu, którą precyzuje

Definicja 3. Przyjmijmy zapis Def. 1, zakładając przy tym, że $\mathfrak{A}$ jest R-algebrą łączną, oraz Przykł. 1 (11). **Idempotent** to taki jej element $P \in \mathfrak{A}$, który spełnia relację

$$P^2 = P \,.$$

Wyznacza on podalgebrę

$$\mathfrak{A}_P := P.\mathfrak{A}.P \,,$$

zwaną **algebrą P-zredukowaną**. Ilekroć $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}_P = 1$, idempotent P określamy mianem **minimalnego**. **Idempotent centralny** to taki, który należy do centrum algebry $Z(\mathfrak{A})$.

Unipotent to taki element $\Omega \in \mathfrak{A}$ łącznej algebry unitalnej $\mathfrak{A}$, który spełnia relację

$$\Omega^2 = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \,.$$

Nazywamy go **centralnym**, jeśli należy do centrum algebry $Z(\mathfrak{A})$.

Ta pozwala wysłowić pożądane

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 3 oraz Przykł. 1 (11). Dowolny idempotent centralny $P \in Z(\mathfrak{A})$ wyznacza rozkład R-algebry $\mathfrak{A}$ na sumę prostą podalgebr

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_P \oplus \widetilde{\mathfrak{A}}_P \,,$$

w której dopełnienie proste

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_P := \{\; a - P.a.P \quad | \quad a \in \mathfrak{A} \;\} \equiv \{\; a - P.a \quad | \quad a \in \mathfrak{A} \;\}$$

algebry P-zredukowanej $\mathfrak{A}_P$ jest algebrą $(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - P)$-zredukowaną. W szczególności każdy unipotent centralny $\Omega \in Z(\mathfrak{A})$ w algebrze unitalnej $\mathfrak{A}$ nad pierścieniem R, w którym $2_R := 1_R + 1_R$ jest elementem odwracalnym, wyznacza rozkład $\mathfrak{A}$ na sumę prostą podalgebr

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_+ \oplus \mathfrak{A}_- \,,$$

której składniki

$$\mathfrak{A}_\pm := P_\Omega^\pm.\mathfrak{A} \,,$$

zapisane w terminach idempotentów centralnych

$$P_\Omega^+ := 2_R^{-1} \triangleright (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} + \Omega) \,, \qquad\qquad P_\Omega^- := 2_R^{-1} \triangleright (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - \Omega) \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - P_\Omega^+ \,,$$

są tożsame – odpowiednio – z algebrami zredukowanymi

$$\mathfrak{A}_\pm := \mathfrak{A}_{P_\Omega^\pm} \equiv \widetilde{\mathfrak{A}}_{P_\Omega^\mp} \,.$$

Dowód: Idempotent centralny P wyznacza endomorfizm R-algebry

$$\pi_P \;:\; \mathfrak{A}_P \circlearrowleft \;:\; a \longmapsto P.a.P \equiv P.a \equiv a.P\,,$$

który jest rzutem definiującym zupełną rodzinę rzutów komplementarnych $\{\pi_P,\, \mathrm{id}_{\mathfrak{A}} - \pi_P\}$ (będących także endomorfizmami R-algebry), stosuje się tu zatem bezpośrednio wspomniane wyżej stwierdzenie. □

Możemy także prosto opisać szczególną naturę ideałów minimalnych w algebrach prostych, z której przyjdzie nam korzystać niebawem.

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ będzie minimalnym ideałem lewostronnym (wzgl. prawostronnym) w łącznej algebrze $\mathfrak{A}$. Jeśli $\mathfrak{I}.\mathfrak{I} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to istnieje idempotent $P \in \mathfrak{I}$ o własności $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}.P$ (wzgl. $\mathfrak{I} = P.\mathfrak{A}$).

Dowód: Rozważymy przypadek ideału lewostronnego. Przypadek ideału prawostronnego rozpatruje się w pełni analogicznie. Skoro $\mathfrak{I}.\mathfrak{I} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to istnieje $a \in \mathfrak{I}$ o własności $\mathfrak{I}.a \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, a ponieważ $\mathfrak{I}.a \subset \mathfrak{I}$ jako ideał lewostronny algebry $\mathfrak{A}$, przeto koniecznie $\mathfrak{I}.a = \mathfrak{I}$ wobec minimalności $\mathfrak{I}$. To jednak pociąga za sobą istnienie wyróżnionego wektora $P \in \mathfrak{I}$ o własności $P.a = a$, przy czym $P \neq 0_{\mathfrak{A}}$, gdyż $a \neq 0_{\mathfrak{A}}$. Ponadto $(P^2 - P).a = 0_{\mathfrak{A}}$, zatem $P^2 - P \in \{\, b \in \mathfrak{I} \;\mid\; b.a = 0_{\mathfrak{A}} \,\} \equiv \mathfrak{L}_a$, ale $\mathfrak{L}_a$ jest ideałem lewostronnym zawartym w $\mathfrak{I}$ i spełniającym warunek $\mathfrak{L}_a \neq \mathfrak{I}$ (wszak $P \in \mathfrak{I}$, gdy tymczasem $P.a = a \neq 0_{\mathfrak{A}}$), czyli $\mathfrak{L}_a = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to jednak oznacza, że $P^2 = P$. Wreszcie też ponieważ $\mathfrak{A}.P \subset \mathfrak{I}$ jako ideał lewostronny, a przy tym $\mathfrak{A}.P \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ (wszak $\mathfrak{A}.P \ni P.P = P \neq 0_{\mathfrak{A}}$), zatem koniecznie $\mathfrak{A}.P = \mathfrak{I}$ □

W następnej kolejności indukujemy strukturę algebry na iloczynie tensorowym algebr.

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}_\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R$, $\alpha \in \{1,2\}$ dla $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$. Istnieje kanoniczna struktura R-algebry na R-module $\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2$ zadawana przez odwzorowanie

$$m_\otimes = (m_{\mathfrak{A}_1} \otimes m_{\mathfrak{A}_2}) \circ \iota_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2} \;:\; (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \longrightarrow \mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2\,,$$

w którym ι jest superpozycją kanonicznych izomorfizmów R-modułów opisanych w Tw. 3.3 i 3.4,

$$\begin{aligned}\iota_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2} \;:\; (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) &\xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\otimes_R(\mathfrak{A}_1\otimes_R\mathfrak{A}_2)}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R \big(\mathfrak{A}_2 \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)\big)\\ &\xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathfrak{A}_1}\otimes\sigma_{\mathfrak{A}_2,\otimes_R(\mathfrak{A}_1\otimes_R\mathfrak{A}_2)}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R \big((\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R \mathfrak{A}_2\big)\\ &\xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathfrak{A}_1}\otimes\alpha_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\mathfrak{A}_2}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R \big(\mathfrak{A}_1 \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2)\big)\\ &\xrightarrow{\alpha^{-1}_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\mathfrak{A}_2\otimes_R\mathfrak{A}_2}} (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_1) \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2)\,.\end{aligned}$$

Struktura ta nosi miano **standardowego iloczynu tensorowego R-algebr**. Ilekroć obie tensorowane R-algebry są łączne wzgl. przemienne, wzgl. unitalne, ich standardowy iloczyn tensorowy także ma tę cechę.

Dowód: Wystarczy zauważyć, że obrazem pary $a_1 \otimes_R a_2, b_1 \otimes_R b_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2$ względem $m_\otimes$ jest

$$m_\otimes\big((a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R (b_1 \otimes_R b_2)\big) = m_{\mathfrak{A}_1}(a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R b_2)\,. \tag{8}$$

Wszelkie pożądane własności tak zdefiniowanego mnożenia są natychmiastowymi konsekwencjami odnośnych własności $m_{\mathfrak{A}_\alpha}$, $\alpha \in \{1,2\}$. □

Jako corollarium powyższego stwierdzenia otrzymujemy

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R$, a nadto niech $\chi_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$, $\alpha \in \{1,2\}$. Odwzorowanie $\chi_1 \otimes \chi_2$ jest homomorfizmem R-algebr.

Dowód: Wprost z konstrukcji $\chi_1 \otimes \chi_2$ jest homomorfizmem R-modułów. Jego dystrybutywność względem mnożenia $m_\otimes$ jest prostą konsekwencją Równ. (8). □

2. Algebra tensorowa modułu

Abstrakcyjne pojęcie algebr zilustrujemy na przykładzie podstawowej konstrukcji algebraicznej przerzucającej naturalny pomost logiczny między kategorią modułów nad pierścieniem (przemiennym) i algebr nad tym samym pierścieniem. Konstrukcja ta leży u podstaw konstrukcji (pochodzącej od V.A. Focka) przestrzeni stanów kwantowych układu o dowolnej liczbie identycznych obiektów elementarnych (np. cząstek) z przestrzeni stanów kwantowych pojedynczego obiektu, stanowi punkt wyjścia do modelowania tak istotnych fizykalnie struktur jak algebry tensorów symetrycznych i skośnie symetrycznych (istotne w geometrii różniczkowej, więc także w teorii względności), uniwersalne algebry obwiednie (odgrywające ważną rolę w zaawansowanej teorii grup i algebr Liego oraz grup kwantowych, zatem także w opisie symetrii układów fizykalnych), czy wreszcie... algebry Clifforda.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$ oraz $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$. **Algebra tensorowa R-modułu G** to R-algebra utworzona przez R-moduł

$$\bigotimes_R G \coloneqq R \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} G^{\otimes_R n} \equiv \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} G^{\otimes_R N}, \qquad G^{\otimes_R n} \coloneqq \underbrace{G \otimes_R G \otimes_R \cdots \otimes_R G}_{n \text{ razy}},$$

będący sumą prostą **potęg tensorowych modułu** $G^{\otimes_R N}$, wyposażony w mnożenie

$$m \;:\; \bigotimes_R G \otimes_R \bigotimes_R G \longrightarrow \bigotimes_R G,$$

które w ograniczeniu do (przeciwobrazu) iloczynów tensorowych poszczególnych potęg tensorowych G (względem kanonicznych izomorfizmów z Tw. 3.5),

$$\forall_{N_1, N_2 \in \mathbb{N}} \;:\; m_{N_1,N_2} \equiv m\restriction_{G^{\otimes_R N_1} \otimes_R G^{\otimes_R N_2}} \;:\; G^{\otimes_R N_1} \otimes_R G^{\otimes_R N_2} \longrightarrow G^{\otimes_R (N_1+N_2)} \subset \bigotimes_R G,$$

jest określone przez kanoniczne izomorfizmy stanowiące naturalne uogólnienie tych z Tw. 3.4 i Stw. 3.6, przyjmujące na tensorach prostych postać

$$m_{0,N_2}\big(r \otimes_R (g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2})\big) = (r \triangleright g_1) \otimes_R g_2 \otimes_R g_3 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2},$$

$$m_{N_1,0}\big((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1}) \otimes_R r\big) = (r \triangleright g_1) \otimes_R g_2 \otimes_R g_3 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2},$$

oraz

$$m_{n_1,n_2}\big((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1}) \otimes_R (h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2})\big)$$
$$= g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1} \otimes_R h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2}.$$

Jak łatwo widać

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis Def. 4. Algebra tensorowa $\otimes_R G$ jest łączną R-algebrą unitalną, przy czym jednością jest w niej element

$$1_{\otimes_R G} = 1_R \in G^{\otimes_R 0} \subset \bigotimes_R G.$$

Dowód: Wynika wprost z definicji. □

W świetle dyskusji otwierającej Rozdz. 2.2 kojąco na świadomość działa poniższe

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 4. Para $(\bigotimes_R G, \jmath_G)$, w której $\jmath_G : G \rightarrowtail \bigotimes_R G$ jest kanonicznym włożeniem składnika prostego $G \equiv G^{\otimes_R 1}$, jest strukturą inicjalną dla warunku tautologicznego $P_{G;\mathrm{id}_{\mathbf{Mod}_R},F_2} \equiv 1$ na $\mathrm{Ob}\,\mathbf{uAlg}_R \times \mathrm{Mor}\,\mathbf{Mod}_R$, w którego zapisie $F_2 : \mathbf{uAlg}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ jest funktorem zapominania.

<u>*Dowód:*</u> Mamy pokazać, że dla dowolnej R-algebry unitalnej $\mathfrak{A}$ o niepustej klasie $\mathrm{Hom}_R(G,\mathfrak{A}) \ni \varphi$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{uAlg}_R}(\bigotimes_R G, \mathfrak{A})$ o własności wyrażanej przez diagram przemienny (w $\mathbf{Mod}_R$)

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A} \\ G \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\jmath_G"'] & \bigotimes_R G \arrow[u, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd} .$$

Zauważmy najsampierw, że rzeczone odwzorowanie – o ile istnieje – jest jedyne. Istotnie, na mocy definicji mnożenia w $\bigotimes_R G$ dowolny tensor prosty można zapisać w postaci (zastępując symbol mnożenia w algebrze tensorowej symbolem $\cdot$ i korzystając z jego łączności)

$$G^{\otimes_R n} \ni g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n = \jmath_G(g_1) \cdot \jmath_G(g_2) \cdots \jmath_G(g_n)\,,$$

więc $\widetilde{\varphi}$ jako homomorfizm R-algebr ewaluuje się na nim następująco:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) &= \widetilde{\varphi}\big(\jmath_G(g_1) \cdot \jmath_G(g_2) \cdot \cdots \cdot \jmath_G(g_n)\big) \\ &= \widetilde{\varphi} \circ \jmath_G(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi} \circ \jmath_G(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi} \circ \jmath_G(g_n) \\ &= \varphi(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_n)\,, \end{aligned}$$

tj. w sposób jednoznacznie określony przez φ, a nadto dla dowolnego $r \in R \equiv G^{\otimes_R 0}$ zachodzi – wobec R-liniowości i unitalności $\widetilde{\varphi}$ –

$$\widetilde{\varphi}(r) \equiv \widetilde{\varphi}(r \triangleright_R 1_R) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi}(1_R) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} 1_{\mathfrak{A}}\,,$$

tj. znowu w sposób jednoznacznie określony, ponieważ zaś $\bigotimes_R G$ jest rozpięty nad R na tensorach prostych i 1_R, przeto $\widetilde{\varphi}$ jest jednoznacznie zdeterminowany przez swe własności. Pozostaje go skonstruować.

W tym celu skorzystamy z uniwersalności $\otimes_R$ – oto więc każde z odwzorowań (indeksowanych przez liczby $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$$\varphi_n \;:\; G^{\times n} \longrightarrow \mathfrak{A} \;:\; (g_1, g_2, \ldots, g_n) \longmapsto \varphi(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_n)$$

jest jawnie wielo-śród-R-liniowe, a zatem odpowiada mu (jedyne) odwzorowanie R-liniowe

$$\widetilde{\varphi}_n \;:\; G^{\otimes_R n} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

o własności

$$\forall_{g_1, g_2, \cdots, g_n \in G} \;:\; \widetilde{\varphi}_n(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) = \varphi_n(g_1, g_2, \ldots, g_n)\,.$$

Uzupełniwszy rodzinę odwzorowań $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ o element

$$\widetilde{\varphi}_0 \;:\; G^{\otimes_R 0} \equiv R \longrightarrow \mathfrak{A} \;:\; r \longmapsto r \triangleright_{\mathfrak{A}} 1_{\mathfrak{A}}\,,$$

otrzymujemy pożądane odwzorowanie (R-liniowe wprost z definicji)

$$\widetilde{\varphi} := \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} \widetilde{\varphi}_N \;:\; \bigotimes_R G \longrightarrow \mathfrak{A}\,,$$

o czym przekonują proste obserwacje:

$$\widetilde{\varphi} \circ \jmath_G = \widetilde{\varphi}_1 \equiv \varphi\,, \qquad \widetilde{\varphi}(1_{\otimes_R G}) \equiv \widetilde{\varphi}(1_R) = \widetilde{\varphi}_0(1_R) = 1_{\mathfrak{A}}$$

oraz – dla dowolnych $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $g_1, g_2, \ldots, g_{n_1}, h_1, h_2, \ldots, h_{n_2} \in G$ –

$$\widetilde{\varphi}\big((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{n_1}) \cdot (h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2})\big)$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \widetilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{n_1} \otimes_R h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2}) \\
&= \varphi_{n_1+n_2}(g_1, g_2, \ldots, g_{n_1}, h_1, h_2, \ldots, h_{n_2}) \\
&\equiv \varphi_{n_1}(g_1, g_2, \ldots, g_{n_1}) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi_{n_2}(h_1, h_2, \ldots, h_{n_2}) \\
&= \widetilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{n_1}) \cdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{\varphi}(h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2}) .
\end{aligned}
$$

□

Niniejszą elementarną dyskusję algebry tensorowej modułu najzgrabniej uzupełnia i podsumowuje

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 4. Przyporządkowanie

$$\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{uAssAlg}_R \;:\; G \longmapsto \bigotimes\nolimits_R G$$

rozszerza się kanonicznie do pełnego funktora kowariantnego

$$\bigotimes_R \;:\; \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{uAssAlg}_R .$$

<u>*Dowód:*</u> Wystarczy zauważyć, że dla $G_1, G_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ dowolny $\chi \in \mathrm{Hom}_R(G_1, G_2)$ określa odwzorowanie R-liniowe

$$\jmath_{G_2} \circ \chi \;:\; G_1 \longrightarrow \bigotimes\nolimits_R G_2 ,$$

które jednoznacznie rozszerza się do homomorfizmu algebr

$$\bigotimes_R \chi \;:\; \bigotimes\nolimits_R G_1 \longrightarrow \bigotimes\nolimits_R G_2$$

o własności

$$\bigotimes_R \chi \circ \jmath_{G_1} = \jmath_{G_2} \circ \chi ,$$

którą możemy zapisać w postaci diagramu przemiennego

$$
\begin{tikzcd}
\otimes_R G_1 \arrow[r, "\otimes_R \chi"] & \otimes_R G_2 \\
G_1 \arrow[u, "\jmath_{G_1}"] \arrow[r, "\chi"'] & G_2 \arrow[u, "\jmath_{G_2}"']
\end{tikzcd} .
$$

Przy tym na tensorach prostych

$$\bigotimes_R \chi(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) = \chi(g_1) \otimes_R \chi(g_2) \otimes_R \cdots \otimes_R \chi(g_n) .$$

□

3. Algebry z gradacją

Przejdziemy następnie od omówienia algebr z wyróżnionym rozkładem na sumy proste podmodułów, uzgodnionym w naturalny sposób z operacjami określonymi na algebrze. Oto więc mamy

Definicja 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbRing}$ oraz $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R$. Niech też $(\Delta, +_\Delta, \bullet \longrightarrow 0_\Delta)$ będzie monoidem przemiennym. **Δ-gradacja na** $\mathfrak{A}$ to rozkład $\mathfrak{A}$ na sumę prostą podmodułów (nad R)

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{A}_\delta$$

o własności

$$\forall_{\delta_1,\delta_2\in\Delta}\ :\ m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_{\delta_1},\mathfrak{A}_{\delta_2})\subset\mathfrak{A}_{\delta_1+_\Delta\delta_2}\,. \tag{9}$$

Algebra (nad R) z Δ-gradacją to taka, na której jest określona Δ-gradacja. Element $\delta\in\Delta$ określamy mianem **Δ-stopnia podmodułu** $\mathfrak{A}_\delta$, używając oznaczenia

$$\mathfrak{A}_\delta=\deg^{-1}\big(\{\delta\}\big)\,,$$

elementy zaś podmodułu $\mathfrak{A}_\delta$ nazywamy **elementami jednorodnymi stopnia** δ. W szczególności element $0_{\mathfrak{A}}$ jest jednorodny *dowolnego* stopnia.

Podalgebra Δ-gradowana algebry z Δ-gradacją $\mathfrak{A}$ to taka jej podalgebra $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$, która jest **podmodułem z Δ-gradacją**, tj. ma postać

$$\mathfrak{B}=\bigoplus_{\delta\in\Delta}\mathfrak{B}_\delta\,,\qquad\mathfrak{B}_\delta=\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_\delta\,.$$

W szczególności **ideał Δ-gradowany** to podalgebra Δ-gradowana $\mathfrak{I}=\bigoplus_{\delta\in\Delta}\mathfrak{I}_\delta\subset\mathfrak{A}$ o własności (zapisanej dla dowolnych $\lambda,\delta\in\Delta$)

- $m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_\lambda,\mathfrak{I}_\delta)\subset\mathfrak{I}_{\lambda+_\Delta\delta}$ (**lewostronny**), wzgl.
- $m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}_\delta,\mathfrak{A}_\lambda)\subset\mathfrak{I}_{\lambda+_\Delta\delta}$ (**prawostronny**), wzgl.
- obu powyższych (**obustronny**).

Homomorfizm stopnia D R-algebry z Δ-gradacją $\mathfrak{A}^{(1)}$ w R-algebrę z Δ-gradacją $\mathfrak{A}^{(2)}$ to odwzorowanie $\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R}(\mathfrak{A}^{(1)},\mathfrak{A}^{(2)})$ o własności

$$\forall_{\delta\in\Delta}\ :\ \chi(\mathfrak{A}^{(1)}_\delta)\subset\mathfrak{A}^{(2)}_{\delta+_\Delta D}\,.$$

Homomorfizm algebr z Δ-gradacją (albo inaczej Δ-gradowany) to dowolny ich homomorfizm stopnia 0_Δ.

Algebry nad R z Δ-gradacją (i odnośnymi homomorfizmami stopnia 0_Δ) tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}$.

Uwaga 2. Powód, dla którego na homomorfizmy algebr z Δ-gradacją nakładamy dodatkowy warunek $D=0_\Delta$, ilustruje prosty argument: oto z jednej strony

$$\chi\circ m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1},\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_2})\subset\chi(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1+_\Delta\delta_2})\subset\mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_1+_\Delta\delta_2+_\Delta D}\,,$$

a z drugiej

$$\begin{aligned}\chi\circ m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1},\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_2}) &= m_{\mathfrak{A}^{(2)}}\big(\chi(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1}),\chi(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_2})\big)\subset m_{\mathfrak{A}^{(2)}}\big(\mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_1+_\Delta D},\mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2+_\Delta D}\big)\\ &\subset \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_1+_\Delta\delta_2+_\Delta D+_\Delta D}\,.\end{aligned}$$

Przykłady 3.

(1) Pierścień wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ niesie naturalną strukturę algebry (przemiennej, unitalnej) nad $\mathbb{K}$ o $\mathbb{N}$-gradacji zadawanej przez stopień wielomianu (wielomian zerowy jest w tym ujęciu elementem każdego stopnia), przy czym składową jednorodną stopnia n tworzą jednomiany stopnia n (w tym wielomian zerowy). Operator całkowania $\int_{0_{\mathbb{K}}}^t$ (zdefiniowany w oczywisty sposób) jest endomorfizmem stopnia 1.

(2) Zastępując ciało $\mathbb{R}$ ciałem $\mathbb{C}$ (w roli dziedziny i przeciwdziedziny funkcji) i kładąc $S\equiv\mathbb{C}$ w Przykł. 1 otrzymujemy unitalną $\mathbb{C}$-algebrę przemienną $C(\mathbb{C};\mathbb{C})$. Wybór dowolnego elementu $\omega_n\in\sqrt[n]{1}\setminus\{1\}$ (dla dowolnego $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$) określa na $C(\mathbb{C};\mathbb{C})$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-gradację, względem której elementami jednorodnymi stopnia $[k]_n$ są funkcje f_k spełniające warunek

$$\forall_{z\in\mathbb{C}}\ :\ f_k(\omega_n\cdot z)=\omega_n^k\cdot f_k(z)\,.$$

Dowolna funkcja $f\in C(\mathbb{C};\mathbb{C})$ ma (jednoznaczny) rozkład

$$f=\sum_{k=0}^{n-1}f_k\,,\qquad\qquad f_k\ :\ \mathbb{C}\circlearrowleft\ :\ z\longmapsto\tfrac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\omega_n^{-kl}\cdot f(\omega_n^l\cdot z)\,.$$

W szczególności dla $n = 2$ otrzymujemy w ten sposób rozkład $C(\mathbb{C};\mathbb{C})$ na sumę prostą podmodułów złożonych z funkcji parzystych i nieparzystych, odpowiednio.

Jeśli funkcje ciągłe zastąpić gładkimi, to operator różniczkowania zyskuje interpretację endomorfizmu stopnia $[n-1]_n$.

(3) Algebra tensorowa modułu G nad pierścieniem przemiennym R jest R-algebrą z $\mathbb{N}$-gradacją określoną wprost przez definicję tejże algebry,

$$\deg\restriction_{G^{\otimes_R n}} = n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Elementy składowej jednorodnej $G^{\otimes_R N}$ określamy mianem **tensorów stopnia** n.

Jako proste konsekwencje powyższej definicji otrzymujemy

Stwierdzenie 11. Przyjmijmy zapis Def. 5, przy czym założymy, że wszystkie elementy monoidu Δ są upraszczalne, tj.

$$\forall_{\delta\in\Delta}\ \forall_{\delta_1,\delta_2\in\Delta}\ :\ \big(\ \delta +_\Delta \delta_1 = \delta +_\Delta \delta_2 \quad\Longrightarrow\quad \delta_1 = \delta_2\ \big)\,.$$

W unitalnej R-algebrze z Δ-gradacją

(i) $\deg(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = 0_\Delta$;

(ii) odwrotność a^{-1} dowolnego elementu $a \in \mathfrak{A}_\delta$ (wzgl. $m_{\mathfrak{A}}$), o ile istnieje, ma stopień $\deg(a^{-1}) = -\delta$, gdzie $-\delta$ jest elementem monoidu spełniającym równość $-\delta +_\Delta \delta = 0_\Delta$,

<u>*Dowód:*</u>

Ad (i) Niechaj $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \sum_{\delta\in\Delta} e_\delta$ będzie rozkładem jedności na elementy jednorodne. Wówczas dla dowolnego elementu jednorodnego $a \in \mathfrak{A}_\lambda$ otrzymujemy tożsamość

$$a = a \cdot_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \equiv \sum_{\delta\in\Delta} a \cdot_{\mathfrak{A}} e_\delta\,,$$

która wobec jednoznaczności rozkładu na elementy jednorodne i Równ. (9) implikuje równość

$$a = a \cdot_{\mathfrak{A}} e_{0_\Delta}\,.$$

Ta, będąc spełnioną dla dowolnego elementu jednorodnego, jest z racji R-liniowości mnożenia spełniana przez wszystkie elementy algebry, a zatem w szczególności przez jedność, co wobec neutralności tej ostatniej daje pożądaną równość

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot_{\mathfrak{A}} e_{0_\Delta} = e_{0_\Delta} \in \mathfrak{A}_{0_\Delta}\,.$$

Ad (ii) Niechaj $a^{-1} = \sum_{\lambda\in\Delta} \alpha_\lambda$ będzie rozkładem na elementy jednorodne, a wtedy na mocy poprzednio udowodnionego podpunktu i jednoznaczności rozkładu oraz Równ. (9)

$$\mathfrak{A}_{0_\Delta} \ni \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = a \cdot_{\mathfrak{A}} a^{-1} \equiv \sum_{\lambda\in\Delta} a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_\lambda = a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta}\,,$$

a stąd już

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} (a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta}) \equiv (a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta} = \alpha_{-\delta} \in \mathfrak{A}_{-\delta}\,.$$

□

Ilekroć monoid Δ zadający gradację algebry zawiera elementy, które nie są upraszczalne, teza Stw. 11 nie musi być spełniona. Naturalność wymienionych w niej warunków skłania do uzupełnienia Def. 5 o

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 5. **Algebra unitalna (nad** R**) z** Δ**-gradacją** to algebra unitalna $\mathfrak{A}$, na której jest określona Δ-gradacja o własności $\deg(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = 0_\Delta$. Algebry unitalne nad R z Δ-gradacją (i odnośnymi homomorfizmami stopnia 0_Δ) tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{uAlg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}$.

Odnotujmy jeszcze, że konstrukcja ilorazowa przenosi się do kategorii z gradacją w naturalny sposób.

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy zapis Stw. 4 oraz Def. 5 i niechaj $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$ będzie obustronnym ideałem Δ-gradowanym R-algebry z Δ-gradacją $\mathfrak{A}$. Algebra ilorazowa $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ dziedziczy z $\mathfrak{A}$ kanoniczną Δ-gradację, względem której rzut kanoniczny

$$\pi_{\mathfrak{A}/\mathfrak{J}} \;:\; \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$$

jest homomorfizmem algebr z Δ-gradacją.

<u>*Dowód:*</u> Trywialny. □

Mamy też, nie mniej oczywiste,

Twierdzenie 3 (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie (dla algebr z gradacją))**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}$ oraz $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$. Wówczas $\mathrm{Ker}\,\chi \subset \mathfrak{A}_1$ jest obustronnym ideałem Δ-gradowanym, natomiast $\mathrm{Im}\,\chi \subset \mathfrak{A}_2$ jest podalgebrą Δ-gradowaną. Kanoniczny izomorfizm R-modułów

$$\mathfrak{A}/\mathrm{Ker}\,\chi \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}\,\chi$$

jest izomorfizmem algebr z Δ-gradacją.

<u>*Dowód:*</u> Oczywisty. □

Na zakończenie części poświęconej algebrom z gradacją uzgodnimy konstrukcję iloczynu tensorowego z gradacją (tensorowanych algebr). Przy tym, miast rozpatrywać ogólną teorię iloczynu na module tensorowym (uwzględniającą struktury odmienne od tej wskazanej w Stw. 8), wyłożoną w Ref. [Bou07], skupimy się na dwóch szczególnych przypadkach, które napotkamy w dalszej części kursu poświęconej algebrom Clifforda. W pierwszej kolejności wysłowimy oczekiwane

Stwierdzenie 13. Przyjmijmy zapis Stw. 8 oraz Def. 5 i niechaj $\mathfrak{A}^{(A)} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}},\ A \in \{1,2\}$. Standardowy iloczyn tensorowy R-algebr $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ niesie naturalną strukturę R-algebry z Δ-gradacją określaną przez kanoniczny izomorfizm R-algebr

$$\imath \;:\; \mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\delta \in \Delta} \bigoplus_{\substack{\delta_1, \delta_2 \in \Delta \\ \delta_1 +_\Delta \delta_2 = \delta}} \big(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2}\big)\,,$$

patrz: Tw. 3.5, tj. składowa jednorodna Δ-stopnia δ jest przeciwobrazem względem tegoż izomorfizmu składnika prostego o indeksie δ,

$$\big(\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}\big)_\delta = \imath^{-1}\Big(\bigoplus_{\substack{\delta_1, \delta_2 \in \Delta \\ \delta_1 +_\Delta \delta_2 = \delta}} \big(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2}\big)\Big)\,.$$

Tak określona Δ-gradacja nosi miano **Δ-gradacji totalnej**.

<u>*Dowód:*</u> Oczywisty. □

W szczególnym przypadku $\Delta \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ istnieje istotna alternatywa dla standardowej struktury algebry na iloczynie tensorowym algebr z Δ-gradacją. Opisuje ją

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Stw. 8 oraz Def. 5 i niechaj $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alg}_R^{\Delta-\mathrm{grad}}$ dla $\Delta \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ (ze standardową strukturą pierścienia). **Skośny iloczyn tensorowy R-algebr z Δ-gradacją** (zwany także **super-iloczynem tensorowy R-algebr z Δ-gradacją**) to iloczyn tensorowy odnośnych R-modułów wyposażony w mnożenie

$$m_{\widehat{\otimes}} \equiv \widehat{\cdot} \;:\; \big(\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}\big) \otimes_R \big(\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}\big) \longrightarrow \mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}\,,$$

które na jednorodnych składowych w $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ będących przeciwobrazami (sum) R-modułów $\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2}$ względem izomorfizmu $\imath$ ze Stw. 13 przyjmuje postać

$$m_{\widehat{\otimes}} \restriction_{\imath^{-1}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2})} := (-1)^{\delta_1 \cdot_\Delta \delta_2}\, m_{\otimes} \restriction_{\imath^{-1}(\mathfrak{A}^{(1)}_{\delta_1} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}_{\delta_2})}\,.$$

Tak określoną R-algebrę (z Δ-gradacją) o nośniku $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ oznaczamy symbolem

$$\mathfrak{A}^{(1)} \widehat{\otimes}_R \mathfrak{A}^{(2)} .$$

Jak łatwo widać,

Stwierdzenie 14. Przyjmijmy zapis Def. 7. Ilekroć obie tensorowane R-algebry są łączne wzgl. unitalne (w rozumieniu Def. 6), ich skośny iloczyn tensorowy także ma tę cechę.

<u>*Dowód:*</u> O słuszności tezy przekonuje nas prosty rachunek, wykonany dla dowolnych $(a_\alpha, b_\alpha) \in \mathfrak{A}_{1\,\lambda_\alpha} \times \mathfrak{A}_{2\,\mu_\alpha}$, $\alpha \in \{1,2,3\}$,

$$m_{\widehat{\otimes}}\big(m_{\widehat{\otimes}}\big((a_1 \otimes_R b_1) \otimes_R (a_2 \otimes_R b_2)\big) \otimes_R (a_3 \otimes_R b_3)\big) = (-1)^{\mu_1 \cdot_\Delta \lambda_2 +_\Delta (\mu_1 +_\Delta \mu_2) \cdot_\Delta \lambda_3}$$

$$\cdot m_{\mathfrak{A}_1}\big(m_{\mathfrak{A}_1}(a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R a_3\big) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}\big(m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R b_2) \otimes_R b_3\big) ,$$

$$m_{\widehat{\otimes}}\big((a_1 \otimes_R b_1) \otimes_R m_{\widehat{\otimes}}\big((a_2 \otimes_R b_2) \otimes_R (a_3 \otimes_R b_3)\big)\big) = (-1)^{\mu_2 \cdot_\Delta \lambda_3 +_\Delta \mu_1 \cdot_\Delta (\lambda_2 +_\Delta \lambda_3)}$$

$$\cdot m_{\mathfrak{A}^{(1)}}\big(a_1 \otimes_R m_{\mathfrak{A}_1}(a_2 \otimes_R a_3)\big) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}\big(b_1 \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_2 \otimes_R b_3)\big) ,$$

w którym

$$(-1)^{\mu_1 \cdot_\Delta \lambda_2 +_\Delta (\mu_1 +_\Delta \mu_2) \cdot_\Delta \lambda_3} = (-1)^{\mu_2 \cdot_\Delta \lambda_3 +_\Delta \mu_1 \cdot_\Delta (\lambda_2 +_\Delta \lambda_3)} ,$$

oraz teza (i) Stw. 11, która gwarantuje neutralność $1_{\mathfrak{A}_1} \otimes_R 1_{\mathfrak{A}_2} \in \big(\mathfrak{A}_1 \widehat{\otimes}_R \mathfrak{A}_2\big)_{0_\Delta}$ w przypadku algebr unitalnych. $\square$

References

[Bou07] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Algèbre, chapitre 9*, Springer, 2007.