METODY ALGEBRY WYŻSZEJ W FIZYCE I W CZASACH ZARAZY
3. WYKŁAD ZDALNY

Narzędzia formalne pozyskane ma poprzednim wykładzie pozwalają nam wprowadzić nową, *wielo*liniową strukturę algebraiczną, o fundamentalnym znaczeniu dla konstrukcji algebr Clifforda i ich modułów, więc obiektów, których dyskusji jest poświęcony niniejszy cykl wykładów. Strukturę tę definiujemy i badamy poniżej.

1. Iloczyn tensorowy modułów nad pierścieniem jako obiekt uniwersalny

Zaczynamy od wprowadzającej

Definicja 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i ustalmy $R \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Ring}$. Niechaj $G_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}}$, $G_2 \in \mathbf{Mod}_R$ oraz $H \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i niech $\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H$ będzie **dwu-$\mathbb{Z}$-liniowe** (czyli dwu-addytywne), tj.

$$\forall_{g_1,g_2 \in G_1}\ \forall_{g_3 \in G_2}\ :\ \varphi(g_1 +_1 g_2, g_3) = \varphi(g_1, g_3) +_H \varphi(g_2, g_3)\,,$$

$$\forall_{h_1 \in G_1}\ \forall_{h_2,h_3 \in G_2}\ :\ \varphi(h_1, h_2 +_2 h_3) = \varphi(h_1, h_2) +_H \varphi(h_1, h_3)\,.$$

Odwzorowanie φ nazywamy **śród-R-liniowym**, jeśli spełnia dodatkowy warunek **śród-R-jednorodności**

$$\forall_{(r,g_1,g_2) \in R \times G_1 \times G_2}\ :\ \varphi(g_1 \triangleleft r, g_2) = \varphi(g_1, r \triangleright g_2)\,.$$

Odwzorowania śród-R-liniowe dla ustalonej pary (G_1, G_2) tworzą kategorię ${}^{G_1}L^{G_2}$, której obiektami są pary (H, φ) złożone z $H \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania śród-R-liniowego $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(G_1 \times G_2, H)$, morfizmami zaś – dla ustalonych obiektów $(H_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$, utworzonych przez $H_\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania śród-R-liniowe $\varphi_\alpha\ :\ G_1 \times G_2 \longrightarrow H_\alpha$ – odwzorowania

$$\mathrm{Hom}_{{}^{G_1}L^{G_2}}\big((H_1, \varphi_1), (H_2, \varphi_2)\big) = \big\{\ \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(H_1, H_2)\quad |\quad \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1\ \big\}\,.$$

Przykłady 1. Fundamentalnym przykładem odwzorowania śród-R-liniowego jest mnożenie w pierścieniu R, przy czym R traktujemy tutaj jako kanoniczny lewy (${}_R R$) i prawy (R_R) R-moduł.

Możemy już teraz wprowadzić obiekt podstawowy naszych rozważań:

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. **Iloczyn tensorowy nad** R prawego R-modułu G_1 i lewego R-modułu G_2 to struktura inicjalna

$$(G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R)$$

dla warunku

$$P_{(G_1,G_2);F_1,F_2}(H, \varphi) \equiv \text{„}\varphi\ :\ G_1 \times G_2 \longrightarrow H \text{ jest odwzorowaniem śród-}R\text{-liniowym”}\,,$$

w którego zapisie $F_1\ :\ \mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem przyporządkowującym parze modułów (wzgl. odwzorowań R-liniowych) iloczyn kartezjański ich nośników (wzgl. tychże odwzorowań), a $F_2\ :\ \mathbf{AbGrp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem zapominania przyporządkowującym grupie przemiennej (wzgl. homomorfizmowi między takimi grupami) jej nośnik (wzgl. to samo odwzorowanie traktowane jako odwzorowanie między zbiorami).

Uwaga 1. Dokonajmy elementarnej egzegezy powyższej definicji, aby uniknąć onieśmielającego uczucia wysokościowego *vertigo.* Oto więc iloczyn tensorowy R-modułów G_1 i G_2 to – w istocie – para $(G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R)$ złożona z grupy przemiennej $G_1 \otimes_R G_2$ oraz odwzorowania śród-R-liniowego $\otimes_R : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2$, zwanego **kanonicznym odwzorowaniem śród-R-liniowym**, o tej własności, że dla każdej grupy przemiennej H i każdego odwzorowania śród-R-liniowego φ :

$G_1 \times G_2 \longrightarrow H$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup przemiennych $\widetilde{\varphi} : G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow H$, który czyni przemiennym diagram

(1)
$$\begin{tikzcd}
 & & H & (H,\varphi) \arrow[l, mapsto, "F_2"'] \\
(G_1,G_2) \arrow[r, mapsto, "F_1"'] & G_1 \times G_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\otimes_R"'] & G_1 \otimes_R G_2 \arrow[u, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & (G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R) \arrow[l, mapsto, "F_2"] \arrow[u, dashed, "\widetilde{\varphi}"']
\end{tikzcd} ,$$

czyli – mówiąc po ludzku – spełnia tożsamość

(2) $$\forall_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \ : \ \widetilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2) = \varphi(g_1,g_2)\,,$$

gdzie wprowadziliśmy standardowe oznaczenie

(3) $$\otimes_R(g_1,g_2) \equiv g_1 \otimes_R g_2\,.$$

Mamy wielce uspokajające

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2. Dla dowolnego pierścienia R i dowolnych $G_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\rm op}}$, $G_2 \in \mathbf{Mod}_R$ iloczyn tensorowy $(G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R)$ istnieje i jest określony jednoznacznie z dokładnością do jedynego izomorfizmu grup przemiennych.

Dowód: Wprost z definicji iloczynu tensorowego jako morfizmu uniwersalnego wynika – w świetle Tw. 2.2 – druga część dowodzonego twierdzenia. Pozostaje zatem wykazać jego istnienie, co czynimy w sposób bezpośredni (konstruktywny). Utwórzmy wolny $\mathbb{Z}$-moduł $\langle G_1 \times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ (czyli grupę przemienną) nad *zbiorem*[1] $G_1 \times G_2$. Moduł ten zawiera $\mathbb{Z}$-podmoduł

$$\begin{aligned}
T \quad := \quad & \big\langle \{(g_1 +_1 g_2, g_3) - (g_1,g_3) - (g_2,g_3)\}_{g_1,g_2\in G_1,\, g_3\in G_2} \\
& \cup \{(h_1, h_2 +_2 h_3) - (h_1,h_2) - (h_1,h_3)\}_{h_1\in G_1,\, h_2,h_3\in G_2} \\
& \cup \{(k_1 \triangleleft_1 r, k_2) - (k_1, r \triangleright_2 k_2)\}_{k_1\in G_1,\, k_2\in G_2,\, r\in R}\big\rangle_{\mathbb{Z}}\,,
\end{aligned}$$

który wobec przemienności grupy $\langle G_1 \times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ definiuje $\mathbb{Z}$-moduł ilorazowy (czyli grupę ilorazową). Postulujemy

(4) $$G_1 \otimes_R G_2 := \langle G_1 \times G_2\rangle_{\mathbb{Z}} / T\,,$$

a ponieważ zbiór $G_1 \times G_2$ zanurza się kanonicznie w $\langle G_1 \times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ (jako *zbiór*) wedle schematu

(5) $$\widetilde{\jmath}_{G_1\times G_2} \ : \ G_1 \times G_2 \rightarrowtail \langle G_1 \times G_2\rangle_{\mathbb{Z}} \ : \ (g_1,g_2) \longmapsto \delta_{(g_1,g_2)}\,,$$

wykorzystującego bazę $\{\delta_{(g_1,g_2)}\}_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}$ złożoną z odwzorowań

$$\delta_{(g_1,g_2)} \ : \ G_1 \times G_2 \longrightarrow R \ : \ (h_1,h_2) \longmapsto \begin{cases} 1_R & \text{dla } (h_1,h_2) = (g_1,g_2) \\ 0_R & \text{dla } (h_1,h_2) \neq (g_1,g_2) \end{cases} ,$$

przeto możemy też zdefiniować

(6) $$\begin{aligned}
\otimes_R := \pi_{\langle G_1\times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}/T} \circ \widetilde{\jmath}_{G_1\times G_2} \quad & : \quad G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2 \\
& : \quad (g_1,g_2) \longmapsto \delta_{(g_1,g_2)} + T\,,
\end{aligned}$$

używając rzutu kanonicznego *modulo* T.

Zaczniemy od sprawdzenia śród-R-liniowości zdefiniowanego powyżej odwzorowania $\otimes_R$, licząc dla dowolnych $g_1, g_2 \in G_1$, $g_3, g_4 \in G_2$ i $r \in R$, co następuje:

$$\begin{aligned}
(g_1 +_1 g_2) \otimes_R g_3 \quad & \equiv \quad \delta_{(g_1+_1 g_2, g_3)} + T \\
& = \quad \delta_{(g_1,g_3)} + \delta_{(g_2,g_3)} + \big(\delta_{(g_1+_1 g_2,g_3)} - \delta_{(g_1,g_3)} - \delta_{(g_2,g_3)}\big) + T
\end{aligned}$$

[1] Podkreślmy: *nie* chodzi tutaj o grupę przemienną $G_1 \times G_2$, lecz o „goły” zbiór.

$$
\begin{aligned}
& \equiv \delta_{(g_1,g_3)} + \delta_{(g_2,g_3)} + T = \big(\delta_{(g_1,g_3)} + T\big) + \big(\delta_{(g_2,g_3)} + T\big) \\
& \equiv g_1 \otimes_R g_3 + g_2 \otimes_R g_3 \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_1 \otimes_R (g_3 +_2 g_4) & \equiv \delta_{(g_1,g_3+_2 g_4)} + T \\
& = \delta_{(g_1,g_3)} + \delta_{(g_1,g_4)} + \big(\delta_{(g_1,g_3+_2 g_4)} - \delta_{(g_1,g_3)} - \delta_{(g_1,g_4)}\big) + T \\
& \equiv \delta_{(g_1,g_3)} + \delta_{(g_1,g_4)} + T = \big(\delta_{(g_1,g_3)} + T\big) + \big(\delta_{(g_1,g_4)} + T\big) \\
& \equiv g_1 \otimes_R g_3 + g_1 \otimes_R g_4 \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_1 \triangleleft_1 r \otimes_R g_2 & \equiv \delta_{(g_1 \triangleleft_1 r, g_2)} + T = \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)} + \big(\delta_{(g_1 \triangleleft_1 r, g_2)} - \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)}\big) + T \\
& = \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)} + T \equiv g_1 \otimes_R r \triangleright_2 g_2 \,.
\end{aligned}
$$

W następnej kolejności wykażemy istnienie i jednoznaczność odwzorowania $\widetilde{\varphi}$, o którym mowa w Uwadze 1. W tym celu wykorzystamy bazowość układu $\{\delta_{(g_1,g_2)}\}_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}$ w $\langle G_1 \times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}$, jak też i to, że odwzorowanie $\pi_{\langle G_1\times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}/T}$ jest epimorfizmem, zatem definiująca tożsamość (2) ustala obraz względem odwzorowania $\widetilde{\varphi}$ układu generującego dziedziny tego odwzorowania. Jest zatem jasne, że istnieje co najwyżej jedno $\mathbb{Z}$-liniowe rozszerzenie tak zadanego (na układzie generującym) odwzorowania. Rozszerzenie to przyjmuje następującą postać: wobec surjektywności rzutu kanonicznego *modulo* T każdy element $\tau \in G_1 \otimes_R G_2$ możemy przedstawić w formie $\tau = \nu + T$ dla pewnej funkcji $\nu \in \mathbb{Z}^{G_1\times G_2}$ o ograniczonym nośniku (więc przyjmującej wartości różne od $0_{\mathbb{Z}}$ dla skończonej liczby argumentów – zbiór takich funkcji będziemy oznaczać symbolem $\mathscr{R}_0(\mathbb{Z}; G_1 \times G_2)$), skoro zaś układ $\{\delta_{(g_1,g_2)}\}_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}$ jest bazą $\langle G_1 \times G_2\rangle_{\mathbb{Z}}$, to możemy rozłożyć $\nu = \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} n_{(g_1,g_2)} \triangleright \delta_{(g_1,g_2)}$, przy czym – jak łatwo widać – $n_{(g_1,g_2)} \equiv \nu(g_1,g_2)$, ostatecznie więc najbardziej ogólna postać elementu modułu $G_1 \otimes_R G_2$ to

$$
\begin{aligned}
\tau & = \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \delta_{(g_1,g_2)} + T \\
& = \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(\delta_{(g_1,g_2)} + T\big) + T \\
& \equiv \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) + T \\
& \equiv \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \widetilde{\nu}(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

(gdzie w ostatnim kroku dokonaliśmy banalnego przesunięcia $\nu \longmapsto \nu + \delta_{(0_{(1)},0_{(2)})} =: \widetilde{\nu}$), a ponieważ $\widetilde{\varphi}$ jest z założenia homomorfizmem grup przemiennych, przeto

$$
\widetilde{\varphi}(\tau) = \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \widetilde{\nu}(g_1,g_2) \triangleright_H \widetilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2)\,,
$$

co daje antycypowany jednoznaczny wynik ostateczny

$$
\widetilde{\varphi}(\tau) = \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \widetilde{\nu}(g_1,g_2) \triangleright_H \varphi(g_1,g_2)\,.
$$

Innymi słowy, określenie postaci przyjmowanej przez $\widetilde{\varphi}$ na układzie generującym $G_1 \otimes_R G_2$ złożonym z tensorów prostych, w sposób zdeterminowany przez samą definicję obiektu inicjalnego, jednoznacznie podpowiada postać (jedynego) rozszerzenia $\mathbb{Z}$-liniowego tego odwzorowania do całego modułu tensorowego. □

Mając na względzie przyszłą wygodę dowodzenia, podamy obecnie równoważną definicję iloczynu tensorowego modułów uwzględniającą powyższe rozumowanie, a to w formie

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2. Niechaj $(T,\tau) \in \mathrm{Ob}\,{}^{G_1}L_2^{G}$. Poniższe zdania logiczne są równoważne.

(i) (T,τ) jest iloczynem tensorowym modułów G_1 i G_2 nad R.

(ii) Grupa T jest generowana (nad $\mathbb{Z}$) przez elementy postaci $\tau(g_1,g_2)$, $(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2$, tj.

$$T = \langle \tau(G_1 \times G_2) \rangle_{\mathbb{Z}} \,, \tag{8}$$

a ponadto dla każdej pary $(H,\varphi) \in \mathrm{Ob}\,{}^{G_1}L^{G_2}$ jest określone odwzorowanie $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{{}^{G_1}L^{G_2}}\big((T,\tau),(H,\varphi)\big)$, tj. takie, które czyni przemiennym diagram

$$\begin{tikzcd} & H \\ G_1 \times G_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\tau"'] & T \arrow[u, "\widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd} \,. \tag{9}$$

<u>*Dowód:*</u>

(i)⇒(ii) Prawdziwość zdania (i) implikuje istnienie (jedynego) odwzorowania $\widetilde{\varphi}$ wprost na mocy uniwersalności iloczynu tensorowego. Niechaj

$$T_\tau := \langle \tau(G_1 \times G_2) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

będzie podgrupą generowaną przez elementy $\tau(g_1,g_2)$, $(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2$, kanonicznie zanurzoną w T przez $\jmath_{T_\tau} : T_\tau \rightarrowtail T$, a wtedy τ kanonicznie określa obiekt $(T_\tau, \underline{\tau}) \in \mathrm{Ob}\,{}^{G_1}L^{G_2}$ o własności

$$\jmath_{T_\tau} \circ \underline{\tau} = \tau \,.$$

Inicjalność τ gwarantuje istnienie homomorfizmu grup przemiennych $\widetilde{\underline{\tau}} : T \longrightarrow T_\tau$ o własności

$$\widetilde{\underline{\tau}} \circ \tau = \underline{\tau} \,,$$

a zatem zachodzi tożsamość

$$\jmath_{T_\tau} \circ \widetilde{\underline{\tau}} \circ \tau = \jmath_{T_\tau} \circ \underline{\tau} = \tau \equiv \mathrm{id}_T \circ \tau \,,$$

która wobec tejże inicjalności τ daje nam równość

$$\jmath_{T_\tau} \circ \widetilde{\underline{\tau}} = \mathrm{id}_T \,,$$

implikującą postulowaną surjektywność zanurzenia kanonicznego,

$$\mathrm{Im}\, \jmath_{T_\tau} = T \,.$$

(ii)⇒(i) Niechaj $\widetilde{\varphi}_1 : T \longrightarrow H$ i $\widetilde{\varphi}_2 : T \longrightarrow H$ będą dwoma homomorfizmami grup przemiennych domykającymi Diag. (9),

$$\widetilde{\varphi}_1 \circ \tau = \varphi = \widetilde{\varphi}_2 \circ \tau \,,$$

skąd wniosek:

$$\widetilde{\varphi}_1 \upharpoonright_{\tau(G_1 \times G_2)} = \widetilde{\varphi}_2 \upharpoonright_{\tau(G_1 \times G_2)} \,.$$

Równość (8) przesądza o pożądanej równości obu homomorfizmów (wobec ich $\mathbb{Z}$-liniowości),

$$\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2 \,.$$

□

W następnej kolejności zajmiemy się omówieniem operacji tensorowania odwzorowań liniowych. Nasza dyskusja będzie zarazem stanowić pierwszą demonstrację siły pojęcia morfizmu uniwersalnego. Zacznijmy, jak (niemal) zawsze od

Definicja 3. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $G_1, H_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}}$ i $G_2, H_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$. **Iloczyn tensorowy nad R odwzorowań R-liniowych** $\chi_1 \in \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(G_1, H_1)$ i $\chi_2 \in \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2)$ to (jedyny) homomorfizm grup przemiennych

$$\chi_1 \otimes \chi_2 \;:\; G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow H_1 \otimes_R H_2$$

o własności

$$\forall_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \;:\; (\chi_1 \otimes \chi_2)(g_1 \otimes_R g_2) = \chi_1(g_1) \otimes_R \chi_2(g_2)\,.$$

Stwierdzenie 2. Dla dowolnego pierścienia R i dowolnych $G_1, H_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}}$, $G_2, H_2 \in \mathbf{Mod}_R$ oraz $(\chi_1, \chi_2) \in \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(G_1, H_1) \times \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2)$ homomorfizm grup przemiennych $\chi_1 \otimes \chi_2$ jest dobrze określony.

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy odwzorowanie

$$\varphi \;:\; G_1 \times G_2 \longrightarrow H_1 \otimes_R H_2 \;:\; (g_1, g_2) \longmapsto \chi_1(g_1) \otimes_R \chi_2(g_2)\,.$$

Jest ono jawnie śród-R-liniowe, zatem w świetle uniwersalności iloczynu tensorowego nad R określa ono jednoznacznie odwzorowanie $\chi_1 \otimes \chi_2 := \widetilde{\varphi}$, o którym mowa w dowodzonym stwierdzeniu. □

Uwaga 2. Przyjęty zapis iloczynu odwzorowań liniowych może być mylący, sugeruje bowiem, jakoby $\chi_1 \otimes \chi_2$ było iloczynem tensorowym odwzorowań χ_1 i χ_2 traktowanych jako elementy $\mathbb{Z}$-modułów (tj. grup przemiennych) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, H_1)$ i $\mathrm{Hom}_R(G_2, H_2)$, odpowiednio, tymczasem skonstruowane poniżej odwzorowanie $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, H_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1) \otimes_R H_2)$ nie jest w ogólności ani surjektywne, ani injektywne.

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 3. Istnieje kanoniczny homomorfizm $\mathbb{Z}$-modułów

$$\imath \;:\; \mathrm{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$$

o własności

$$\imath(\chi_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \chi_2) = \chi_1 \otimes \chi_2\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad \mathrm{Hom}_R(G_1, H_1) \times \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2) \\ &: \quad (\chi_1, \chi_2) \longmapsto \chi_1 \otimes \chi_2 \end{aligned}$$

jest jawnie $\mathbb{Z}$-dwuliniowe, więc też automatycznie śród-$\mathbb{Z}$-liniowe, a zatem określa jednoznacznie odwzorowanie $\iota := \widetilde{\varphi}$, o którym mowa w dowodzonym stwierdzeniu. □

Mamy przydatne

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3. Dla dowolnych $G_1, H_1, K_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}}$ i $G_2, H_2, K_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ oraz $\chi_1 \in \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(G_1, H_1)$, $\chi_2 \in \mathrm{Hom}_R(G_2, H_2)$ i $\psi_1 \in \mathrm{Hom}_R(H_1, K_1), \psi_2 \in \mathrm{Hom}_R(H_2, K_2)$ zachodzi tożsamość

$$(\psi_1 \otimes \psi_2) \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) = (\psi_1 \circ \chi_1) \otimes (\psi_2 \circ \chi_2)\,. \tag{10}$$

W szczególności ilekroć χ_1 i χ_2 są odwracalne, otrzymujemy

$$(\chi_1 \otimes \chi_2)^{-1} = \chi_1^{-1} \otimes \chi_2^{-1}\,.$$

Podobnie, surjektywność χ_1 i χ_2 implikuje surjektywność $\chi_1 \otimes \chi_2$ wobec tożsamości

$$\mathrm{Im}\,(\chi_1 \otimes \chi_2) = \mathrm{Im}\,\chi_1 \otimes_R \mathrm{Im}\,\chi_2\,.$$

Dowód: Wobec Równ. (7) oraz $\mathbb{Z}$-liniowości $\otimes_R$ wystarczy sprawdzić dowodzoną tożsamość (10) na generatorach $g_1 \otimes_R g_2$, $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ grupy przemiennej $G_1 \otimes_R G_2$, co jest rzeczą prostą. □

W podsumowaniu dotychczasowej dyskusji możemy wypowiedzieć zwięzłe

Twierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Iloczyn tensorowy określa funktor kowariantny $\otimes_R \,:\, \mathbf{Mod}_{R^{\rm op}} \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{AbGrp}$ o składowej obiektowej $(G_1, G_2) \longmapsto G_1 \otimes_R G_2$ i składowej morfizmowej $(\chi_1, \chi_2) \longmapsto \chi_1 \otimes \chi_2$.

Dowód: Wynika wprost z Def. 3 oraz Stw. 4. □

Uniwersalna natura iloczynu tensorowego dostarcza nam potężnego narzędzia analizy jego własności strukturalnych, z których kilka opiszemy w następnym rozdziale.

2. Podstawowe własności iloczynu tensorowego

Zaczynamy od

Twierdzenie 3 (O przemienności iloczynu tensorowego)**.** Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $G_1^{(\rm op)}$ (wzgl. $G_2^{(\rm op)}$) oznacza lewy (wzgl. prawy) $R^{\rm op}$-moduł o nośniku G_1 (wzgl. G_2) i strukturze indukowanej w naturalny sposób ze struktury prawego (wzgl. lewego) R-modułu na G_1 (wzgl. G_2). Istnieje kanoniczny izomorfizm grup przemiennych

$$\sigma_{G_1,G_2} \,:\, G_1 \otimes_R G_2 \xrightarrow{\cong} G_2^{(\rm op)} \otimes_{R^{\rm op}} G_1^{(\rm op)}$$

o własności

$$\forall_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \,:\, \sigma_{G_1,G_2}(g_1 \otimes_R g_2) = g_2 \otimes_{R^{\rm op}} g_1 \,.$$

Dowód: Wprost na mocy definicji $G_\alpha^{(\rm op)}$, $\alpha \in \{1,2\}$ odwzorowanie

$$\varphi \,:\, G_1 \times G_2 \longrightarrow G_2^{(\rm op)} \otimes_{R^{\rm op}} G_1^{(\rm op)} \,:\, (g_1, g_2) \longmapsto g_2 \otimes_{R^{\rm op}} g_1$$

jest śród-$R^{(\rm op)}$-liniowe, istnieje zatem jedyne odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe

$$\sigma_{G_1,G_2} \,:\, G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow G_2^{(\rm op)} \otimes_{R^{\rm op}} G_1^{(\rm op)}$$

o własności wskazanej w tezie dowodzonego twierdzenia. Analogicznie dowodzimy istnienia jedynego odwzorowania $\mathbb{Z}$-liniowego

$$\tau_{G_1,G_2} \,:\, G_2^{(\rm op)} \otimes_{R^{\rm op}} G_1^{(\rm op)} \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2$$

o własności

$$\forall_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \,:\, \tau_{G_1,G_2}(g_2 \otimes_{R^{\rm op}} g_1) = g_1 \otimes_R g_2 \,.$$

Otrzymujemy więc równości, trywialnie spełnione na generatorach, a więc i ogólnie,

$$\begin{aligned} \sigma_{G_1,G_2} \circ \tau_{G_1,G_2} &= {\rm id}_{G_2^{(\rm op)} \otimes_{R^{\rm op}} G_1^{(\rm op)}} \,, \\ \tau_{G_1,G_2} \circ \sigma_{G_1,G_2} &= {\rm id}_{G_1 \otimes_R G_2} \,. \end{aligned}$$

□

Celem zbadania zagadnienia łączności operacji tensorowania modułów uogólnimy najpierw nasze dotychczasowe rozważania w sposób opisany w

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 2 oraz 3 i niechaj $G_1, H_1 \in {\rm Ob}\,\mathbf{Mod}_{(R_2, R_1^{\rm op})}$, $G_2, H_2 \in {\rm Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_1}$, $G_3, H_3 \in {\rm Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_1^{\rm op}}$, $G_4, H_4 \in {\rm Ob}\,\mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\rm op})}$. Wówczas

(i) $G_1 \otimes_{R_1} G_2$ jest lewym R_2-modułem z działaniem określonym na generatorach:

$$\forall_{(r,g_1,g_2)\in R_2\times G_1\otimes_{R_1} G_2} \,:\, r \rhd_\otimes (g_1 \otimes_{R_1} g_2) := (r \rhd_{(1)} g_1) \otimes_{R_1} g_2 \,.$$

(ii) $\forall_{(\chi_1,\chi_2)\in\mathrm{Hom}_{(R_2,R_1)}(G_1,H_1)\times\mathrm{Hom}_{R_1}(G_2,H_2)} \ : \ \chi_1\otimes\chi_2 \in \mathrm{Hom}_{R_2}(G_1\otimes_{R_1} G_2,\ H_1\otimes_{R_1} H_2)$.

(iii) $G_3\otimes_{R_1} G_4$ jest prawym R_2-modułem z działaniem określonym na generatorach:

$$\forall_{(g_3,g_4,r)\in G_3\otimes_{R_1} G_4\times R_2} \ : \ (g_3\otimes_{R_1} g_4)\triangleleft_\otimes r := g_3\otimes_{R_1}(g_4\triangleleft_{(4)} r)\,.$$

(iv) $\forall_{(\psi_1,\psi_2)\in\mathrm{Hom}_{R_1}(G_3,H_3)\times\mathrm{Hom}_{(R_1,R_2)}(G_4,H_4)} \ : \ \psi_1\otimes\psi_2 \in \mathrm{Hom}_{R_2}(G_3\otimes_{R_1} G_4,\ H_3\otimes_{R_1} H_4)$.

Dowód: Przedstawimy jedynie dowód punktów (i) i (ii) tezy, dowód pozostałych punktów przebiega w pełni analogicznie.

Ad (i) Określmy dla dowolnego $r\in R_2$ odwzorowanie

$$\varphi_r \ : \ G_1\times G_2 \longrightarrow G_1\otimes_{R_1} G_2 \ : \ (g_1,g_2)\longmapsto (r\triangleright_{(1)} g_1)\otimes_{R_1} g_2\,.$$

Jest ono jawnie śród-R_1-liniowe, więc też indukuje jedyne odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe

$$\ell_r^\otimes := \widetilde{\varphi_r} \ : \ G_1\otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1\otimes_{R_1} G_2$$

o pożądanej własności

$$\ell_r^\otimes(g_1\otimes_{R_1} g_2) = (r\triangleright_{(1)} g_1)\otimes_{R_1} g_2\,.$$

Bez trudu sprawdzamy, że to ostatnie zadaje strukturę lewego R_2-modułu na swej dziedzinie, według schematu

$$\begin{aligned}\ell_\cdot^\otimes \quad &: \quad R_2\times G_1\otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1\otimes_{R_1} G_2\\ &: \quad \Big(r, \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2)\triangleright(g_1\otimes_{R_1} g_2)\Big)\\ &\qquad \longmapsto \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2)\triangleright \ell_r^\otimes(g_1\otimes_{R_1} g_2)\,.\end{aligned}$$

Ad (ii) Trywialne sprawdzenie na generatorach.

$\square$

Możemy już teraz wysłowić

Twierdzenie 4 (O łączności iloczynu tensorowego)**.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $G_1\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_1^{\mathrm{op}}}$, $G_2\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{(R_1,R_2^{\mathrm{op}})}$, $G_3\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_2}$. Istnieje kanoniczny izomorfizm naturalny

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathbf{Mod}_{R_1^{\mathrm{op}}}\times\mathbf{Mod}_{(R_1,R_2^{\mathrm{op}})}\times\mathbf{Mod}_{R_2} \arrow[r, bend left, "\otimes_{R_2}\circ\left(\otimes_{R_1}\times\mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}\right)"] \arrow[r, bend right, "\otimes_{R_2}\circ\left(\otimes_{R_1}\times\mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}\right)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_{\cdot,\cdot,\cdot}"] & \mathbf{AbGrp} \end{tikzcd}$$

między funktorami kowariantnymi

$$\begin{aligned}\otimes_{R_2}\circ\left(\otimes_{R_1}\times\mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}\right) \quad &: \quad \mathbf{Mod}_{R_1^{\mathrm{op}}}\times\mathbf{Mod}_{(R_1,R_2^{\mathrm{op}})}\times\mathbf{Mod}_{R_2}\longrightarrow\mathbf{AbGrp}\\ &: \quad (G_1,G_2,G_3)\longmapsto \left(G_1\otimes_{R_1} G_2\right)\otimes_{R_2} G_3\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\otimes_{R_1}\circ\left(\mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_1}}\times\otimes_{R_2}\right) \quad &: \quad \mathbf{Mod}_{R_1^{\mathrm{op}}}\times\mathbf{Mod}_{(R_1,R_2^{\mathrm{op}})}\times\mathbf{Mod}_{R_2}\longrightarrow\mathbf{AbGrp}\\ &: \quad (G_1,G_2,G_3)\longmapsto G_1\otimes_{R_1}\left(G_2\otimes_{R_2} G_3\right),\end{aligned}$$

o własności

$$\forall_{(g_1,g_2,g_3)\in G_1\times G_2\times G_3} \ : \ \alpha_{G_1,G_2,G_3}\big((g_1\otimes_{R_1} g_2)\otimes_{R_2} g_3\big) = g_1\otimes_{R_1}(g_2\otimes_{R_2} g_3)\,.$$

Dowód: Ustalenie postaci postulowanego izomorfizmu na generatorach gwarantuje – jak uprzednio – jego jednoznaczność. Pozostaje dowieść jego istnienia, co uczynimy w sposób konstruktywny. Zdefiniujmy, dla dowolnego $g_3 \in G_3$, odwzorowanie (jawnie) R_1-liniowe

$$h_{g_3} \;:\; G_2 \longrightarrow G_2 \otimes_{R_2} G_3 \;:\; g_2 \longmapsto g_2 \otimes_{R_2} g_3$$

i rozważmy indukowane przezeń odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe

$$\widehat{h}_{g_3} \coloneqq \mathrm{id}_{G_1} \otimes h_{g_3} \;:\; G_1 \otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} \big(G_2 \otimes_{R_2} G_3\big)\,.$$

To ostatnie zadaje odwzorowanie

$$\widehat{h}_{\cdot} \;:\; G_1 \otimes_{R_1} G_2 \times G_3 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} \big(G_2 \otimes_{R_2} G_3\big)\,,$$

które na generatorach określamy jako

$$\widehat{h}_{\cdot}(g_1 \otimes_{R_1} g_2, g_3) \coloneqq \widehat{h}_{g_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2)\,.$$

Odwzorowanie to jest $\mathbb{Z}$-liniowe w pierwszym argumencie wprost na mocy $\mathbb{Z}$-liniowości $\widehat{h}_{g_3}$, a nadto – $\mathbb{Z}$-liniowe w drugim argumencie wobec tożsamości (zapisanej dla dowolnych $g_1 \otimes_{R_1} g_2 \in G_1 \otimes_{R_1} G_2$ i $g_3, h_3 \in G_3$)

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_{g_3 +_{(3)} h_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) &\equiv g_1 \otimes_{R_1} h_{g_3 +_{(3)} h_3}(g_2) = g_1 \otimes_{R_1} \big(g_2 \otimes_{R_2} (g_3 +_{(3)} h_3)\big) \\
&= g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3 +_{\otimes} g_2 \otimes_{R_2} h_3) \\
&= g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3) +_{\otimes} g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} h_3) \\
&\equiv \widehat{h}_{g_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) +_{\otimes} \widehat{h}_{h_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2)\,.
\end{aligned}$$

Także na generatorach sprawdzamy jego śród-R_2-jednorodność, z której wynika istnienie jedynego odwzorowania $\mathbb{Z}$-liniowego α o pożądanej własności. Dowód istnienia odwrotności α przebiega w pełni analogicznie. I wreszcie naturalność opisanej tu rodziny izomorfizmów jest oczywistą konsekwencją ich definicji. □

Uwaga 3. Zagadnienie uniwersalne dla odwzorowań śród-R-liniowych ma swoje naturalne uogólnienie na przypadek n-liniowy dla $n > 2$, które w przypadku $n = 3$ prowadzi do definicji grupy przemiennej $G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3$, zwanej potrójnym iloczynem tensorowym. Łatwo wykazać istnienie kanonicznego izomorfizmu grup przemiennych

$$\big(G_1 \otimes_{R_1} G_2\big) \otimes_{R_2} G_3 \cong G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3\,.$$

Uogólnienie tej obserwacji formalizujemy w poniższej definicji, pozostawiając Czytelnikowi dowód jej sensowności (tj. istnienia przedmiotu tejże) jako proste, a pożyteczne ćwiczenie.

Definicja 4. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i dla ustalonego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ niechaj $G_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_1^{\mathrm{op}}}, G_n \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R_{n-1}}$ oraz $G_k \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{(R_{k-1},R_k)}, k \in \overline{2, n-1}$. Niech też ${}^{G_1}L^{G_2}L^{G_3}\cdots{}^{G_{n-1}}L^{G_n}$ będzie kategorią, której obiektami są pary (H, φ) złożone z $H \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania $\varphi \;:\; G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H$ n-addytywnego i śród-R_l-jednorodnego dla każdej pary (G_l, G_{l+1}), $l \in \overline{1, n-1}$ i której morfizmami – dla ustalonych obiektów $(H_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in \{1,2\}$, utworzonych przez $H_\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania $\varphi_\alpha \;:\; G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H_\alpha$ – są odwzorowania

$$\mathrm{Hom}_{{}^{G_1}L^{G_2}L^{G_3}\cdots{}^{G_{n-1}}L^{G_n}}\big((H_1,\varphi_1),(H_2,\varphi_2)\big)$$

$$= \big\{\; \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(H_1, H_2) \quad | \quad \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1 \;\big\}\,.$$

n-krotny iloczyn tensorowy nad $(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})$ rodziny modułów $\{G_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ to struktura inicjalna

$$\big(G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3 \otimes_{R_3} \cdots \otimes_{R_{n-1}} G_n, \otimes_R^n\big)$$

dla warunku

$$P_{(G_1,G_2,\ldots,G_n);F_1,F_2}(H,\varphi) \quad \equiv \quad „\varphi \;:\; G_1\times G_2\times\cdots\times G_n \longrightarrow H \text{ jest}$$
$$\text{odwzorowaniem śród-}R_l\text{-liniowym dla } l\in\overline{1,n-1}\text{''},$$

w którego zapisie $F_1 \;:\; \mathbf{Mod}_{R_1^{\rm op}}\times\mathbf{Mod}_{(R_1,R_2)}\times\mathbf{Mod}_{(R_2,R_3)}\times\cdots\times\mathbf{Mod}_{(R_{n-1},R_n)}\times\mathbf{Mod}_{R_n} \longrightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem przyporządkowującym n-tce (bi)modułów (wzgl. stosownych odwzorowań liniowych) iloczyn kartezjański ich nośników (wzgl. tychże odwzorowań), a $F_2 \;:\; \mathbf{AbGrp}\longrightarrow\mathbf{Set}$ jest funktorem zapominania jak w Def. 2.

Istnienie kanonicznej struktury (R,R)-bimodułu na R, określonej przez lewo- i prawostronne mnożenie przez elementy R, pozwala nam w przypadku dowolnego $G_1\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\rm op}}$ traktować $G_1\otimes_R R$ jako R-moduł prawostronny, a w przypadku dowolnego $G_2\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ – $R\otimes_R G_2$ jako R-moduł lewostronny. Obserwacja ta nadaje sens

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 2 oraz Równ. (7). Odwzorowanie

$$_{G_1}\xi \;:\; G_1\longrightarrow G_1\otimes_R R \;:\; g\longmapsto g\otimes_R \mathbf{1}_R$$

jest izomorfizmem R-modułów prawostronnych, o odwrotności zadanej przez odwzorowanie

$$\begin{aligned} {}_{G_1}\kappa \quad &: \quad G_1\otimes_R R\longrightarrow G_1 \\ &: \quad \sum_{(g,r)\in G_1\times R}\nu(g,r)\triangleright(g\otimes_R r)\longmapsto \sum_{(g,r)\in G_1\times R}\nu(g,r)\triangleright(g\triangleleft r)\,. \end{aligned}$$

Podobnie odwzorowanie

$$\xi_{G_2} \;:\; G_2\longrightarrow R\otimes_R G_2 \;:\; g\longmapsto \mathbf{1}_R\otimes_R g$$

jest izomorfizmem R-modułów lewostronnych, o odwrotności zadanej przez odwzorowanie

$$\begin{aligned} \kappa_{G_2} \quad &: \quad R\otimes_R G_2\longrightarrow G_2 \\ &: \quad \sum_{(r,g)\in R\times G_2}\nu(r,g)\triangleright(r\otimes_R g)\longmapsto \sum_{(r,g)\in R\times G_2}\nu(r,g)\triangleright(r\triangleright g)\,. \end{aligned}$$

Dowód: Dowodzimy pierwszej części tezy, dowód drugiej części jest w pełni analogiczny. Łatwo sparwdzamy, że jawnie $\mathbb{Z}$-dwuliniowe (wprost z definicji działania) odwzorowanie

$$\wp \;:\; G_1\times R\longrightarrow G_1 \;:\; (g,r)\longmapsto g\triangleleft r$$

jest śród-R-jednorodne,

$$\forall_{(g,r,s)\in G_1\times R\times R} \;:\; \wp\big((g\triangleleft r),s\big)\equiv(g\triangleleft r)\triangleleft s = g\triangleleft(r\cdot_R s)\equiv g\triangleleft(r\triangleright s)\equiv\wp(g,r\triangleright s)\,,$$

to zaś implikuje istnienie (jedynego) odwzorowania $\mathbb{Z}$-liniowego ${}_{G_1}\kappa\equiv\widetilde{\wp}$ jak w tezie dowodzonego stwierdzenia. Tożsamości ${}_{G_1}\kappa\circ{}_{G_1}\xi=\mathrm{id}_{G_1}$ oraz ${}_{G_1}\xi\circ{}_{G_1}\kappa=\mathrm{id}_{G_1\otimes_R R}$ sprawdzamy bezpośrednio na generatorach (tensorach prostych). □

3. Relacje z produktem i sumą prostą modułów

Zaczynamy od elementarnego

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy dotychczasowy zapis, ustalmy zbiory (indeksów) Λ_1,Λ_2 i niechaj $G_{1\,\cdot}\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\rm op}}^{\Lambda_1}$ oraz $G_{2\,\cdot}\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R^{\Lambda_2}$. Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \tau \quad &: \quad \prod_{\lambda_1\in\Lambda_1}G_{1\,\lambda_1}\times\prod_{\lambda_2\in\Lambda_2}G_{2\,\lambda_2}\longrightarrow\prod_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2} \\ &: \quad \big(g_\cdot^{(1)},g_\cdot^{2)}\big)\longmapsto\big(g_\cdot^{(1)}\circ\mathrm{pr}_1\big)\otimes_R\big(g_\cdot^{(2)}\circ\mathrm{pr}_2\big)\,, \end{aligned}$$

w którego zapisie $\mathrm{pr}_\alpha : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \Lambda_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$ są rzutami kanonicznymi, indukuje kanoniczny homomorfizm grup przemiennych

$$\widetilde{\tau} : \prod_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\,\lambda_2} \longrightarrow \prod_{(\lambda_1,\lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R G_{2\,\lambda_2}$$

o własności

$$\forall_{(g^{(1)}_\cdot, g^{2)}_\cdot) \in G_{1\,\cdot} \times G_{2\,\cdot}} : \widetilde{\tau}\big(g^{(1)}_\cdot \otimes_R g^{(2)}_\cdot\big) = \big(g^{(1)}_\cdot \circ \mathrm{pr}_1\big) \otimes_R \big(g^{(2)}_\cdot \circ \mathrm{pr}_2\big).$$

<u>*Dowód:*</u> Odwzorowanie τ jest jawnie $\mathbb{Z}$-dwuliniowe i śród-R-jednorodne, zatem teza dowodzonego stwierdzenia wynika wprost z Tw. 1. □

W ogólności nie możemy orzekać o własnościach $\widetilde{\tau}$ bez poczynienia dodatkowych założeń odnośnie do struktury rodzin modułów pojawiających się w jego definicji (znane są przykłady odwzorowań nieinjektywnych i niesurjektywnych). Na większą precyzję wypowiedzi pozwala ograniczenie rozważań do podmodułów modułów produktowych danych przez sumy proste. Oto więc znajdujemy ważne

Twierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Kanoniczny homomorfizm grup przemiennych $\widetilde{\tau}$ ogranicza się do iloczynu podmodułów $\bigoplus_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha} G_{\alpha\,\lambda_\alpha} \subset \prod_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha} G_{\alpha\,\lambda_\alpha},\ \alpha \in \{1,2\}$, tj. zadaje kanoniczny homomorfizm grup przemiennych

$$\widetilde{\tau} : \bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\,\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R G_{2\,\lambda_2},$$

przy czym sumy proste tensorowane w dziedzinie $\widetilde{\tau}$ to sumy proste R-modułów, gdy tymczasem przeciwdziedzina jest sumą prostą $\mathbb{Z}$-modułów. Homomorfizm ten jest izomorfizmem grup przemiennych.

<u>*Dowód:*</u> Wobec zerowości iloczynu tensorowego dowolnego elementu jednego modułu z elementem zerowym drugiego modułu $\widetilde{\tau}$-obraz iloczynu tensorowego skończonych kombinacji R-liniowych elementów $\bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\,\lambda_1}$ i – odpowiednio – $\bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\,\lambda_2}$ jest skończoną kombinacją $\mathbb{Z}$-liniową tensorów prostych z $G_{1\,\lambda_1} \otimes_R G_{2\,\lambda_2}$, więc – w istocie –

$$\widetilde{\tau}\Big(\bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\,\lambda_2}\Big) \subset \bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R G_{2\,\lambda_2}.$$

W świetle Stw. 7 pozostaje zatem znaleźć odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe

$$h : \bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R G_{2\,\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\,\lambda_2}$$

spełniające tożsamości

$$h \circ \widetilde{\tau} = \mathrm{id}_{\bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\,\lambda_2}}, \qquad \widetilde{\tau} \circ h = \mathrm{id}_{\bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\,\lambda_1} \otimes_R G_{2\,\lambda_2}}.$$

Przywołując definicję sumy prostej jako struktury inicjalnej, stwierdzamy przy tym, że istnienie i jednoznaczność poszukiwanego odwzorowania wynika wprost z istnienia stosownej rodziny homomorfizmów grup przemiennych

$$\begin{aligned} \chi_{\cdot,\cdot} \quad &: \quad \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{AbGrp} \\ &: \quad (\lambda_1,\lambda_2) \longmapsto \chi_{\lambda_1,\lambda_2} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(G_{1\,\lambda_1} \otimes_R G_{2\,\lambda_2}, \bigoplus_{\mu_1 \in \Lambda_1} G_{1\,\mu_1} \otimes_R \bigoplus_{\mu_2 \in \Lambda_2} G_{2\,\mu_2}\Big), \end{aligned}$$

której elementy możemy wybrać w postaci

$$\chi_{\lambda_1,\lambda_2} := \jmath_{\lambda_1} \otimes \jmath_{\lambda_2}, \tag{11}$$

gdzie zastosowaliśmy notację Def. 2.9 oraz 3. Homomorfizmy te indukują poszukiwane odwzorowanie spełniające relację

$$h \circ \jmath_{\lambda_1,\lambda_2} = \chi_{\lambda_1,\lambda_2},$$

wyrażoną w terminach włożeń kanonicznych

$$\jmath_{\lambda_1,\lambda_2} \;:\; G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\mu_1,\mu_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} G_{1\,\mu_1}\otimes_R G_{2\,\mu_2}\,.$$

Oznaczmy symbolicznie

$$\jmath_{\lambda_\alpha} \;:\; G_{\alpha\,\lambda_\alpha} \longrightarrow \bigoplus_{\mu_\alpha\in\Lambda_\alpha} G_{\alpha\,\mu_\alpha} \;:\; g_{\lambda_\alpha} \longmapsto \delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_\alpha,\cdot} \triangleright g_{\lambda_\alpha}\,,\qquad \alpha\in\{1,2\}$$

oraz

$$\begin{aligned}\jmath_{\lambda_1,\lambda_2} \;&:\; G_{1\,\lambda_1}\otimes_R G_{2\,\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\mu_1,\mu_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} G_{1\,\mu_1}\otimes_R G_{2\,\mu_2}\\ &:\; \sum_{(g_1,g_2)\in G_{1\,\lambda_1}\times G_{2\,\lambda_2}} \nu(g_1,g_2)\triangleright(g_1\otimes_R g_2)\\ &\longmapsto \sum_{(g_1,g_2)\in G_{1\,\lambda_1}\times G_{2\,\lambda_2}} \delta^{\mathbb{Z}}_{(\lambda_1,\lambda_2),(\cdot,\cdot)}\cdot\nu(g_1,g_2)\triangleright(g_1\otimes_R g_2)\end{aligned}$$

i przywołajmy Równ. (2.10). Możemy już teraz wprost sprawdzić – z wykorzystaniem definiującej własności (11), jak również $\mathbb{Z}$-liniowości iloczynu tensorowego – pożądane tożsamości (na tensorach prostych z $\bigoplus_{\mu_1\in\Lambda_1} G_{1\,\mu_1}\otimes_R\bigoplus_{\mu_2\in\Lambda_2} G_{2\,\mu_2}$, dla dowolnych $r_\cdot\in\mathscr{R}_0(R;\Lambda_1)$ i $s_\cdot\in\mathscr{R}_0(R;\Lambda_2)$)

$$\begin{aligned}h\circ\widetilde{\tau}\big(g_\cdot\triangleleft_{(1)} r_\cdot\otimes_R s_\cdot\triangleright_{(2)} g_\cdot\big) &= h\big(g_\cdot\triangleleft_{(1)} r_\cdot\circ\mathrm{pr}_1\otimes_R s_\cdot\triangleright_{(2)} g_\cdot\circ\mathrm{pr}_2\big)\\ \equiv \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} h\circ\jmath_{\lambda_1,\lambda_2}\circ\mathrm{pr}_{\lambda_1,\lambda_2}\big(g_\cdot\triangleleft_{(1)} r_\cdot\circ\mathrm{pr}_1 &\otimes_R s_\cdot\triangleright_{(2)} g_\cdot\circ\mathrm{pr}_2\big)\\ = \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}\big(\jmath_{\lambda_1}\otimes\jmath_{\lambda_2}\big)\big(g_{\lambda_1}&\triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1}\otimes_R s_{\lambda_2}\triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}\big)\\ = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2}\jmath_{\lambda_1}\big(g_{\lambda_1}\triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1}\big)&\otimes_R\jmath_{\lambda_2}\big(s_{\lambda_2}\triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}\big)\\ = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\jmath_{\lambda_1}\big(g_{\lambda_1}\triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1}\big)\otimes_R&\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2}\jmath_{\lambda_2}\big(s_{\lambda_2}\triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}\big)\\ = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\jmath_{\lambda_1}\circ\mathrm{pr}_{\lambda_1}\big(g_\cdot\triangleleft_{(1)} r_\cdot\big)\otimes_R&\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2}\jmath_{\lambda_2}\circ\mathrm{pr}_{\lambda_2}\big(s_\cdot\triangleright_{(2)} g_\cdot\big)\\ &= g_\cdot\triangleleft_{(1)} r_\cdot\otimes_R s_\cdot\triangleright_{(2)} g_\cdot\,.\end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy – dla dowolnej rodziny $N_{(\cdot,\cdot)}\in\mathscr{R}_0(\mathbb{Z};\Lambda_1\times\Lambda_2)$ –

$$\begin{aligned}&\widetilde{\tau}\circ h\big(N_{(\cdot,\cdot)}\cdot\nu(g^{(1)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_1,g^{(2)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_2)\triangleright\big(g^{(1)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_1\otimes_R g^{(2)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_2\big)\big)\\ &= \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}\widetilde{\tau}\circ h\circ\jmath_{\lambda_1,\lambda_2}\circ\mathrm{pr}_{\lambda_1,\lambda_2}\big(N_{(\cdot,\cdot)}\cdot\nu(g^{(1)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_1,g^{(2)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_2)\\ &\qquad\qquad\triangleright\big(g^{(1)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_1\otimes_R g^{(2)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_2\big)\big)\\ &= \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}\widetilde{\tau}\circ\big(\jmath_{\lambda_1}\otimes\jmath_{\lambda_2}\big)\big(N_{(\lambda_1,\lambda_2)}\cdot\nu(g^{(1)}_{\lambda_1},g^{(2)}_{\lambda_2})\triangleright\big(g^{(1)}_{\lambda_1}\otimes_R g^{(2)}_{\lambda_2}\big)\big)\\ &\equiv \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}\widetilde{\tau}\big(N_{(\lambda_1,\lambda_2)}\cdot\nu(g^{(1)}_{\lambda_1},g^{(2)}_{\lambda_2})\triangleright\big(\jmath_{\lambda_1}\big(g^{(1)}_{\lambda_1}\big)\otimes_R\jmath_{\lambda_2}\big(g^{(2)}_{\lambda_2}\big)\big)\big)\\ &= \sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}\widetilde{\tau}\big(N_{(\lambda_1,\lambda_2)}\cdot\nu(g^{(1)}_{\lambda_1},g^{(2)}_{\lambda_2})\triangleright\big(\delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_1,\cdot_1}\triangleright g^{(1)}_{\lambda_1}\otimes_R\delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_2,\cdot_2}\triangleright g^{(2)}_{\lambda_2}\big)\big)\\ &= \widetilde{\tau}\big(\sum_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}N_{(\lambda_1,\lambda_2)}\cdot\nu(g^{(1)}_{\lambda_1},g^{(2)}_{\lambda_2})\triangleright\big(\delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_1,\cdot_1}\triangleright g^{(1)}_{\lambda_1}\otimes_R\delta^{\mathbb{Z}}_{\lambda_2,\cdot_2}\triangleright g^{(2)}_{\lambda_2}\big)\big)\\ &= \widetilde{\tau}\big(N_{(\cdot_1,\cdot_2)}\cdot\nu(g^{(1)}_{\cdot_1},g^{(2)}_{\cdot_2})\triangleright\big(g^{(1)}_{\cdot_1}\otimes_R g^{(2)}_{\cdot_2}\big)\big)\\ &= N_{(\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2)}\cdot\nu(g^{(1)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_1,g^{(2)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_2)\triangleright\big(g^{(1)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_1\otimes_R g^{(2)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_2\big)\\ &\equiv N_{(\cdot,\cdot)}\cdot\nu(g^{(1)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_1,g^{(2)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_2)\triangleright\big(g^{(1)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_1\otimes_R g^{(2)}_\cdot\circ\mathrm{pr}_2\big)\,.\end{aligned}$$

□

Prostą konsekwencją powyższego twierdzenia jest

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $\big((V_\alpha, +_\alpha, \mathsf{P}_\alpha, \bullet \longmapsto 0_\alpha), \ell_\alpha\big)$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą dwiema przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Ich iloczyn tensorowy $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2$ spełnia warunek

$$\dim_{\mathbb{K}} (V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 \cdot \dim_{\mathbb{K}} V_2 \,.$$

Dowód: Pochodna Tw. 5 i stwierdzenia o rozkładzie przestrzeni wektorowej na (wewnętrzną) sumę prostą powłok liniowych elementów bazy. □

Istotnie pogłębiony wgląd w relację między iloczynem tensorowym i sumą prostą, tudzież produktem modułów uzyskujemy w przypadku modułów wolnych, do których teraz przechodzimy. Tytułem wprowadzenia sformułujemy

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ będzie R-modułem wolnym o bazie $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, indeksowanej przez pewien zbiór Λ, i niech $H \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_{R^{\rm op}}$. Wówczas

$$\forall_{\tau \in H\otimes_R G}\ \exists!_{h.\in\mathscr{R}_0(H;\Lambda)}\ :\ \tau = \sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda \otimes_R g_\lambda$$

i istnieje (niekanoniczny) izomorfizm grup przemiennych

$$H \otimes_R G \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H \,.$$

Dowód: Wybór bazy w R-module G jest równoznaczny ze wskazaniem izomorfizmu R-modułów

$$G \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \langle g_\lambda \rangle_R \,,$$

co w świetle Tw. 5 (a przy domyślnym zastosowaniu Stw. 4) pozwala zapisać

$$H \otimes_R G \cong H \otimes_R \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \langle g_\lambda\rangle_R \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \big(H \otimes_R \langle g_\lambda\rangle_R \big) \,.$$

Liniowa niezależność (nad R) każdego z elementów bazy $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ oznacza dalej, że odwzorowanie

$$\iota_\lambda\ :\ R \longrightarrow \langle g_\lambda\rangle_R\ :\ r \longmapsto r \triangleright g_\lambda$$

jest izomorfizmem R-modułów, którego istnienie daje nam, po uwzględnieniu tezy Stw. 6, pożądany izomorfizm grup przemiennych

$$H \otimes_R G \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \big(H \otimes_R \langle g_\lambda\rangle_R \big) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \big(H \otimes_R R \big) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H \,.$$

Powyższe rozumowanie pozwala nam bez trudu przeprowadzić dowód pierwszej części stwierdzenia. Istotnie, rozważmy dowolny tensor

$$\sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R g) \in H \otimes_R G \,,$$

określony przez rodzinę $\nu \in \mathscr{R}_0(\mathbb{Z}; H \times G)$. Uwzględniwszy skończoność tej ostatniej, jak również skończoność rodziny $r.(g) \in \mathscr{R}_0(R;\Lambda)$ wyznaczającej jednoznaczny rozkład elementu $g \in G$ w bazie $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, wreszcie też wykorzystawszy śród-R-liniowość $\otimes_R$, stwierdzamy

$$\begin{aligned}
\sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R g) &= \sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright \Big(h \otimes_R \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda(g) \triangleright_G g_\lambda \Big) \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright \big(h \otimes_R r_\lambda(g) \triangleright_G g_\lambda \big) \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{(h,g)\in H\times G} \nu(h,g) \triangleright \big(h \triangleleft_H r_\lambda(g) \otimes_R g_\lambda \big)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\lambda\in\Lambda}\Bigg(\sum_{(h,g)\in H\times G}\nu(h,g)\triangleright\big(h\triangleleft_H r_\lambda(g)\big)\Bigg)\otimes_R g_\lambda\,,$$

co jest poszukiwanym rozkładem,

$$h_\lambda := \sum_{(h,g)\in H\times G}\nu(h,g)\triangleright\big(h\triangleleft_H r_\lambda(g)\big)\in H\,.$$

Jego jednoznaczność wynika wprost z równoważności

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}h_\lambda\otimes_R g_\lambda = \mathbf{0}_{H\otimes_R G}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\forall_{\lambda\in\Lambda}\ :\ h_\lambda = \mathbf{0}_H\,,$$

której nietrywialną składową $\Longrightarrow$ otrzymujemy ewaluując odwzorowanie $\mathbb{Z}$-liniowe $\mathrm{id}_H\otimes\iota_\mu^{-1}\circ\mathrm{pr}_\mu$ na obu stronach równości z lewej strony dla każdego indeksu $\mu\in\Lambda$ z osobna. □

Rozumowanie jak to przedstawione powyżej prowadzi nas wprost do

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Jeśli oba moduły G_1 i G_2 są wolne, przy czym odnośne bazy to $\{g^{(1)}_{\lambda_1}\}_{\lambda_1\in\Lambda_1}$ i $\{g^{(2)}_{\lambda_2}\}_{\lambda_2\in\Lambda_2}$, to w zapisie dowolnego elementu

$$\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}g^{(1)}_{\lambda_1}\otimes_R h^{(2)}_{\lambda_1}\equiv\sum_{\lambda_2\in\Lambda_2}h^{(1)}_{\lambda_2}\otimes_R g^{(2)}_{\lambda_2}$$

w terminach elementów $h^{(2)}_{\lambda_1}\in G_2$ i $h^{(1)}_{\lambda_2}\in G_1$, o rozkładach

$$h^{(2)}_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2\in\Lambda_2}h^{(2)}_{\lambda_1,\lambda_2}\triangleright_{(2)}g^{(2)}_{\lambda_2}\,,\qquad\qquad h^{(1)}_{\lambda_2} = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}g^{(1)}_{\lambda_1}\triangleleft_{(1)}h^{(1)}_{\lambda_2,\lambda_1}\,,$$

o którym orzeka Stw. 9, są spełnione tożsamości

$$\forall_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_2\times\Lambda_2}\ :\ h^{(2)}_{\lambda_1,\lambda_2} = h^{(1)}_{\lambda_2,\lambda_1}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wystarczy wykorzystać jednoznaczność rozkładu, o którym mówi Stw. 9 (w wersji stosownie zsymetryzowanej). □

Uwaga 4. Należy podkreślić, że mimo swe strukturalne powinowactwo do stwierdzeń orzekających o jednoznaczności rozkładu elementu modułu w bazie, powyższe stwierdzenie nie pozwala nam traktować układu $\{g^{(1)}_{\lambda_1}\otimes_R g^{(2)}_{\lambda_2}\}_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_2\times\Lambda_2}$ jako bazy, oto bowiem grupa przemienna $G_1\otimes_R G_2$ nie jest w ogólności R-modułem.

Znaczenie założenia o istnieniu (skończonej) bazy eksponuje

Stwierdzenie 11. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $H.\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}^{\Lambda}_{R^{\rm op}}$. Jeśli $G\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}_R$ jest R-modułem wolnym, to wówczas kanoniczny homomorfizm grup przemiennych

$$\widetilde{\tau}\ :\ \prod_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda\otimes_R G\longrightarrow\prod_{\lambda\in\Lambda}\big(H_\lambda\otimes_R G\big)\,,$$

o którym mówi Stw. 7, jest monomorfizmem. Jeżeli ponadto moduł G jest skończenie generowany, to homomorfizm ten jest izomorfizmem.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\{g_\mu\}_{\mu\in\widetilde{\Lambda}}$ będzie bazą G, a wtedy dowolny element $t=\prod_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda\otimes_R G$ można – w świetle Stw. 9 – zapisać jednoznacznie jako

$$t = \sum_{\mu\in\widetilde{\Lambda}}h^\mu_.\otimes_R g_\mu\,,\qquad h^\mu_.\in\prod_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda\,,$$

zatem jego obrazem względem odwzorowania kanonicznego $\widetilde{\tau}$ jest element grupy $\prod_{\lambda\in\Lambda}\big(H_\lambda\otimes_R G\big)$ postaci

$$\widetilde{\tau}(t)\ :\ \Lambda\longrightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(H_\lambda\otimes_R G)\ :\ \lambda\longmapsto\sum_{\mu\in\widetilde{\Lambda}}h^\mu_\lambda\otimes_R g_\mu\in H_\lambda\otimes_R G\,.$$

Ten ostatni jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\lambda\in\Lambda}\ :\ \sum_{\mu\in\widetilde{\Lambda}} h_\lambda^\mu \otimes_R g_\mu = 0_{H_\lambda\otimes_R G}\,,$$

to zaś – wobec jednoznaczności rozkładu orzeczonej w Stw. 9 – jest równoważne stwierdzeniu

$$\forall_{\lambda\in\Lambda}\ \forall_{\mu\in\widetilde{\Lambda}}\ :\ h_\lambda^\mu = 0_{H_\lambda}\,,$$

co pokazuje injektywność odwzorowania $\widetilde{\tau}$ w rozpatrywanym przypadku.

Jeśli ponadto $N := |\widetilde{\Lambda}| < \infty$, to na podstawie Tw. 5 oraz Stw. 6 (i wcześniejszych naszych rozważań, w tym Stw. 4) otrzymujemy z jednej strony

$$\begin{aligned}\iota_1\ :\ \prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\otimes_R G\ &\cong\ \prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\otimes_R \bigoplus_{n=1}^N \langle g_n\rangle_R \cong \bigoplus_{n=1}^N \Big(\prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\otimes_R \langle g_n\rangle_R\Big)\\ &\cong\ \bigoplus_{n=1}^N\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\otimes_R R\Big)\cong \bigoplus_{n=1}^N\prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \cong \prod_{n=1}^N\prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\\ &\equiv\ \prod_{(n,\lambda)\in\overline{1,N}\times\Lambda} H_\lambda\,,\end{aligned}$$

z drugiej zaś

$$\begin{aligned}\iota_2\ :\ \prod_{\lambda\in\Lambda}\big(H_\lambda\otimes_R G\big)\ &\cong\ \prod_{\lambda\in\Lambda}\Big(H_\lambda\otimes_R \bigoplus_{n=1}^N \langle g_n\rangle_R\Big) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus_{n=1}^N \big(H_\lambda\otimes_R\langle g_n\rangle_R\big)\\ &\cong\ \prod_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus_{n=1}^N\big(H_\lambda\otimes_R R\big)\cong \prod_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus_{n=1}^N H_\lambda \equiv \prod_{\lambda\in\Lambda}\prod_{n=1}^N H_\lambda\\ &\cong\ \prod_{(n,\lambda)\in\overline{1,N}\times\Lambda} H_\lambda\,.\end{aligned}$$

W powyższych rozważaniach wykorzystaliśmy oczywiste izomorfizmy

$$\prod_{\lambda_1\in\Lambda_1}\prod_{\lambda_2\in\Lambda_2} G_{\lambda_1,\lambda_2}\cong \prod_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} G_{\lambda_1,\lambda_2}\,,$$

które dowolnemu odwzorowaniu

$$\gamma_\cdot\ :\ \Lambda_1\longrightarrow \bigcup_{\lambda_1\in\Lambda_1}\mathbf{Map}\big(\Lambda_2,\bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2} G_{\lambda_1,\lambda_2}\big)$$

o własności

$$\forall_{\lambda_1\in\Lambda_1}\ :\ \gamma_{\lambda_1}\ :\ \Lambda_2\longrightarrow\bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2} G_{\lambda_1,\lambda_2}\ :\ \lambda_2\longmapsto \gamma_{\lambda_1}(\lambda_2)\in G_{\lambda_1,\lambda_2}$$

przyporządkowują odwzorowanie

$$g^{\gamma_\cdot}_{\cdot,\cdot}\ :\ \Lambda_1\times\Lambda_2\longrightarrow\bigcup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} G_{\lambda_1,\lambda_2}\ :\ (\lambda_1,\lambda_2)\longmapsto\gamma_{\lambda_1}(\lambda_2)\,,$$

i odwrotnie – z każdym odwzorowaniem

$$g_{\cdot,\cdot}\ :\ \Lambda_1\times\Lambda_2\longrightarrow\bigcup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} G_{\lambda_1,\lambda_2}\ :\ (\lambda_1,\lambda_2)\longmapsto g_{\lambda_1,\lambda_2}\in G_{\lambda_1,\lambda_2}$$

stowarzyszają odwzorowanie

$$\gamma^{g_{\cdot,\cdot}}_\cdot\ :\ \Lambda_1\longrightarrow\bigcup_{\lambda_1\in\Lambda_1}\mathbf{Map}\big(\Lambda_2,\bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2} G_{\lambda_1,\lambda_2}\big)$$

o wartościach danych przez odwzorowania

$$\gamma^{g_{\cdot,\cdot}}_{\lambda_1}\ :\ \Lambda_2\longrightarrow\bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2} G_{\lambda_1,\lambda_2}\ :\ \lambda_2\longmapsto g_{\lambda_1,\lambda_2}\,.$$

Endomorfizm złożony $\iota_2\circ\widetilde{\tau}\circ\iota_1^{-1}$ grupy przemiennej $\prod_{(n,\lambda)\in\overline{1,N}\times\Lambda} H_\lambda$ jest injektywny wprost z konstrukcji, ale też bez trudu stwierdzamy, że jest to endomorfizm identycznościowy, co przesądza o bijektywnym charakterze $\widetilde{\tau}$. □

Ilekroć pierścień bazowy jest przemienny, w *naturalny* sposób pojawia się dodatkowa struktura algebraiczna na grupie przemiennej $G_1 \otimes_R G_2$ z Def. 2. Ażeby uwypuklić znaczenie przemienności R, prześledźmy następujące rozumowanie, którego celem jest wyindukowanie na rzeczonej grupie struktury R-modułu przy użyciu istniejących działań R na czynnikach iloczynu tensorowego. Oczywisty kandydat do roli R-działania (lewostronnego) to odwzorowanie

$$\begin{aligned} \ell^{\otimes}_{\cdot} \quad &: \quad R \times (G_1 \otimes_R G_2) \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2 \\ &: \quad \Big(r, \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big) \\ &\quad \longmapsto \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r \triangleright_{(2)} g_2)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Na pierwszy rzut oka odwzorowanie to ma pożądaną własność (wypisaną dla dowolnych $r_1, r_2 \in R$)

$$\begin{aligned} &\ell^{\otimes}_{r_1} \circ \ell^{\otimes}_{r_2}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big) \\ &= \ell^{\otimes}_{r_1}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_2 \triangleright_{(2)} g_2)\Big) \\ &= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \otimes_R r_1 \triangleright_{(2)} (r_2 \triangleright_{(2)} g_2)\big) \\ &= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \otimes_R (r_1 \cdot_R r_2) \triangleright_{(2)} g_2\big) \\ &\equiv \ell^{\otimes}_{r_1\cdot_R r_2}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big)\,. \end{aligned}$$

Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę śród-R-jednorodność $\otimes_R$, to natrafimy na kłopot, oto bowiem otrzymujemy tożsamość

$$\begin{aligned} &\ell^{\otimes}_{r_1} \circ \ell^{\otimes}_{r_2}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big) \\ &= \ell^{\otimes}_{r_1}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_2 \triangleright_{(2)} g_2)\Big) \\ &= \ell^{\otimes}_{r_1}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \triangleleft_{(1)} r_2 \otimes_R g_2)\Big) \\ &= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \triangleleft_{(1)} r_2 \otimes_R r_1 \triangleright_{(2)} g_2\big) \\ &= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big((g_1 \triangleleft_{(1)} r_2) \triangleleft_{(1)} r_1 \otimes_R g_2\big) \\ &= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \triangleleft_{(1)} (r_2 \cdot_R r_1) \otimes_R g_2\big) \\ &= \sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright \big(g_1 \otimes_R (r_2 \cdot_R r_1) \triangleright_{(2)} g_2\big) \\ &\equiv \ell^{\otimes}_{r_2\cdot_R r_1}\Big(\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \nu(g_1,g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)\Big)\,, \end{aligned}$$

która wymaga, dla uniknięcia sprzeczności z tą uzyskaną poprzednio, iżby

$$\forall_{r_1,r_2\in R} \ : \ r_1 \cdot_R r_2 = r_2 \cdot_R r_1\,,$$

tj., iżby R był przemienny. Przyjmując to za punkt wyjścia do dalszych rozważań, wprowadzamy

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 2, przy czym niechaj R będzie pierścieniem przemiennym. Struktura R-modułu na $G_1 \otimes_R G_2$ jest zadawana przez odwzorowanie (działanie) (12). Analogicznie definiujemy strukturę R-modułu na n-krotnym iloczynie tensorowym rodziny modułów $\{G_A\}_{A\in\overline{1,n}}$ z Def. 4 przy $R_l := R,\ l \in \overline{1, n-1}$.

Jako natychmiastowe corollarium do Stw. 10 otrzymujemy

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy zapis Def. 5 i Stw. 10. Jeśli oba moduły G_1 i G_2 są wolne, przy czym odnośne bazy to $\{g^{(1)}_{\lambda_1}\}_{\lambda_1\in\Lambda_1}$ i $\{g^{(2)}_{\lambda_2}\}_{\lambda_2\in\Lambda_2}$, to także R-moduł $G_1 \otimes_R G_2$ jest wolny, a rodzina $\{g^{(1)}_{\lambda_1} \otimes_R g^{(2)}_{\lambda_2}\}_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}$ jest jego bazą.

Dowód: Oczywisty. $\square$