

Zaawansowana pracownia komputerowa 2010/11
Zadania domowe, seria 3 (*Maple*)

Zad. 1

Znajdź granice funkcji:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right)$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^a \ln x) \quad a > 0$$

Zad. 2

Oblicz następujące całki nieoznaczone, spróbuj uprościć wyniki:

1.

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad \Delta > 0$$

2.

$$\int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + bx + c)^2} \quad \Delta > 0$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sin^2(ax) \cos(ax)}$$

4.

$$\int \frac{dx}{\exp(x) + 2 \exp(-2x)}$$

5.

$$\int x \exp(2x) \sin(3x) dx$$

Zad. 3

Zdefiniuj funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & -1 \\ x \geq 0 & x \sin x - 1 \end{cases}$$

Narysuj jej wykres i policz całkę

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Zad. 4

Znajdź rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $\cosh(x)$ wokół $x_0 = 0$. Wyznacz rząd rozwinięcia, który trzeba użyć, aby dla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ maksymalny błąd był nie większy niż 10^{-3} . Stwórz wykres porównujący obie funkcje.

Zad. 5

Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Zbadaj funkcję $f(x)$ wyznaczając:

1. Miejsca zerowe
2. Granice funkcji dla punktów $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 2^+$, $x \rightarrow 2^-$
3. Asymptotę ukośną $y = ax + b$, gdzie

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

4. Ekstrema funkcji ($f' = 0$) oraz jej wartość w tych punktach
5. Punkty przegięcia ($f'' = 0$)

Stwórz wykres prezentujący funkcję oraz jej asymptotę. Dobierz skale osi, tak, aby ukazać istotny fragment wykresu. Odpowiednio ponazywaj osie oraz stwórz legendę wykresu.

Zad. 6

Armata strzela pod kątem α względem powierzchni Ziemi pociskiem o masie m , nadając mu prędkość początkową v_0 . Rozwiąż równanie ruchu biorąc pod uwagę współczynnik oporu powietrza γ . Znajdź zasięg dla danych $m = 4,1 \text{ kg}$, $v_0 = 439 \text{ m/s}$, $\gamma = 0,92$ oraz dla kątów $\alpha = 5^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ (dane dla armaty 12-funtowej z 1853 roku) przy założeniu, że przyspieszenie ziemskie ma wartość $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Stwórz wykresy prezentujący te trzy trajektorie.

Wskazówka: Równania ruchu kuli armatniej są następujące:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - \gamma\dot{y} \end{cases}$$

Zad. 7

Dla skoczka z zamkniętym spadochronem prędkość graniczna (prędkość, przy której siła oporu powietrza i siła grawitacji równoważą się) wynosi 195 km/h . Zakładając, że skoczek ma masę $m = 70 \text{ kg}$ oraz siła oporu jest proporcjonalna do kwadratu prędkości, znajdź współczynnik tej proporcjonalności (współczynnik oporu). Znajdź zmianę prędkości w czasie zakładając, że prędkość początkowa jest równa 0. Znajdź czas, po jakim skoczek osiąga prędkość 194.9 km/h . Narysuj wykres zmiany prędkości w czasie, gdzie prędkość podana jest w km/h , a czas – w sekundach. *Wskazówka:* Przy założeniu, że skoczek porusza się pionowo w kierunku ziemi, można wybrać układ współrzędnych tak, aby jego oś x była skierowana równoległe do toru ruchu. Wtedy, jeśli v oznacza prędkość skoczka, otrzymujemy równanie ruchu:

$$m\dot{v} = mg - \lambda v^2,$$

gdzie λ jest poszukiwanym współczynnikiem oporu powietrza.