

* oznacza zadanie o większym stopniu trudności.

1. Proszę napisać program obliczający granicę ciągu:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

z dokładnością 10^{-9} .

Wskazówka: Obliczenia proszę przerwać w kroku, w którym różnica elementu a_{n+1} i a_n stanie się mniejsza od zadanej w programie dokładności.

2. Korzystając z obserwacji, że:

$$e^{(x+1)^2} = e^{x^2} e^{2x} e$$

oraz

$$e^{2x} = e^{x+x} = (e^x)^2$$

proszę napisać program obliczający iteracyjnie (bieżącą wartość obliczamy na podstawie wyników z poprzedniego kroku) przybliżone wartości funkcji e^{x^2} dla liczb całkowitych od 0 do 10 (począwszy od $x = 0$) i porównać je (tzn. obliczyć różnice) z wartościami otrzymanymi przy pomocy funkcji bibliotecznej `exp()`.

Wskazówka: Należy skonstruować ciąg $a_k = e^{k^2}$ znajdując związek między a_k oraz a_{k-1} . Można przyjąć, że wartość liczby e jest równa wartości stałej `M_E` zdefiniowanej w bibliotece `cmath`.

3. Pierwiastkowanie kwadratowe metodą Isaaca Newtona.

Jest to metoda iteracyjna, w której pierwiastek stopnia n z a oblicza się według wzoru

$$(1) \quad x_{j+1} = x_j - \frac{x_j^n - a}{n x_j^{n-1}}$$

gdzie x_j oznacza przybliżenie wartości pierwiastka otrzymane w kroku j (tzn. x_{j+1} stanowi lepsze przybliżenie $\sqrt[n]{a}$, niż x_j).

W szczególności, dla $n = 2$,

$$(2) \quad x_{j+1} = x_j - \frac{x_j^2 - a}{2x_j}$$

Korzystając z wzoru (2) napisz program obliczający przybliżoną wartość $\sqrt{2}$ z dokładnością 10^{-6} , zaczynając od $x_0 = 3/2$.

4. *Pierwiastkowanie ogólne metodą Isaaca Newtona.

Korzystając z wzoru (1) proszę napisać program liczący $\sqrt[n]{a}$ dla dowolnej wybranej liczby a (można przyjąć, że a zawsze będzie liczbą nieujemną). Program powinien być tak zaprojektowany, aby działał poprawnie dla dowolnych a i n .