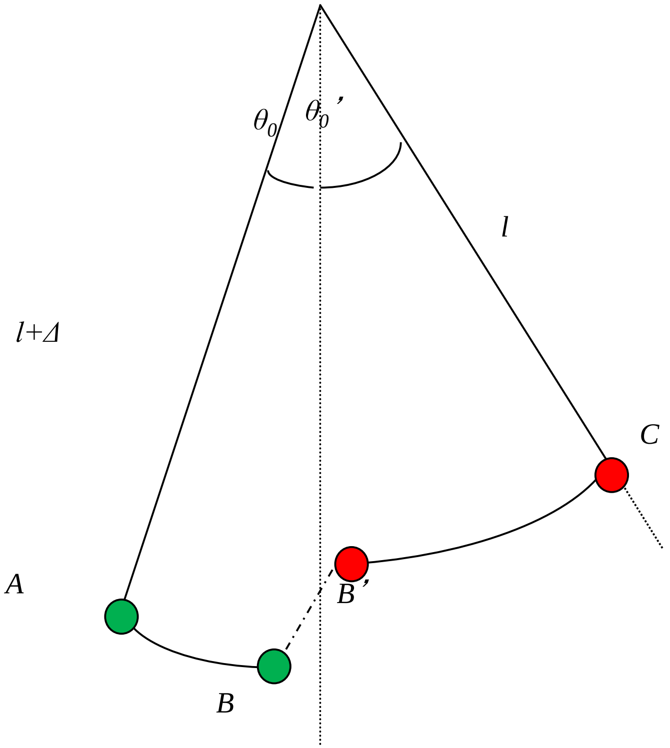
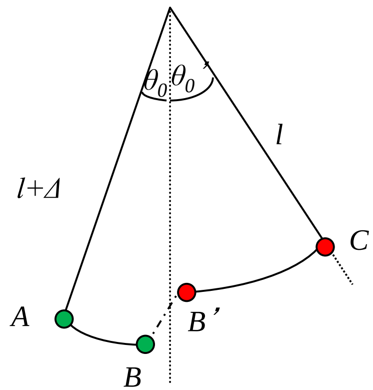
Wykład 2

Wahadło – rezonans parametryczny



Wykład 2

Wahadło - rezonans parametryczny



$$\Delta E = E_A - E_B = mg(l+\Delta)(1-\cos\theta_0)$$

$$= E_{kinB} = \tfrac{m}{2}\left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2 (l+\Delta)^2$$

$$I_B \omega_B = I_{B'} \omega_{B'}$$

$$m(l+\Delta)^2 \left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)\Big|_B = ml^2 \left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)\Big|_{B'}$$

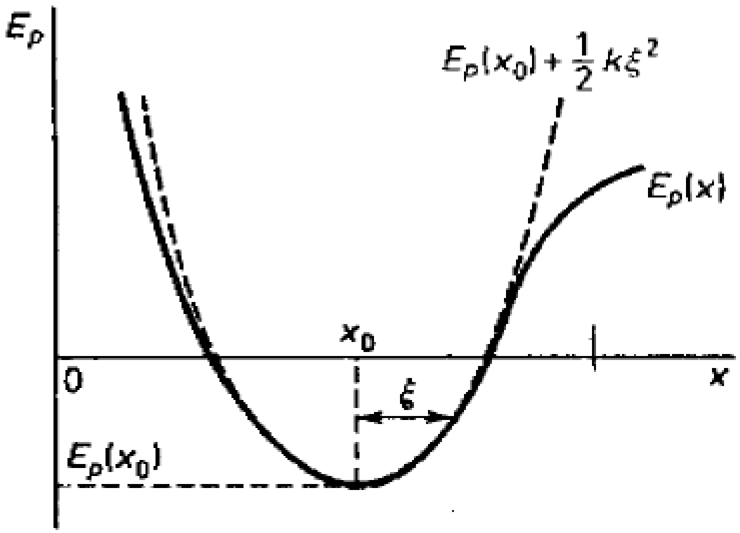
$$E_{kinB'} = \tfrac{m}{2}\left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2 l^2 = mgl(1-\cos\theta_0')$$

$$\omega^2{}_B = \frac{2g(1-\cos\theta_0)}{l+\Delta} \qquad \omega^2{}_{B'} = \frac{2g(1-\cos\theta_0')}{l}$$

$$(l+\Delta)^3 (1-\cos\theta_0) = l^3 (1-\cos\theta_0')$$

$$(1+\tfrac{\Delta}{l})^3 (1-\cos\theta_0) = 1-\cos\theta_0' \qquad \Rightarrow \theta_0' > \theta_0$$

Wykład 2

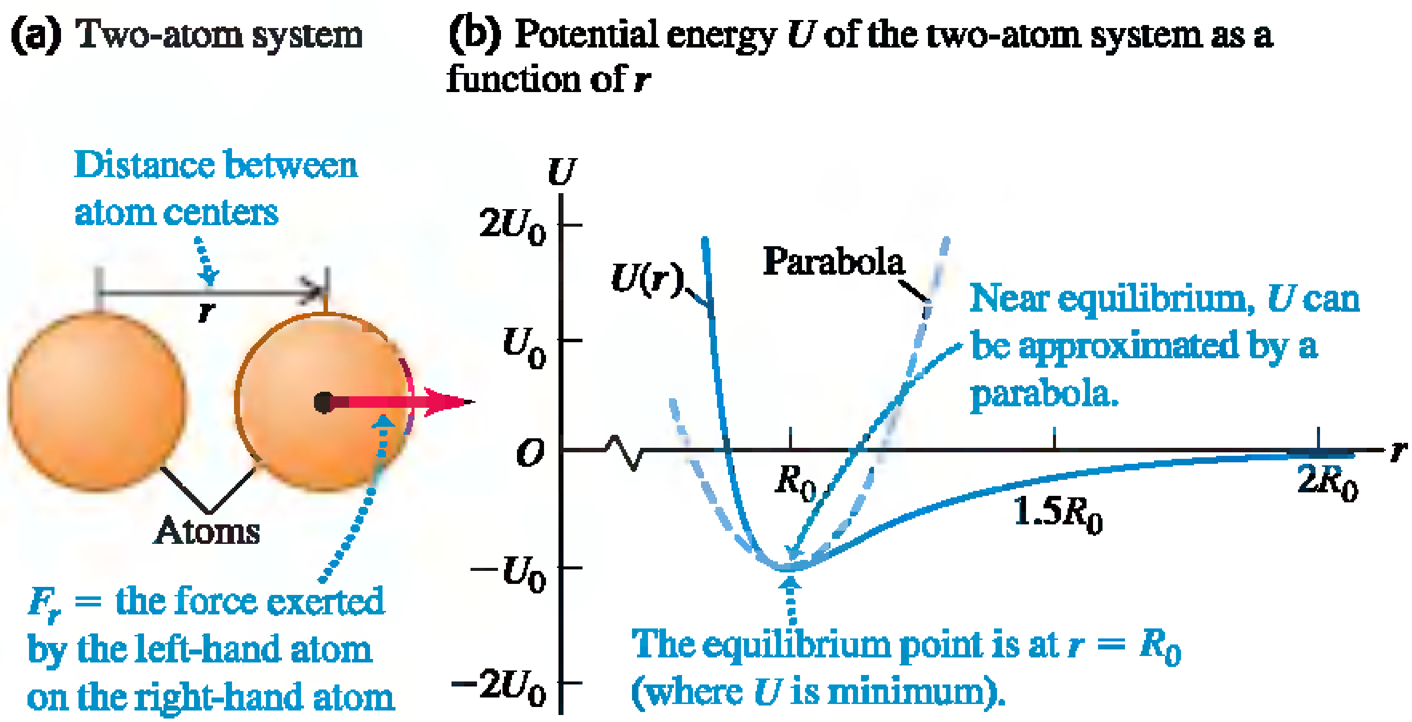


$$U(x) = U(x_0) + \cancel{(x-x_0)\frac{dU}{dx}\bigg|_{x_0}} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\,\frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x_0} + \ldots\ldots$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$F(x) = -\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)\times(x-x_0) = -k(x-x_0)$$

Cząsteczka Ar_2



Oddziaływanie van der Waalsa

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right]$$

Young and Freedman, *University Physics*, Pearson International Edition

Wykład 2

Cząsteczka Ar_2

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right] \Rightarrow F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{1}{1+x/R_0}\right)^{13} - \left(\frac{1}{1+x/R_0}\right)^{7}\right]$$

$$x = r - R_0$$

$$x/R_0 << 1$$

$$F_r \approx -\left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x = -kx$$

$$U_0 = 1.68\cdot 10^{-21} J$$

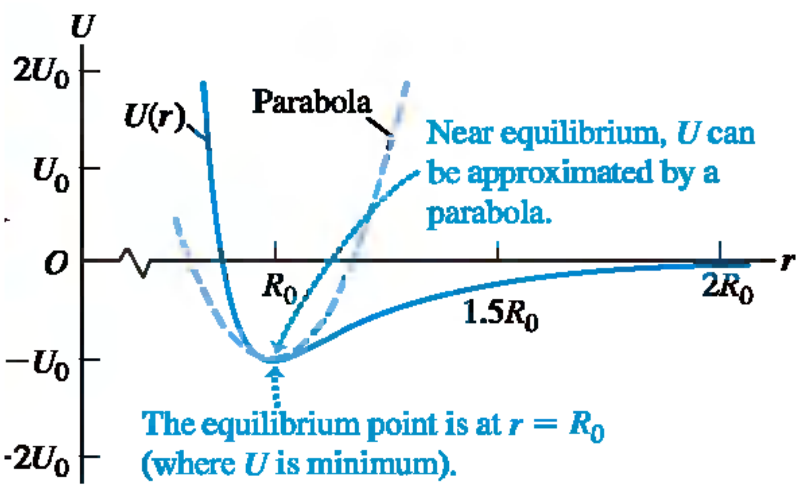
$$R_0 = 3.82\cdot 10^{-10} m$$

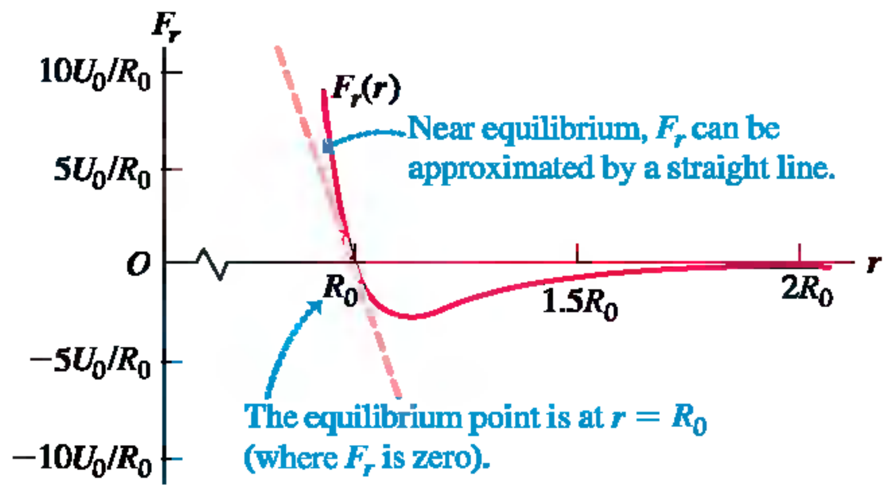
$$m = 6.63\cdot 10^{-26} kg$$

$$\Rightarrow$$

$$k = 0.829 N/m$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = 8\cdot 10^{11} Hz$$

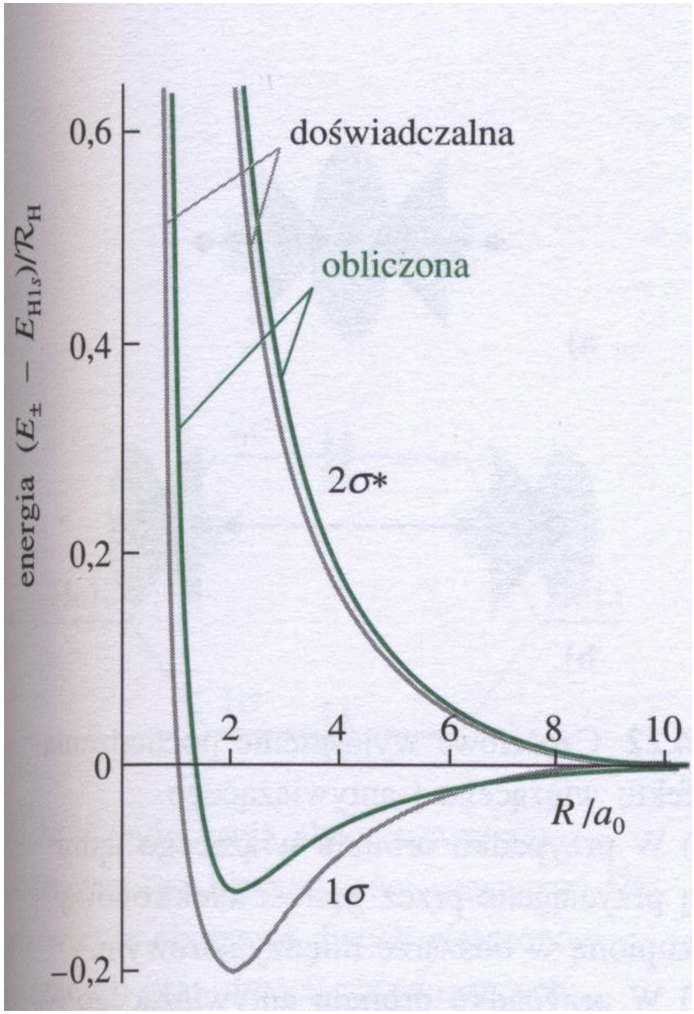




Young and Freedman, *University Physics*, Pearson International Edition

Wykład 1

Cząsteczka H_2^+



$$f_0 = 6.9 \cdot 10^{13} Hz$$

P.W. Atkins, Chemia fizyczna, PWN

Oscylator anharmoniczny

Np.

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}skx^3 \qquad sA << 1$$

$$F = -kx + skx^2$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - s\omega_0^2 x^2 = 0 \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

$$x = A(\cos(\omega t) + q\cos(2\omega t)) + x_1$$

$$\dot{x} = -A\omega(\sin(\omega t) + 2q\sin(2\omega t))$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2(\cos(\omega t) + 4q\cos(2\omega t))$$

$$x^2 = A^2(\cos^2(\omega t) + 2q\cos(\omega t)\cos(2\omega t) + q^2\cos^2(2\omega t)) + \ldots$$

Oscylator anharmoniczny

$$-A\omega^2(\cos(\omega t)+4q\cos(2\omega t)+$$

$$+\omega_0^2 A(\cos(\omega t+q\cos(2\omega t))+\omega_0^2 x_1+$$

$$-s\omega_0^2 A^2\cos^2(\omega t)+\ldots=0$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

$$\cos(\omega t)A(\omega_0^2-\omega^2)=0\Rightarrow\omega=\omega_0$$

$$\cos(2\omega t)A\left(\omega_0^2 q-\omega^2 4q-\frac{1}{2}s\omega_0^2 A\right)=0 \qquad q=-\frac{1}{6}sA$$

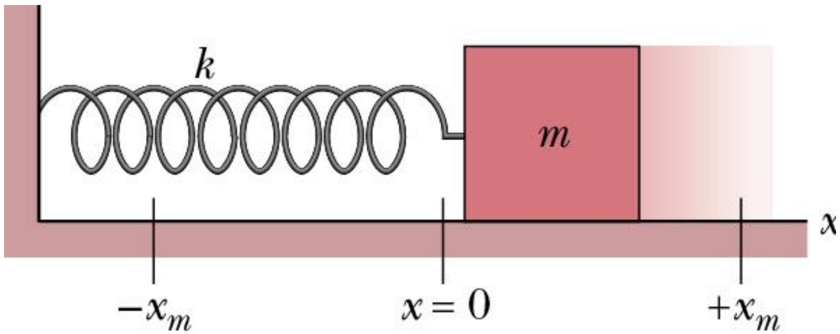
wyraz stały $\qquad x_1=\frac{1}{2}sA^2$

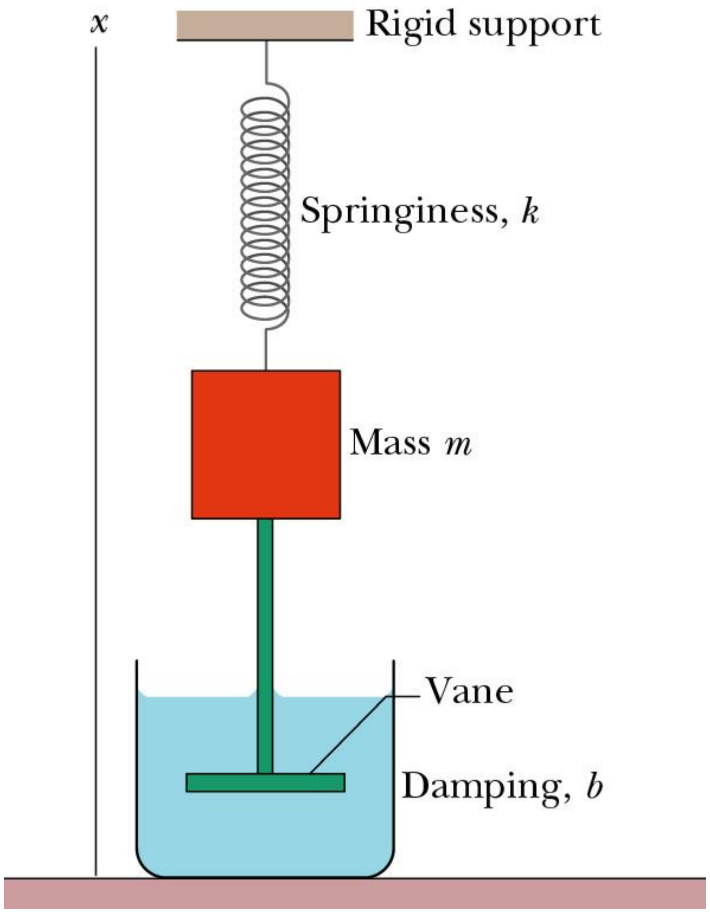
Oscylator anharmoniczny

$$x = A\left(\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{6} sA\cos(2\omega_0 t)\right) + \frac{1}{2} sA^2$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} sA^2 \propto T$$

Drgania tłumione





D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *Podstawy fizyki*

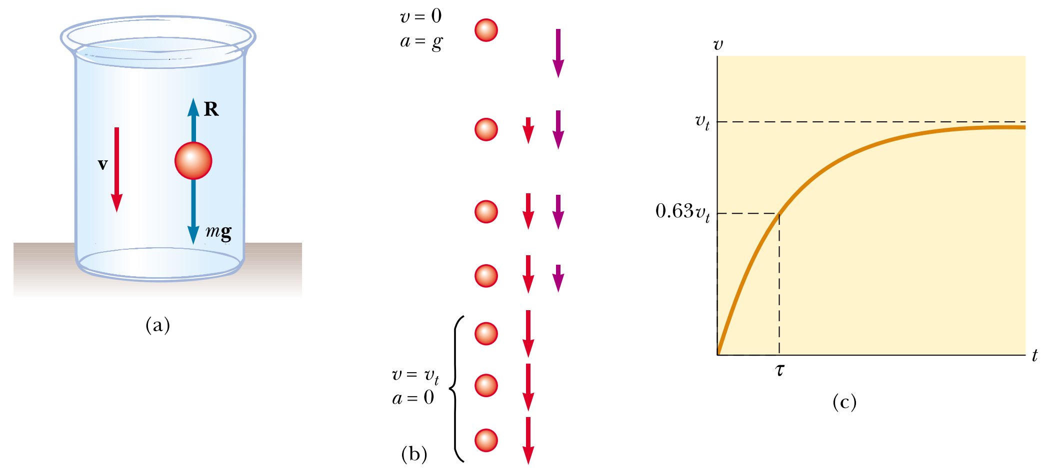
Siła oporu:

$$\vec{F}_{op} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

dla powietrza lepkość: $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \dfrac{kg}{ms}$

Ogólnie siła oporu: $$F_{op} = -b\frac{dx}{dt} = -bv$$

Siła oporu



Dla małych prędkości: $\vec{F}_{op} = -k\vec{v}$

Dla dużych prędkości: $\vec{F}_{op} = -Dv^2 \frac{\vec{v}}{v}$

$$D = \frac{1}{2} C r S$$

Halliday, Resnick, Walker, *Fundamentals of Physics*

C- współczynnik oporu
ρ- gęstość
S – przekrój poprzeczny

Wykład 1

Prędkość graniczna (duże prędkości):

$$mg = Dv_t^2$$

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}}$$

Ile wynosi prędkość graniczna skoczka spadochronowego *(m=70 kg, D=0.25 kg/m)?*

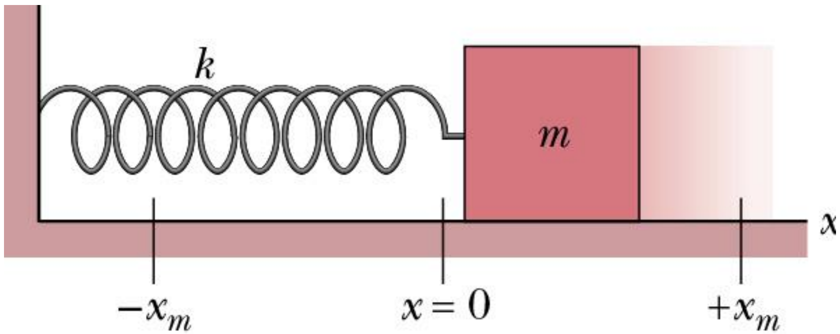
$$v_t = 52.4\frac{m}{s} = 188\frac{km}{h}$$

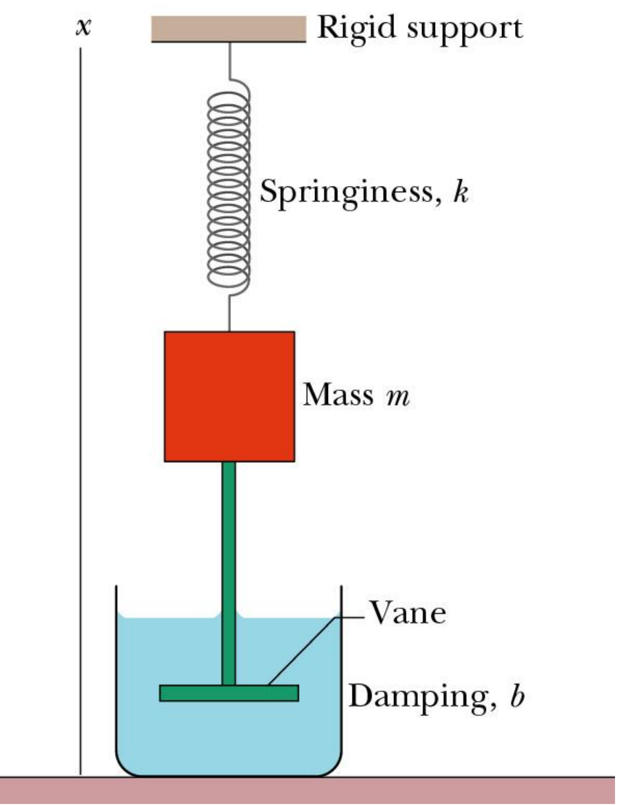
Halliday, Resnick, Walker, *Fundamentals of Physics*

Średnie prędkości graniczne w powietrzu:

Skoczek (przed otwarciem spadochronu)	200 km/h
Piłka baseballowa	150 km/h
Piłka tenisowa	110 km/h
Piłka pingpongowa	30 km/h
Kropla deszczu	25 km/h
Skoczek (po otwarciu spadochronu)	18 km/h

Drgania tłumione





$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + b\frac{dx}{dt} = 0$$

$$2\beta = \frac{b}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = Ae^{\lambda t}$$

Równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker ***Podstawy fizyki***

Wykład 2

w zależności od relacji pomiędzy współczynnikiem tłumienia a częstością ruchu swobodnego pierwiastki równania charakterystycznego przyjmują następujące wartości:

$$\beta < \omega_o$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$$

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$$

dwa pierwiastki o wartościach zespolonych

$$\beta = \omega_0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$$

pierwiastek podwójny

$$\beta > \omega_0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

dwa pierwiastki rzeczywiste

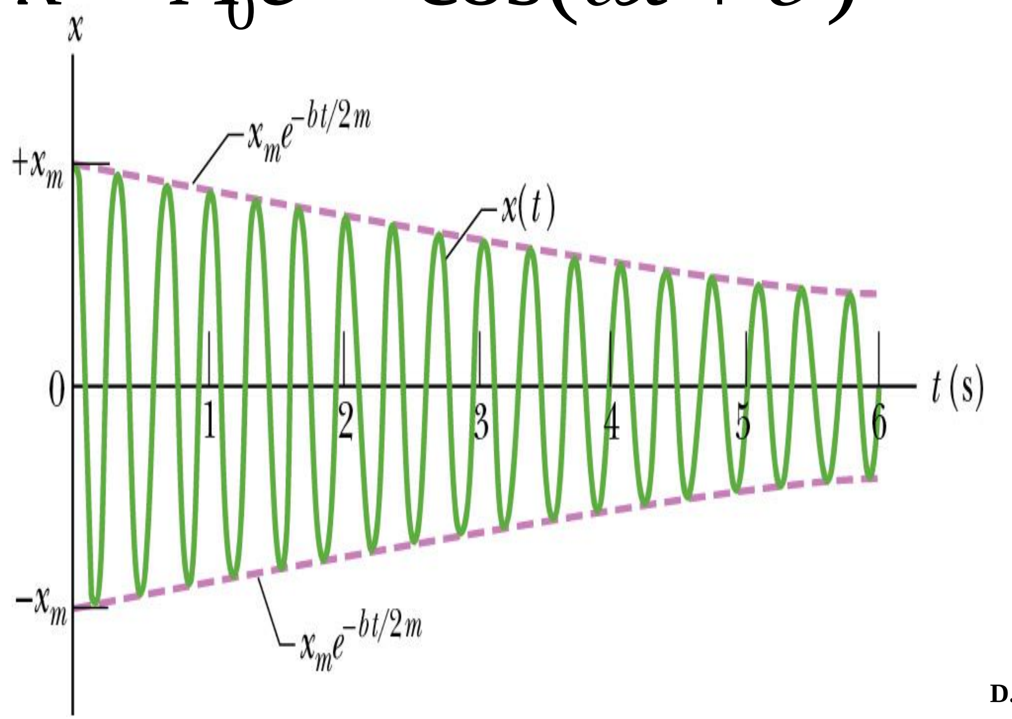
1. Słabe tłumienie $\beta < \omega_o$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$$ gdzie

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$$

$$x = A_1 e^{(-\beta - i\omega)t} + A_2 e^{(-\beta + i\omega)t}$$

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta) = A(t)\cos(\omega t + \delta)$$

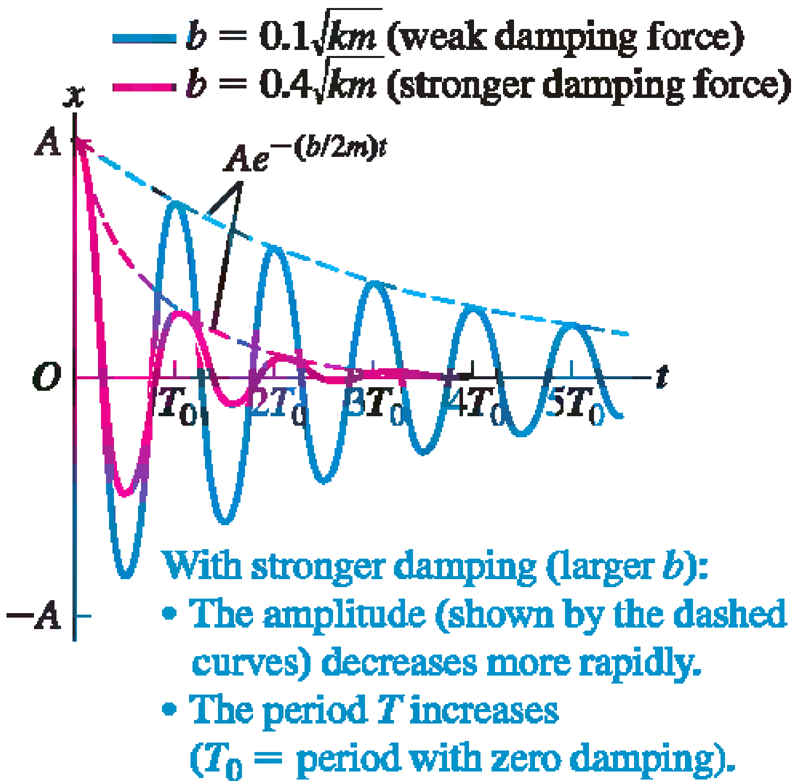


- obserwujemy drgania o amplitudzie malejącej w czasie
- częstotliwość drgań jest mniejsza niż częstotliwość drgań nie tłumionych

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *Podstawy fizyki*

1. Słabe tłumienie $\beta < \omega_o$ $x = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$



Young and Freedman, *University Physics*, Pearson International Edition

Wykład 2

czas relaksacji

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e \qquad \beta\tau = 1$$

logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\Lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{b}{2m}T$$

dobroć układu drgającego

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi\tau}{T} = \pi n_e$$

równoważne

$$Q = 2\pi\,\frac{E}{\Delta E(t,t+T)}$$

Wykład 2 Tłumienie słabe $\beta < \omega_o$

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos\omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t}\cos\omega t - \omega A_0 e^{-\beta t}\sin\omega t \qquad \frac{\omega}{\beta} = tg\,\phi$$

$$= -\beta A_0 e^{-\beta t}(\cos\omega t + tg\,\phi\sin\omega t)$$

$$= -\beta A_0 e^{-\beta t}(\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi)\frac{1}{\cos\phi} \qquad \cos^2\phi = \frac{1}{1+tg^2\phi}$$

$$= -A_0 e^{-\beta t}\frac{\beta}{\cos\phi}\cos(\omega t - \phi) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

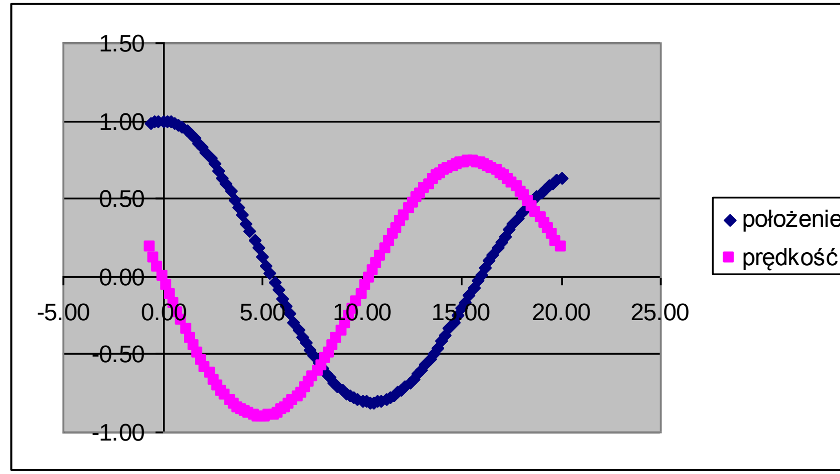
$$= -A_0 e^{-\beta t}\sqrt{\beta^2 + \omega^2}\cos(\omega t - \phi) = -A_0 e^{-\beta t}\omega_0\cos(\omega t - \phi)$$

$$\beta = 0 \Rightarrow tg\,\phi = \infty \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \sin\omega t$$

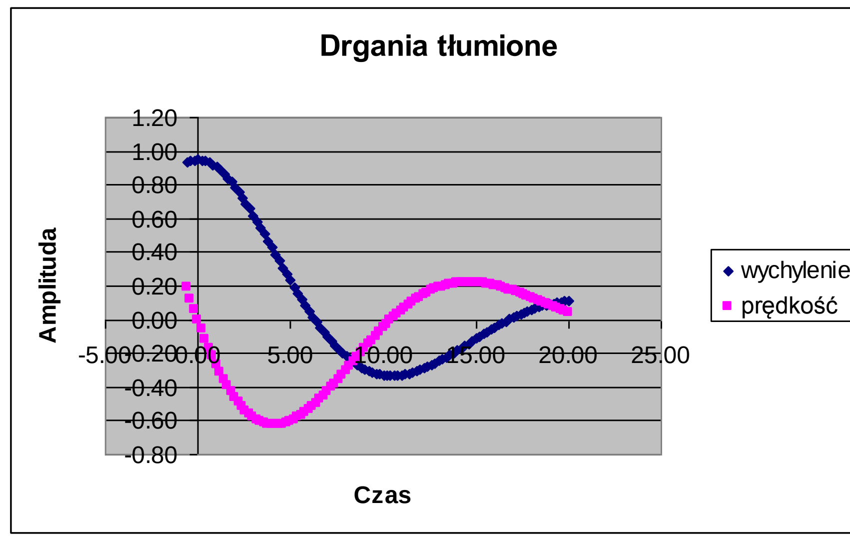
$$\frac{dx}{dt} = -A_0\omega_0\sin\omega t$$

Wykład 2 $x = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$

$\beta = 0.02,\ \omega = 0.3,\ \varphi = -0.007$



$\beta = 0.1,\ \omega = 0.3,\ \varphi = -0.32$



Średnia energia układu (słabe tłumienie)

$$\left\langle E_p \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}kx^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t}\cos^2(\omega t) \right\rangle \approx \frac{1}{4}kA^2 e^{-2\beta t}$$

$$\left\langle E_k \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-2\beta t}\cos^2(\omega t - \phi) \right\rangle$$

$$\left\langle E_k \right\rangle \approx \frac{1}{4}kA^2 e^{-2\beta t}$$

$$\left\langle E \right\rangle = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t}$$

Moc tracona przez układ: $$\left\langle P \right\rangle = \frac{d\left\langle E \right\rangle}{dt} = -k\beta A^2 e^{-2\beta t}$$

Wykład 2

$$\langle P\rangle = \langle F_{op}v\rangle = \langle -bv\cdot v\rangle = \langle -2\beta mA^2e^{-2\beta t}\omega_0^2\cos^2(\omega t-\phi)\rangle$$

$$\langle P\rangle \approx -\beta kA^2e^{-2\beta t}$$

Dobroć

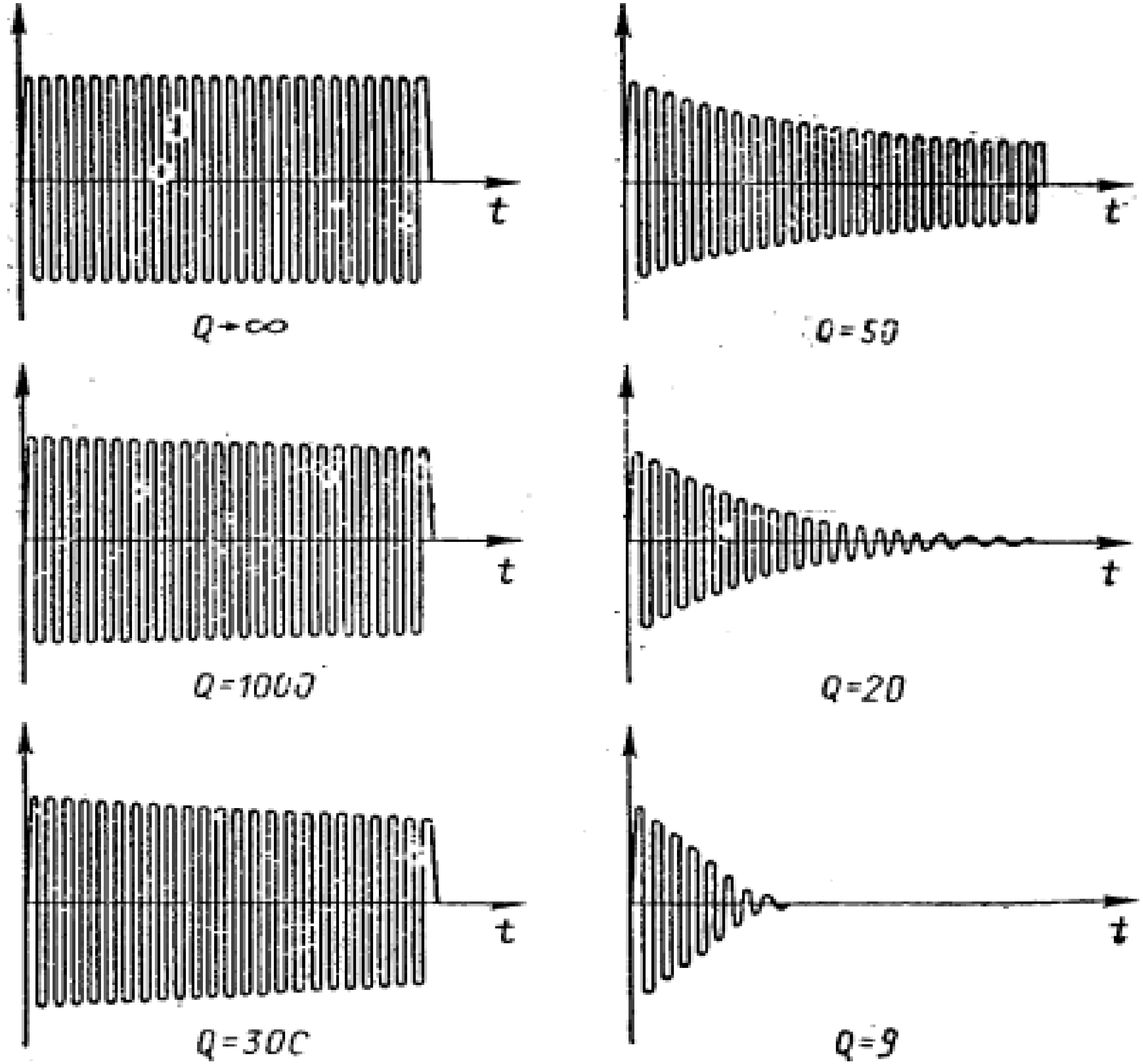
$$Q = 2\pi\frac{\langle E\rangle}{\langle P\rangle T} = 2\pi\frac{(1/2)kA^2e^{-2\beta t}}{\beta kA^2e^{-2\beta t}T} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\omega}{2\beta}$$

Kilka typowych wartości Q

Ziemia dla fal sejsmicznych	250-1400
Struna fortepianu lub skrzypiec	10^3
Rezonator mikrofal z wnęką miedzianą	10^4
Atom wzbudzony	10^7
Jądro wzbudzone	10^{12}

Wykład 2

$$Q = 2\pi \,\frac{E}{\Delta E}$$



Wykład 2

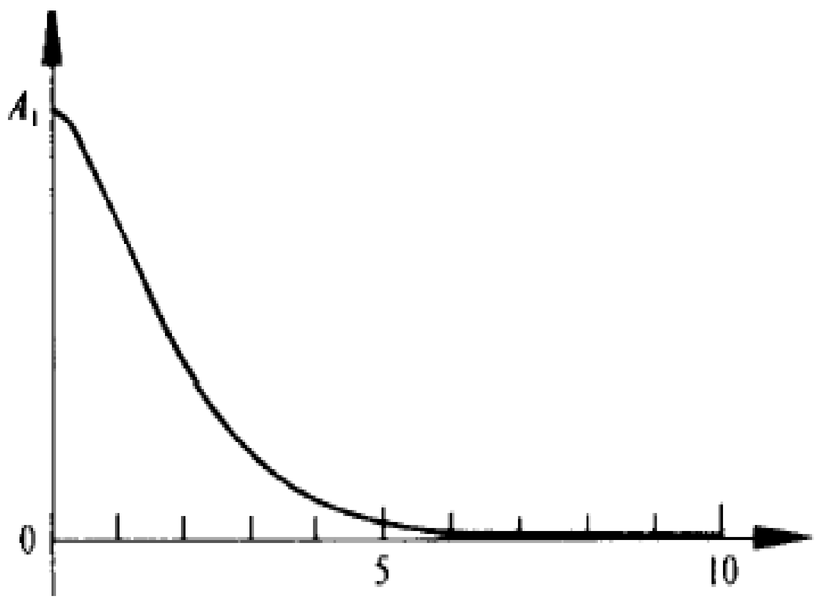
2. Tłumienie krytyczne

$$\beta = \omega_0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$$

rozwiązanie ma postać:

$$x = (A + Bt)e^{-\beta t}$$



Jeżeli równanie charakterystyczne ma jednakowe pierwiastki rozwiązanie jest kombinacją wielomianu i funkcji eksponencjalnej

Tłumienie krytyczne $\beta = \omega_0$

$$x = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

Warunki początkowe, np.

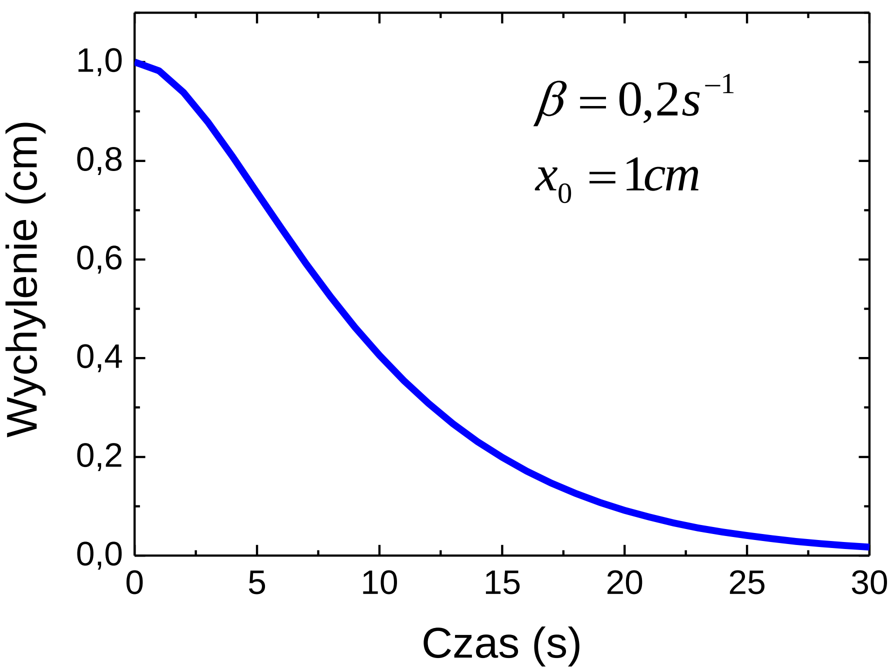
$$x(t=0) = x_0 = A$$

$$\frac{dx}{dt}(t=0) = B - A\beta = 0$$

$$B = A\beta = x_0\beta$$

$$x = x_0(1 + \beta t)e^{-\beta t}$$

$$x = x_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$



Tłumienie krytyczne $\beta = \omega_0$

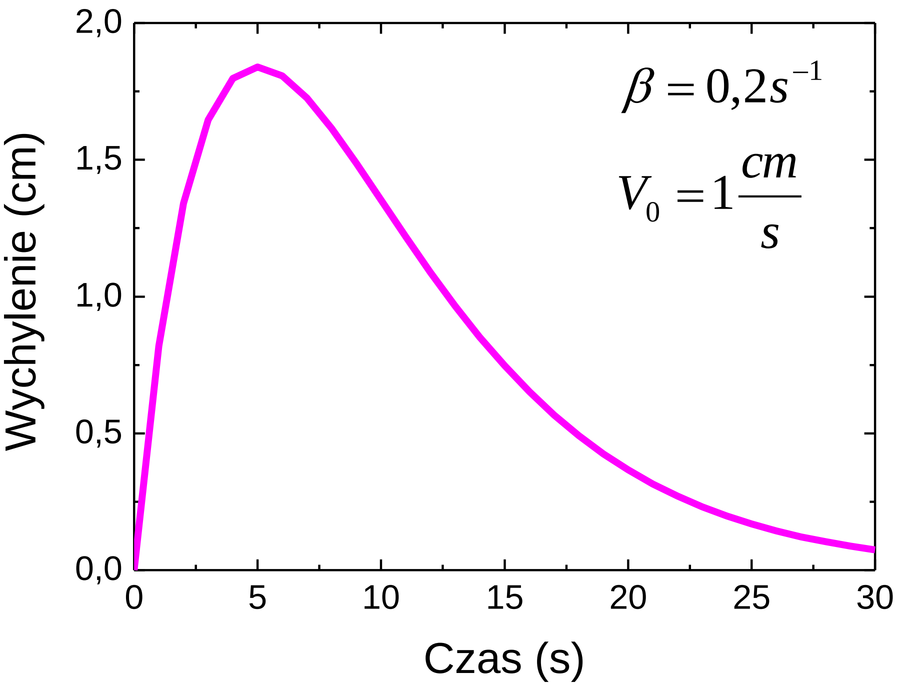
$$x = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

Warunki początkowe, np.

$$x(t=0) = 0 = A$$

$$\frac{dx}{dt}(t=0) = B - A\beta = V_0$$

$$x = V_0 t e^{-\beta t}$$



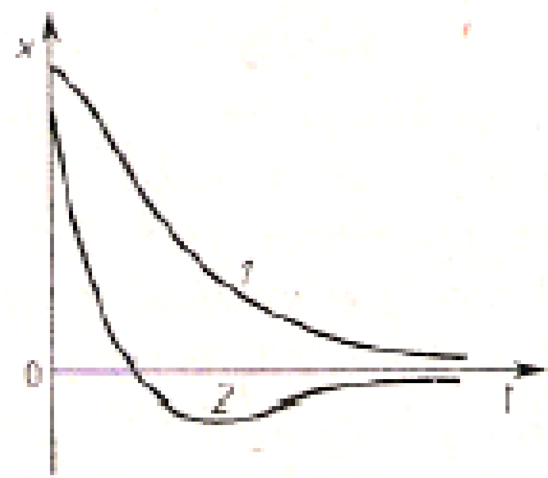
3. Silne tłumienie $\beta > \omega_0$ $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i ujemne

rozwiązanie równania ruchu ma postać: $$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

czyli sumy eksponencjalnych zaników
to czy nastąpi jednorazowe przejście przez punkt
równowagi zależy od warunków początkowych

ruch aperiodyczny



Tłumienie silne

$$\beta > \omega_0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Warunki początkowe, np.

$$x(t=0) = A_1 + A_2 = x_0$$

$$\frac{dx}{dt} = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$$

$$A_2 = x_0 - A_1$$

$$A_1\lambda_1 + (x_0 - A_1)\lambda_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{-x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad A_2 = \frac{x_0\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}\right)$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \qquad x = \frac{x_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t})$$

Tłumienie bardzo silne

$$\beta >> \omega_0$$

$$\lambda_1 \approx 0 \qquad \lambda_2 \approx -2\beta$$

$$x = \frac{x_0}{2\beta}(2\beta e^{-\lambda_1 t}) = x_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$x = x_0 e^{(-\beta + \beta(1 - \frac{\omega_0^2}{2\beta^2} \ldots))t} = x_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{2\beta}t}$$

Bardzo powolny zanik wychylenia

Wykład 2

porównanie czynników tłumiących dla tych trzech przypadków

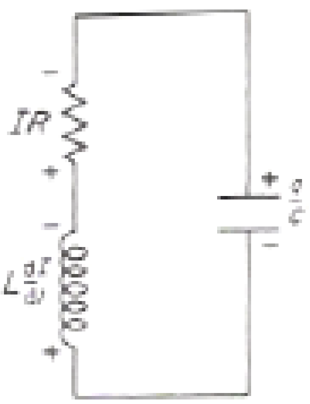
Tłumienie słabe	$\beta = \frac{b}{2m} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$-\beta$
Tłumienie krytyczne	$\beta = \omega_0$	$-\beta$
Tłumienie silne	$\beta > \omega_0$	$-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Wykład 2

$$-L\frac{dI}{dt}-\frac{Q}{C}=RI$$

$$I=\frac{dQ}{dt}$$

Układ LRC



$L\frac{dI}{dt}+IR+\frac{q}{C}=0$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{LC}Q=0$$

$$\frac{R}{L}=2\beta$$

$$\frac{1}{LC}=\omega_0^2$$

$$\omega^2=\omega_0^2-\beta^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$$

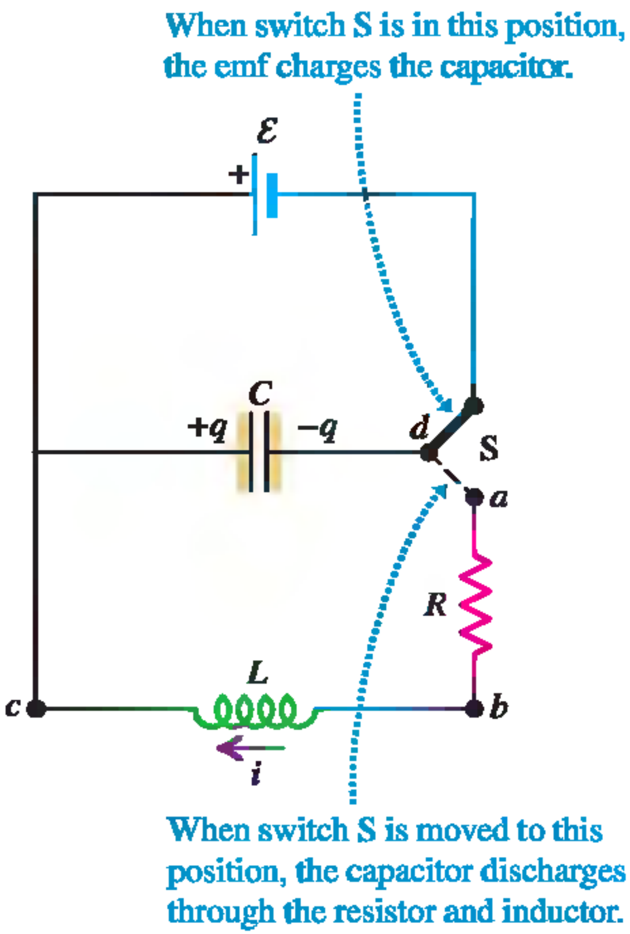
dla $\frac{1}{LC}>\frac{R^2}{4L^2}$

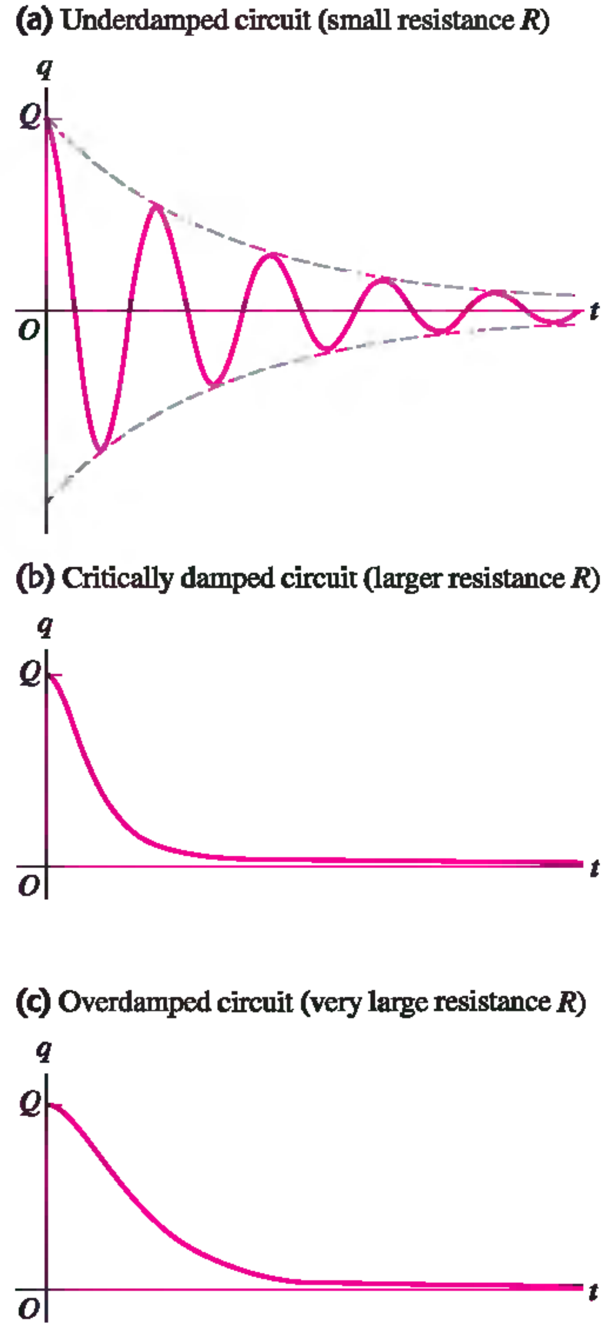
i rozwiązanie ma postać

$$Q=Q_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\delta)$$

Wykład 2

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = 0$$





Young and Freedman, *University Physics*, Pearson International Edition