ZADANIE NUMERYCZNE - METODA EULERA

Chcemy znaleźć zasięg oraz tor lotu kuli armatniej wystrzelonej pod kątem $\alpha = 30°$ o promieniu $r = 2{,}5$ cm i wykonanej z żelaza przy uwzględnieniu oporów areodynamicznych

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{2} k_2 S \rho_p v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$

S - przekrój poprzeczny kuli

ρ_p - gęstość powietrza

ρ_{Fe} - gęstość żelaza

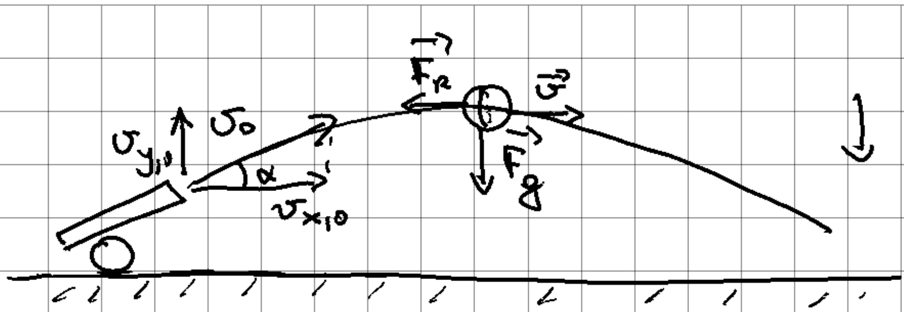
k_2 - współczynnik oporu areodynamicznego

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ - dł. wektora prędkości

v_0 - prędkość początkowa kuli

$g = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$, $k_2 = 0{,}45$, $S = \pi r^2$, $v_0 = 300 \frac{m}{s}$

$\rho_p = 1{,}2$ kg/m^3, $\rho_{Fe} = 7900$ kg/m^3



$$v_{x,0} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{y,0} = v_0 \sin\alpha$$

Równania ruchu:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\[2ex] v_y = \dfrac{dy}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\[2ex] \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{F_x}{m} = -\zeta \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, v_x \\[2ex] \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{F_y}{m} = -\zeta \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, v_y - g, \end{cases}$$

gdzie $\zeta = \frac{1}{2} k_2 S \rho_p / \Big(\underbrace{\tfrac{4}{3}\pi r^3 \rho_{Fe}}_{m}\Big)$

posługując się tymi równaniami i wybierając pewien krótki krok czasowy Δt możemy zapisać powyższe równania w postaci różnicowej między krokiem $n+1$ i n.

Krok algorytmu: dopóki $y_n > 0$ powtarzaj

$$x_{n+1} = x_n + v_{x,n} \Delta t$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{y,n} \Delta t$$

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} - \zeta v_n v_{x,n} \Delta t$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{y,n} \Delta t$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} - \zeta v_n v_{y,n} \Delta t - g \Delta t \,,$$

gdzie $v_n = \sqrt{v_{x,n}^2 + v_{y,n}^2}$

n – krok algorytmu

$\Delta t = 0{,}01\,s$ ← od tego parametru zależy dokładność obliczeń (im mniejsze tym lepiej)

Inicjalizacja algorytmu (krok $n=0$)

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$v_{x,0} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{y,0} = v_0 \sin\alpha$$

Metoda ta jest nazywana algorytmem Eulera.

Uzyskamy w tym przypadku zasięg wynosi 1607 m.

Dołączam arkusz kalkulacyjny z rozwiązaniem.