

# TERMODYNAAMIKA przemiany gazowe

## ① Podstawowe pojęcia

Układ jest wydzieloną przez nas częścią "natury", która jest ograniczona ściankami od otoczenia (nie interesująca nas reszta "natury").

Ścianki mogą mieć charakter materialny lub umowny.

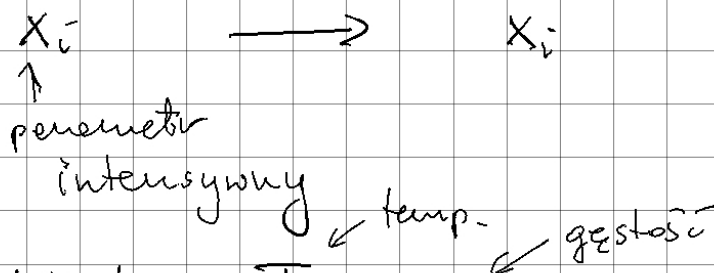
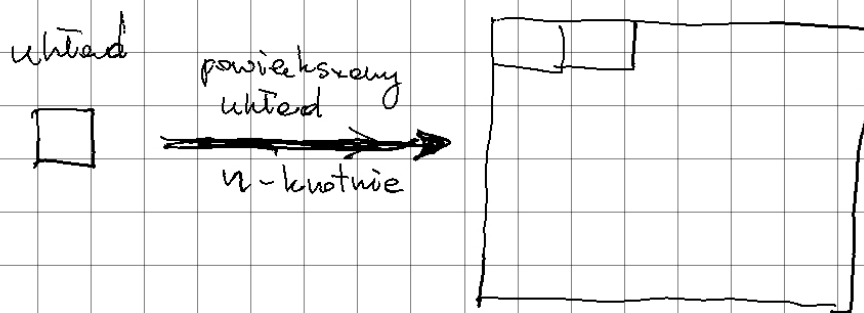
### 1°) Rodzaje ścianek:

- diatermiczna - umożliwia kontakt termiczny układu i otoczenia
- adiabatyczna - umożliwia kontakt termiczny i transfer materii między układem i otoczeniem

- ruchoma (tłok) - umożliwia kontakt mechaniczny układu i otoczenia

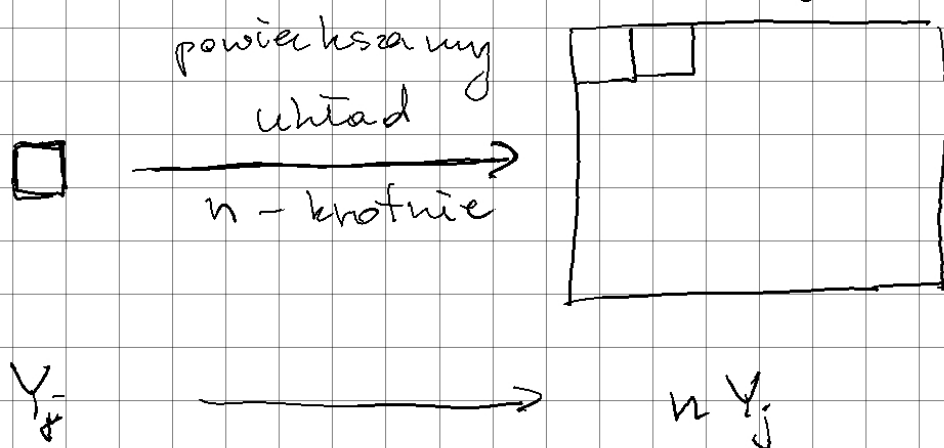
2°) Stan układu termodynamicznego jest określony za pomocą podanej zestawy parametrów makroskopowych  $X_i$  oraz  $Y_j$ .

Parametrem intensywnym nazywamy parametr, który nie zależy od rozmiarów układu, czyli



Przykłady:  $T, p, \rho$ , dowolna wielkość, którą możemy pomnożyć lokalnie

Parametrami ekstensywnymi nazywamy te z nich, które skalują się z rozmiarem układu, czyli:



Do opisu stanu układu termodynamicznego musimy podać przynajmniej jeden parametr ekstensywny.

Przykłady:  $V, N, M$

$\uparrow$  objętość       $\uparrow$  liczba cząstek       $\uparrow$  masa układu

Parametry układu są ze sobą powiązane równaniem stanu

o postaci:  $f(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots) = 0$

$\uparrow$  pierwsza funkcja.

Przykład: równanie stanu gazu doskonałego

$$f(p, V, n, T) = pV - nRT = 0 \Rightarrow pV = nRT$$

↑  
l. moli

$$n = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A}$$

← masa wzt.  
↑  
masa molowa  
cząstek  
← l. Avogadro

3°) Układ termodynamiczny  
znajduje się w równowadze,

gdy jego makroskopowe parametry  
nie zmieniają się w czasie

oraz w układzie nie występują

makroskopowe przepływy. → równowaga termiczna  
→ równość  $T$

4°) Przemiana kwazistatyczna → r. mechaniczne  
→ równość  $p$   
przemiana

przechodzą między dwoma stanami

równowagi układu nie tyle wolno,

że układ przechodzi przez

ciąg stanów równowagi (continuum

stanów równowagi).

## ② I zasada termodynamiki

Istnieje pewna ekstensywna i addytywna funkcja stanu  $U$  zwana energią wewnętrzną, której zmiana w procesie dla układu zamkniętego ściankami adiabatycznymi wyniesi

$$\Delta U \Big|_{\text{adiabat.}} = W,$$

gdzie  $W$  jest pracą wykonaną w tym procesie.

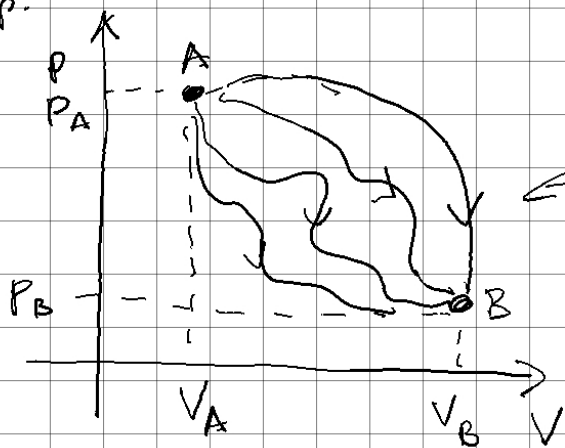
Dla dowolnego procesu bieżącego między tym samym stanem końcowym i początkowym, co wyżej

$$\Delta U = \Delta U \Big|_{\text{adiabat.}} = W + Q,$$

gdzie  $Q$  nazywamy ciepłem.

Funkcja stanu zależy tylko od stanu początkowego i końcowego procesu.

np.



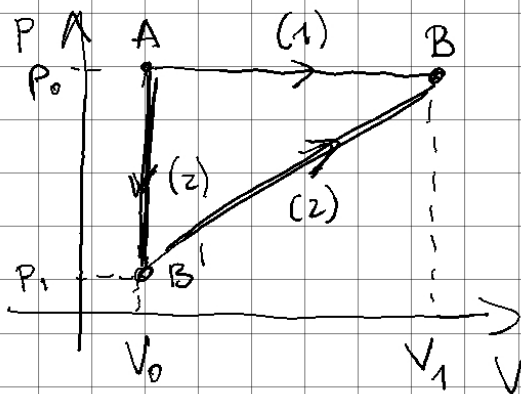
$$\Delta U = U(P_B, V_B) - U(P_A, V_A)$$

we wszystkich tych przypadkach

Funkcja procesu zależy za to od sposobu jego prowadzenia.

Przytłoczeniu funkcji procesu jest praca  $W$  oraz ciepło  $Q$ .

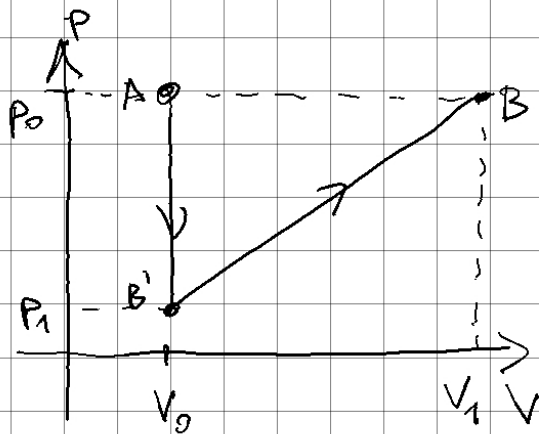
Przykład:



$$W = - \int_A^B p(V) dV$$

$$W^{(1)} = - \int_A^B p dV \stackrel{p = \text{const}}{=} -p(V_B - V_A)$$

teraz sprawdzimy ile wyjdzie dla (2):



dle odčinke  $B' \rightarrow B$

$$p(V) = aV + b$$

$$p(V_1) = p_0$$

$$p(V_0) = p_1$$

czyli

$$\begin{cases} p_0 = aV_1 + b \\ p_1 = aV_0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1} \\ b = p_1 + \frac{p_0 - p_1}{V_0 - V_1} V_0 \end{cases}$$

$$W^{(2)} = - \int_A^B p(V) dV = - \int_A^{B'} p(V) dV - \int_{B'}^B p(V) dV =$$

$$V = \text{const} \\ dV = 0$$

$$= - \int_{V_0}^{V_1} \left( \underbrace{\frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}}_a V + \underbrace{p_1 + \frac{p_0 - p_1}{V_0 - V_1}}_b \right) dV =$$

$$= - \frac{aV^2}{2} \Big|_{V_0}^{V_1} + bV \Big|_{V_0}^{V_1} = - \frac{1}{2} \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1} (V_1^2 - V_0^2) +$$

$$- \left( p_1 + V_0 \frac{p_0 - p_1}{V_0 - V_1} \right) (V_1 - V_0) \neq W^{(1)}$$

### ③ Przemiany gazowe

1°) Gaz doskonały:

→ cząsteczki gazu nie oddziałują ze sobą

→ zderzenia między nimi są idealnie sprężyste

→ pomiędzy zderzeniami cząsteczki poruszają się po prostoliniowych trajektoriach

Równanie stanu doskonałego,

tzw. równanie Clapeyrona:

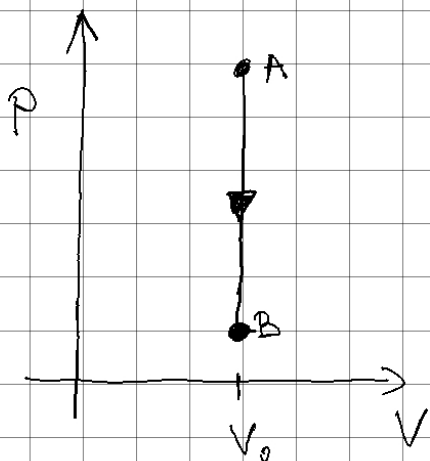
$$pV = nRT$$

gdzie  $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$  jest uniwersalną stałą gazową.

2°) Przemiana izochoryczna

$$V = \text{const}$$





Dla przemiany  
izochorycznej  $dV=0$ ,  
czyli  $W=0$

Zmiana energii  
wewnętrznej w tym procesie  
wynosi

$$\Delta U = Q,$$

gdzie  $Q$  możemy znaleźć  
wykorzystując zależność:

$$Q = n c_v \Delta T,$$

równanie to definiuje  $c_v$  - ciepło  
molekowe przy stałym  $V$ .

$U$  jest funkcją stanu, więc  
dla procesu bieżącego między  
temperaturami  $T_1$  i  $T_2$  jego

Zmiana dla dowolnego procesu  
wynosi:

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$

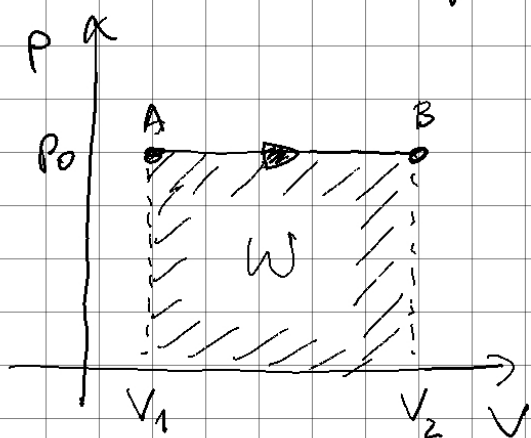


Dla gazu doskonałego  $U$  zależy tylko od temperatury układu:

$$U = U(T) \propto T$$

3°) Przemiana izobaryczna

$$p = \text{const}$$



w tym przypadku:

$$W = - \int_A^B p_0 dV = - p_0 \int_A^B dV = \\ = - p_0 (V_2 - V_1)$$

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = n C_V (T_B - T_A) = \frac{C_V}{R} p_0 (V_2 - V_1)$$

$$pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR} \uparrow$$

Z drugiej strony:

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = \Delta U - W$$

$$Q = \frac{C_V}{R} p_0 (V_2 - V_1) + p_0 (V_2 - V_1)$$

podobnie jak poprzednio

$$Q = n C_P \Delta T \quad ,$$

gdzie tym razem  $c_p$  to ciepło molowe dla stałego  $p$ .

$$Q = n c_p (T_B - T_A) = \frac{c_p}{R} p_0 (V_2 - V_1),$$

czyli

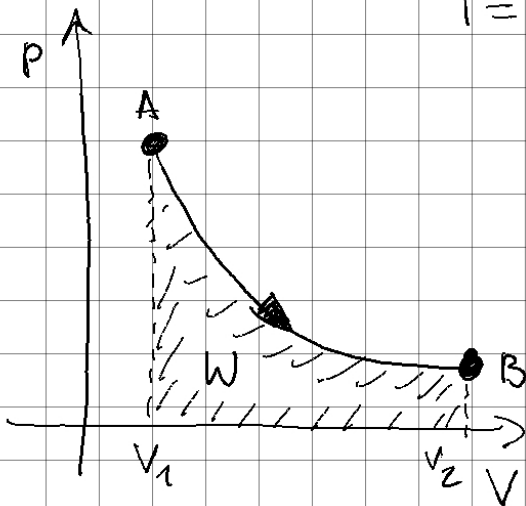
$$\frac{c_p}{R} p_0 (V_2 - V_1) = \frac{c_v}{R} p_0 (V_2 - V_1) + p_0 (V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow c_p - c_v = R$$

jest to  
tzw. relacja  
Meyera.

4°) Przemiana izotermiczna

$T = \text{const}$



$$p(V) = \frac{nRT}{V} \propto \frac{1}{V}$$

$$W = - \int_A^B p(V) dV =$$

$$= - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} =$$

$$= nRT \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right)$$

dla  $T = \text{const}$  także  $U = \text{const}$ ,  
czyli  $\Delta U = 0$ , wtedy  $Q = -W$ .

$$Q = -nRT \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

5°) Przemiana adiabatyczna,  $Q = 0$

Rozważmy infinitesimalny p. adiabatyczny:

$$dU = dW + dQ = -pdV = n c_v dT$$

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}, \text{ wtedy}$$

$$-\frac{nRT}{V} dV = n c_v dT$$

$$-\frac{R}{c_v} \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

Teraz całkujemy obie strony:

$$-\frac{R}{c_v} \int \frac{dV}{V} = \int \frac{dT}{T} \Rightarrow +\frac{R}{c_v} \ln V + \ln T = \text{const}$$

↑  
const  
↑  
nieoznaczone

↑  
stale  
↑  
całkowanie

$$\Rightarrow \ln(T V^{R/c_v}) = \text{const}$$

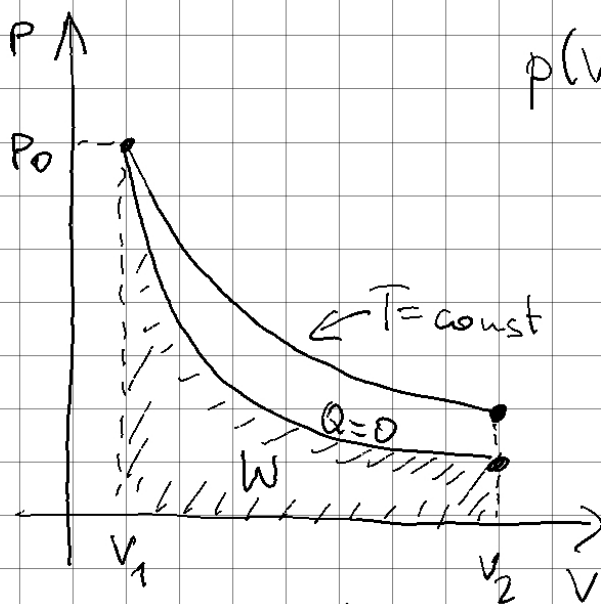
$$\Rightarrow T V^{R/c_v} = \text{const}$$

$$T = \frac{pV}{nR} \Rightarrow pV \cdot V^{R/c_v} = \text{const}$$

$$\uparrow \text{bo } nR = \text{const}$$

$$pV^{c_p/c_v} = \text{const}$$

wzrostanie adiabaty  
- prawo Poissona



$$p(V) \propto V^{-\gamma}, \text{ gdzie } \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$p(V_1) = p_0 = \frac{\text{const}}{V_1^\gamma}$$

$$\Rightarrow \text{const} = p_0 V_1^\gamma$$

cykli

$$p(V) = \frac{p_0 V_1^\gamma}{V^\gamma}$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_0 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = - p_0 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} =$$

$$= - p_0 V_1^\gamma \frac{1}{1-\gamma} \left( V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma} \right)$$

Alternatywnie wiemy, że

$$\Delta U = W = n c_V \Delta T, \text{ bo } Q = 0.$$

6°) Płytkady:

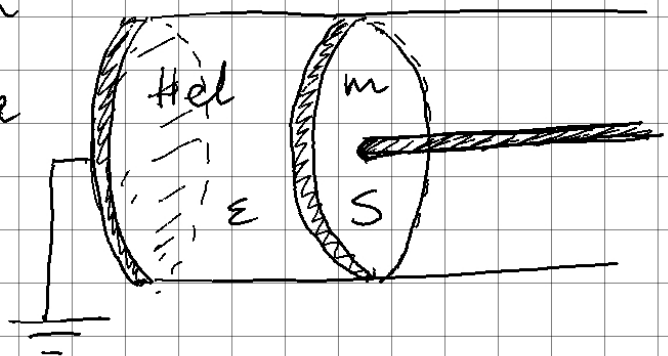
a) Natadowany tłok

w nieprzewodzącym

cieplem ani prądnie

cylinde,

umieszczonym



w próżni, pomimo się bez tarcia

tłok o masie  $m$ . Wewnątrz

cyindra znajduje się gazowy hel

o przewodności dielektrycznej  $\epsilon = \epsilon_0$ .

Na powierzchni tłoka i dna cyindra

znajdują się cienkie warstwy

metalu. Dno cyindra jest uziemione.

Tłok wykonuje małe drgania

o okresie  $T$  w małej (w porównaniu z średnicą tłoka) odległości od dna cylindra, zaś objętość cylindra osygnuje wartość  $V_0$ . Jaki ładunek elektryczny znajduje się na metalicznej powierzchni tłoka?

Ponieważ ruch tłoka jest powolny oraz tłok nie przewodzi ciepła przyjmujemy, że zachodzi odwracalna przemiana adiabatyczna gazu, czyli

$$p_0 V_0^\gamma = p V^\gamma$$

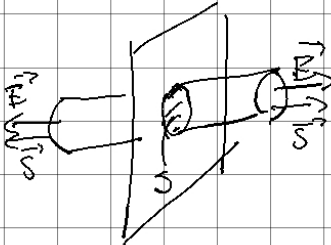
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad c_p = \frac{5}{2}R, \quad c_v = \frac{3}{2}R \quad \text{dla gazu jednoatomowego} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}.$$

$S$  - powierzchnia tłoka, wtedy siła oddziałująca na tłok wynosi

$$F = pS - \frac{Q\sigma}{2\epsilon} = pS - \frac{Q^2}{2S\epsilon} = (p - p_0)S$$

↳ indukcijski pov. na tloku

Pole električno od ploče:



$$\frac{Q}{S} = \sigma, \text{ z p. Gaussa}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S}{\epsilon} \Rightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

gdje  $p_0 = \frac{Q^2}{2S^2\epsilon}$ ,  $p$  - cijenjen helu.

$p_0$  odgovara ravnovesnoj sili pence geru na tloku oraz sily elektrostatičnej tloku  $Q$  na tloku indukcijske tloku  $-Q$  na dnu cilindra.

Ponieważ odległość między tlokiem i dnem jest manjša niż rozmiery tloka moiemy ten utjed trelitowec

jek kondensator pteshi:

$$p - p_0 = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{2\epsilon} p_0 - p_0 = p_0 \left[ \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-2\epsilon} + 1 \right] =$$



$$= p_0 \left[ \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^{-\alpha} - 1 \right] \approx - \frac{\alpha p_0}{x_0} \Delta x$$

$\uparrow$   
 $\Delta x = x - x_0$

rozwojemy w szereg

Taylor:  $\left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^{\alpha} \approx 1 + \alpha \frac{\Delta x}{x_0}$

Wstawiając ten wynik do wyrażenia na siłę mamy:

$$F = - \frac{S \alpha p_0}{x_0} \Delta x = - \frac{S^2 \alpha Q^2}{V_0 2 S^2 \epsilon} \Delta x = - \frac{\alpha Q^2}{2 V_0 \epsilon} \Delta x$$

wiec z II zasady dynamiki mamy:

$$m \Delta \ddot{x} = - \frac{\alpha Q^2}{2 V_0 \epsilon} \Delta x$$

$$\Delta \ddot{x} + \omega_0^2 \Delta x = 0 \Rightarrow \omega_0 = Q \sqrt{\frac{\alpha}{2 m V_0 \epsilon}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{2 m V_0 \epsilon}{\alpha Q^2}}$$

czyli  $Q = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{2 m V_0 \epsilon}{\alpha}}$

## b) Wymiana ciepła w procesie sprężania helu

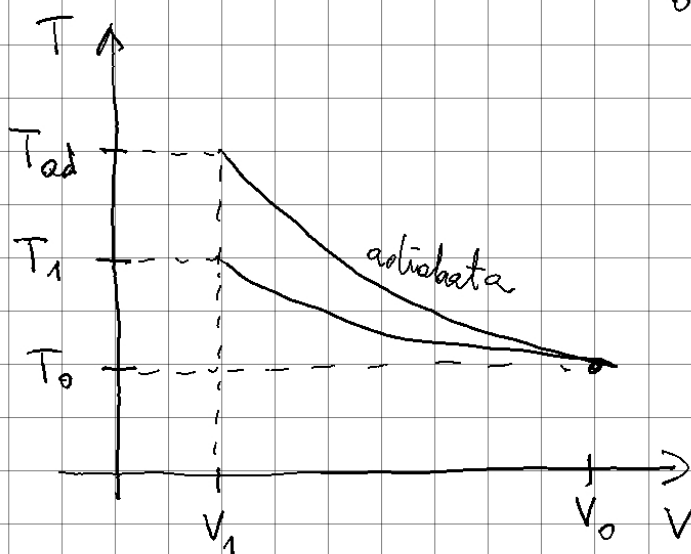
w pewnej przemianie 1 mola helu zmiany temperatury towarzyszące powolnemu sprężaniu są dwukrotnie mniejsze od tych, które byłyby w przypadku sprężania adiabatycznego.

- Odpowiedz i uzasadnij, czy podczas tej przemiany hel oddaje, czy pobiera ciepło z otoczenia.
- Przyjmując, że hel jest gazem doskonałym i że jego temperatura początkowa wynosiła  $T_0$ , oblicz, jaką ilość ciepła wymienił hel z otoczeniem, jeżeli po sprężeniu osiągnął temperaturę  $T_1 = \gamma T_0$  ( $\gamma > 1$ ).

- Gaz sprężany adiabatycznie nie wymienia ciepła z otoczeniem. Jeżeli więc podnies sprężania temperatura gazu wzrasta wolniej niż w procesie adiabatycznym, to gaz oddaje ciepło otoczeniu.

- Ciepło  $Q$  obliczamy korzystając z I zasady termodynamiki:

$$Q = \Delta U + \int_{V_0}^{V_1} p(V) dV$$



$$\Delta T = T_1 - T_0 = (\gamma - 1) T_0$$

$$\Delta U = c_V \Delta T = \frac{3}{2} R (\gamma - 1) T_0$$

Aby obliczyć ciepło

powyżej należy

znaleźć  $p(V)$

oraz granice całkowania:

Z warunków zadania wiemy, że

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2}(T_{ad} - T_0), \quad (*)$$

a stad mamy, że

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_{ad} + T_0)$$

Konstanta z równania adiabaty:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3})$$

otynujemy:

↑ dla gazu jednoatomowego

$$T_0 V^{\gamma-1} = T_{ad} V_1^{\gamma-1} \quad (**)$$

z równań (\*) i (\*\*) otynujemy:

$$T_1 = \frac{1}{2} T_0 [1 + (V_0 V_1)^{\gamma-1}]$$

po wstawieniu we wzore  $T_1 = \gamma T_0$

$$\text{otynujemy: } V_1 = V_0 (2\gamma - 1)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Konstanta z równania Clapeyrona

$$T = pVR \quad \text{otynujemy:}$$

$$p(V) = \frac{1}{2} RT_0 [V^{-1} + V_0^{\gamma-1} V^{\gamma}]$$

Wykonujemy całkowanie:

$$\int_{V_0}^{V_1} p dV = \frac{1}{2} RT_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \frac{V_0^{\gamma-1}}{1-\gamma} [V_1^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}] =$$

$$= -\frac{3}{4} RT_0 \left[ \ln(2\gamma - 1) + 2(\gamma - 1) \right],$$

czyli                      ostatecznie

$$\underline{\underline{Q = -\frac{3}{4} RT_0 \ln(2\gamma - 1)}}$$