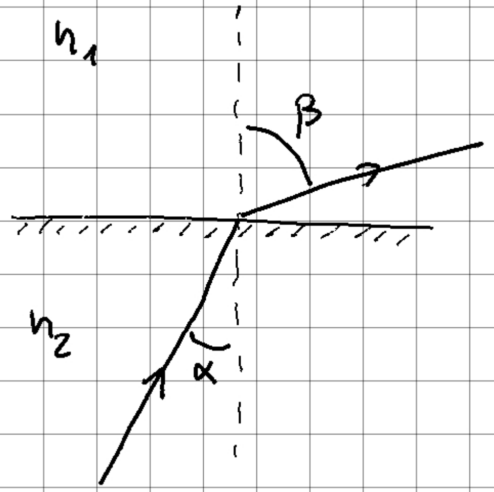
OPTYKA – ZAJĘCIA DOŚWIADCZALNE

Całkowite wewnętrzne odbicie

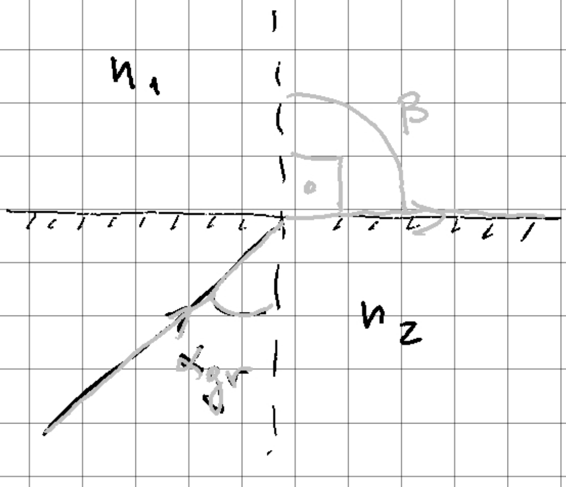


Gdy $n_2 > n_1$, wtedy

$n_1 \sin\beta = n_2 \sin\alpha \Rightarrow \beta > \alpha$

oznacza to, że

dla pewnego krytycznego kąta padania α_{gr} światło nie będzie mogło wydostać się z ośrodka o współczynniku n_2, a jedynie się odbić od powierzchni rozdziału substancji o współ. załamania n_1 i n_2.



$$n_1 \sin 90^\circ = n_2 \sin\alpha_{gr}$$

$$\Rightarrow \alpha_{gr} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

Zadanie

Mając do dyspozycji:

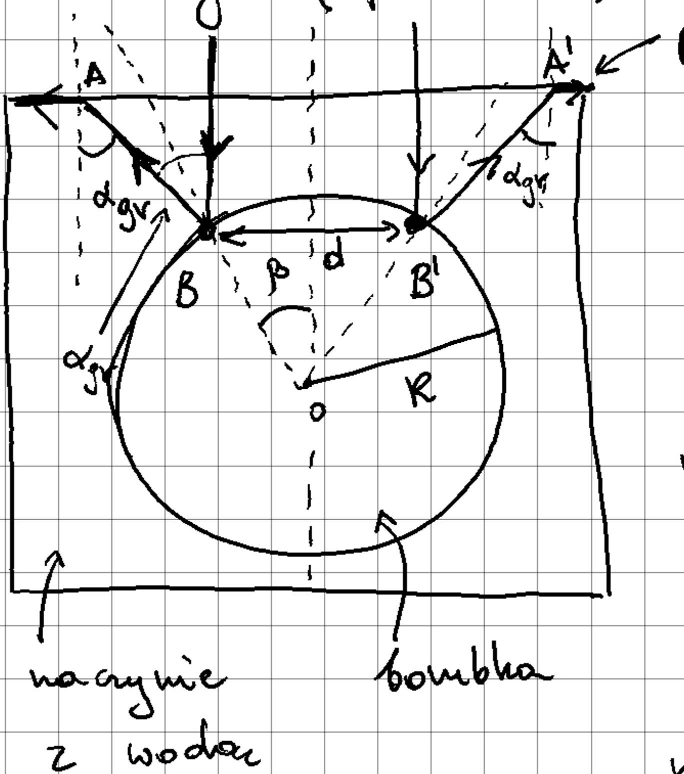
1) posrebrnoną od wewnątrz bombkę choinkową o znanym promieniu R
2) naczynie o matowych ściankach napełnione wodą,
3) obciążnik,
4) linijkę,
5) pręt metalowy na statywie

wyznacz współczynnik załamania światła na granicy wody i powietrza (nie jest konieczne użycie wszystkich wymienionych elementów).

Rozwiązanie:

1) Część teoretyczna

Pomiar współczynnika załamania światła będzie wykorzystywał zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia promieni światła przy przechodzeniu od ośrodka optycznie gęstszego (woda) do ośrodka optycznie rzadszego (powietrze).



Z rysunku mamy, że $\beta = \frac{\alpha_{gr}}{2}$

Średnica obserwowanego „zwierciadła" wynosi d. Promienie padające poza tym obszarem na powierzchni bombki nie są w stanie opuścić wody z powodu całkowitego wewnętrznego odbicia. Wiemy, że dla promienia krytycznego

$$\sin\alpha_{gr} = \frac{n_{pow}}{n_{H_2O}} = \frac{1}{n} \qquad (n_{H_2O} = n)$$

przyjmujemy, że z dobrym przybliżeniem współczynnik załamania dla powietrza wynosi $n_{pow} = 1$.

Z rysunku mamy ponadto, że

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha_{gr}}{2}\right) = \frac{d}{2R}$$

Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin\alpha_{gr} = 2\sin\left(\frac{\alpha_{gr}}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_{gr}}{2}\right) =$$

$\sin\left(\frac{\alpha_{gr}}{2}\right) = \frac{d}{2R}$

$$= 2\sin\left(\frac{\alpha_{gr}}{2}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\alpha_{gr}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{d}{R}\sqrt{1-\left(\frac{d}{2R}\right)^2}$$, czyli

$$\boxed{n = \frac{D}{2d\sqrt{1-(d/D)^2}}}$$, gdzie $D = 2R$

2) Część doświadczalna

W celu wyznaczenia n musimy zmierzyć średnicę bombki D oraz obserwowaną średnicę „zwierciadełka” d: w tym celu wykonujemy następujące czynności:

a) wykonujemy walec z papieru ściśle przylegający do ścianek bombki i mierzymy średnicę otrzymanego walca linijką, co daje nam pomiar D z niepewnością związaną z dokładnością podziałki linijki

b) bombkę dociążamy i zanurzamy ją w wodzie znajdującym się w matowym naczyniu.

c) obserwując światło odbite od powierzchni bombki znajdujemy okrągły obszar wyznaczanego przez promienie krytyczne (patrz rys.)

d) wykonujemy pomiar średnicy d tego obszaru, pomiar ten powtarzamy kilkukrotnie

3) Wyniki pomiarów

$D = (12{,}7 \pm 0{,}05)$ cm

↑ jako niepewność przyjmujemy połowę najmniejszej z podziałek w skali

nr pomiaru	1	2	3	4	5	6
d [cm]	5,5	5,4	5,5	5,3	5,0	5,0

obliczamy wartość średnią pomiaru d:

$$\bar{d} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} d_i = 5{,}28 \text{ cm}$$

obliczamy odchylenie standardowe σ_d:

$$\sigma_d = \left[\sum_{i=1}^{6} (d_i - \bar{d})^2\right]^{1/2} = 0{,}518 \text{ cm}$$

Szacujemy niepewność pomiaru Δd

jako:
$$\Delta d = \frac{1}{\sqrt{N-1}}\sigma_d = \frac{1}{\sqrt{5}} 0{,}518\,cm = 0{,}23\,cm$$

liczba pomiarów

zatem $\quad d = (5{,}28 \pm 0{,}23)\,cm$

Oszacujemy teraz błąd pomiaru n:

$$D = \bar{D} + \Delta D \qquad \frac{\Delta D}{\bar{D}} \text{ - małe}$$

$$d = \bar{d} + \Delta d \qquad \frac{\Delta d}{\bar{d}} \text{ - małe}$$

$$n = \frac{D}{2d\sqrt{1-(d/D)^2}}$$

rozwijamy w szereg Taylora względem $\Delta D/\bar{D}$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{\bar{D}}\frac{1}{1+\frac{\Delta D}{\bar{D}}} =$$

$$= \frac{1}{\bar{D}}\left(1 - \frac{\Delta D}{\bar{D}}\right) + \ldots$$

pozostawiamy tylko wyrazy liniowe w ΔD

$$\frac{d}{D} = \frac{\bar{d}}{\bar{D}}\left(1+\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)\left(1-\frac{\Delta D}{\bar{D}}\right) = \frac{\bar{d}}{\bar{D}}\left(1+\frac{\Delta d}{\bar{d}} - \frac{\Delta D}{\bar{D}} + \ldots\right)$$

małe wyższego rzędu

ponadto $\frac{\Delta d}{\bar{d}} > \frac{\Delta D}{\bar{D}}$, więc pomijamy wyraz z $\frac{\Delta D}{\bar{D}}$, zatem

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\bar{d}}{\bar{D}}\right)^2\left(1+\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\bar{d}}{\bar{D}}\right)^2\left(1+\frac{2\Delta d}{\bar{d}}+\ldots\right)}} =$$

małe wyższego rzędu

rozwijamy w szereg Taylora względem $\frac{\Delta d}{\bar{d}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\bar{d}/\bar{D})^2}} + \left(\frac{\bar{d}}{\bar{D}}\right)^2 \frac{\frac{\Delta d}{\bar{d}}}{\left(1-(\bar{d}/\bar{D})^2\right)^{3/2}} + \ldots$$

małe wyższego rzędu

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\bar{d}}\,\frac{1}{1+\frac{\Delta d}{\bar{d}}} = \frac{1}{\bar{d}}\left(1-\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)+\ldots$$

$$n = \frac{1}{2}\,\frac{\bar{D}}{\bar{d}}\left(1-\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)\left(1+\frac{\Delta D}{\bar{D}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\bar{d}/\bar{D})^2}} + \left(\frac{\bar{d}}{\bar{D}}\right)^2\cdot\frac{1}{\bar{d}}\cdot\frac{\Delta d}{\left(1-(\bar{d}/\bar{D})^2\right)^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\bar{D}}{\bar{d}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(\bar{d}/\bar{D})^2}} - \frac{1}{2}\,\frac{\bar{D}}{\bar{d}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(\bar{d}/\bar{D})^2}}\,\frac{\Delta d}{\bar{d}} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\bar{D}}{\bar{d}}\frac{1}{\sqrt{1-(\bar{d}/\bar{D})^2}}\frac{\Delta D}{\bar{D}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\bar{D}}\frac{\Delta d}{(1-(\bar{d}/\bar{D})^2)^{3/2}}=$$

w teoly

$$\bar{n}=\frac{1}{2\bar{d}}\frac{\bar{D}}{\sqrt{1-(\bar{d}/\bar{D})^2}}=1{,}32$$

wszystkie wyrazy z Δd i ΔD bierzemy z plusem

$\Delta n = 0{,}07$,

zatem $n=\bar{n}\pm\Delta n = 1{,}32 \pm 0{,}07$

Niedokładność pomiaru jest wywołana przez dwa czynniki:

a) dokładność przyrządu pomiarowego – linijki

b) efektem paralaksy, który utrudnia prawidłowe odczytanie d w trakcie pomiaru.