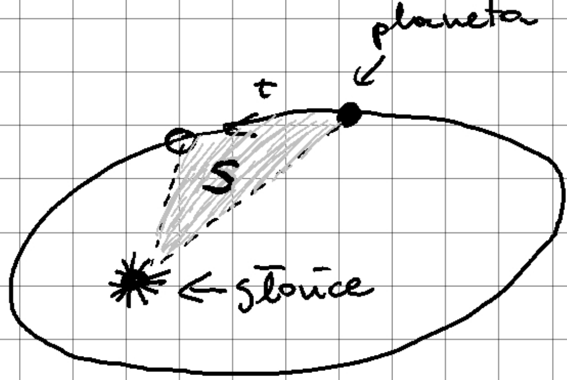
GRAWITACJA – prawa Keplera, ruch orbitalny

1 PRAWA KEPLERA

I) Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której jednym z ognisk jest znajduje się Słońce.



II) Linia łącząca planetę ze Słońcem zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni w płaszczyźnie orbity. Oznacza to, że wielkość $\frac{dS}{dt}$ (prędkość polowa) jest stała, przy czym S oznacza pole powierzchni zakreślane przez tę linię.

III) Kwadrat okresu ruchu każdej planety na orbicie wokół Słońca jest proporcjonalny do sześcianu półosi wielkiej tej orbity.

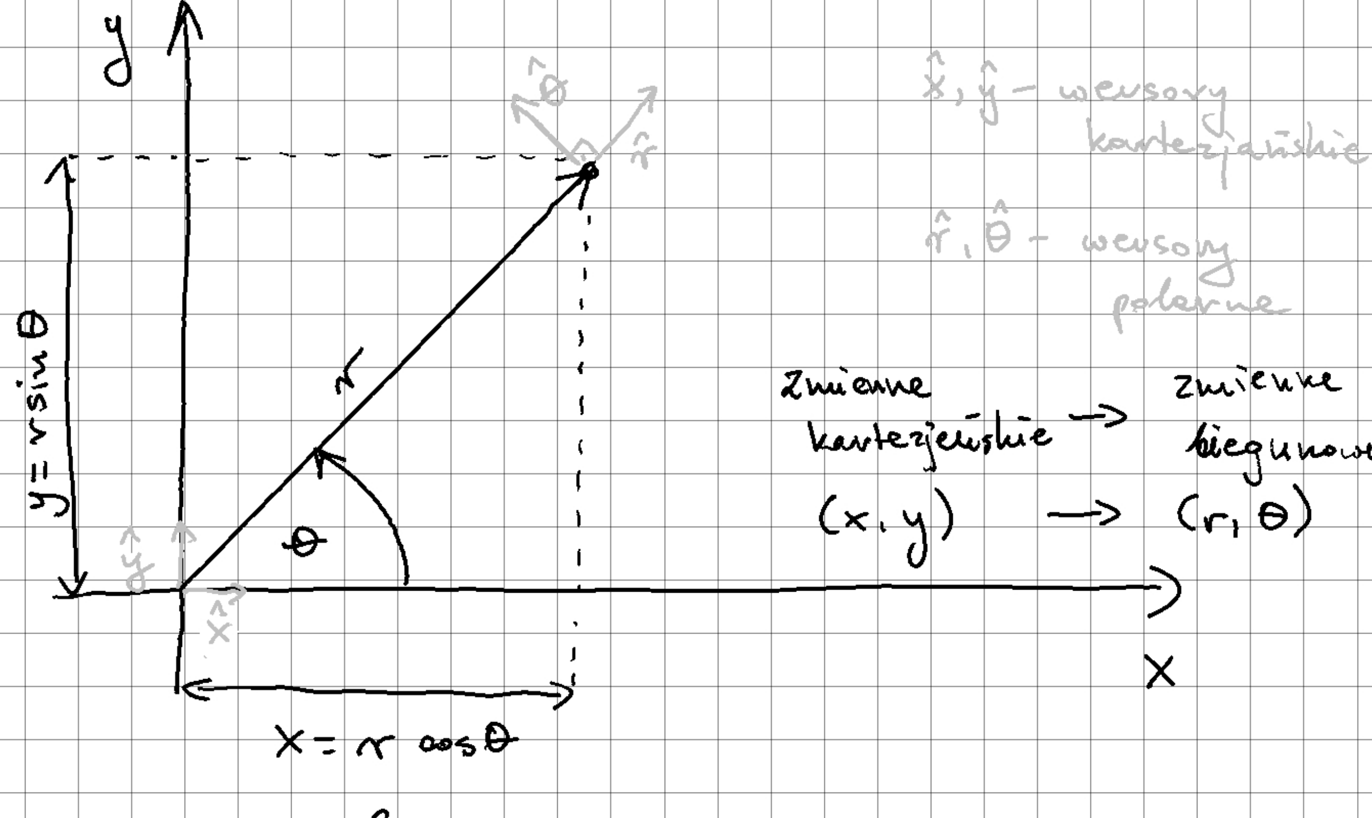
$$\frac{T^2}{a^3} = const \quad , \quad a - \text{wielka półoś elipsy.}$$

Udowodnimy powyższe prawa wykorzystując równania ruchu Newtona. Samo wyprowadzenie jest zdecydowanie ponad poziom liceum, ale wielkości przy okazji pojawiające się w rozwiązaniu mogą na olimpiadzie okazać się przydatne, dlatego poświęcimy na to trochę czasu.

Ruch ciała w polu grawitacyjnym opisuje równanie:

$$m\vec{a} = \vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r},$$

które musimy jakoś rozwiązać. Rozwiązywanie go w układzie kartezjańskim jest żmudne dlatego posłużymy się współrzędnymi polarnymi.



zmienne kartezjańskie → zmienne biegunowe

$(x, y) \longrightarrow (r, \theta)$

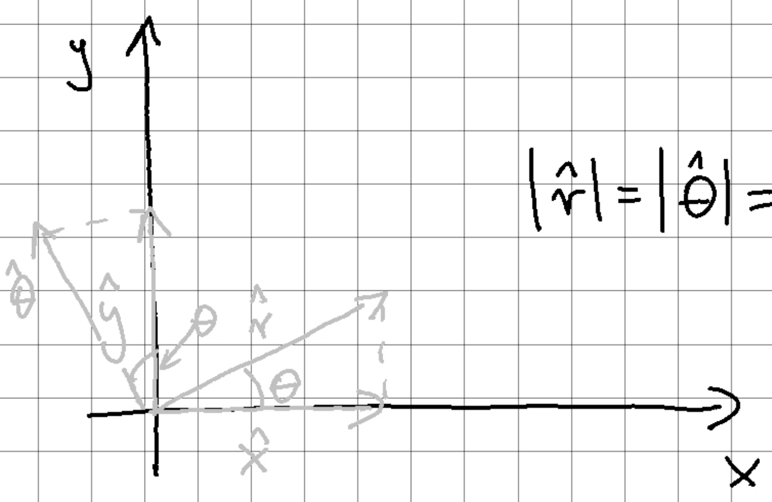
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Zauważmy, że kiedy

$\theta = 0$, wtedy $\hat{r} = \hat{x}$, $\hat{\theta} = \hat{y}$

$\theta = \pi$, wtedy $\hat{r} = \hat{y}$, $\hat{\theta} = -\hat{x}$, itd.

czyli wersory $\hat{r}$ i $\hat{\theta}$ można wyrazić ze pomocą $\hat{x}$ i $\hat{y}$ i jakiś funkcji kąta θ.



$$|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = |\hat{x}| = |\hat{y}| = 1$$

więc wektor $\hat{r}$ możemy zapisać jako:

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y} \\ \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y} \end{cases}$$

Kąt θ w trakcie ruchu może zmieniać się w czasie, czyli

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{r}}{dt} = -\sin\theta \dfrac{d\theta}{dt}\hat{x} + \cos\theta \dfrac{d\theta}{dt}\hat{y} = \omega\hat{\theta} \\ \dfrac{d\hat{\theta}}{dt} = -\cos\theta \dfrac{d\theta}{dt}\hat{x} - \sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}\hat{y} = -\omega\hat{r}, \end{cases}$$

gdzie $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ jest prędkością kątową.
Podobnie obliczamy drugie pochodne względem czasu:

$$\frac{d^2\hat{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\omega\hat{\theta}\right) = \frac{d\omega}{dt}\hat{\theta} + \omega\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} - \omega^2\hat{r}$$

$$\frac{d^2\hat{\theta}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\omega\hat{r}\right) = -\frac{d\omega}{dt}\hat{r} - \omega\frac{d\hat{r}}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}\hat{r} - \omega^2\hat{\theta}$$

Wykorzystując współrzędne biegunowe możemy zapisać położenie ciała

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

oraz prędkość:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\hat{r}\right) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}$$

a także przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} +$$

$$+\frac{dr}{dt}\omega\hat{\theta} + r\frac{d\omega}{dt}\hat{\theta} +$$

$$+ r\omega\frac{d\hat{\theta}}{dt} =$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\omega\hat{\theta} + \frac{dr}{dt}\omega\hat{\theta} + r\frac{d\omega}{dt}\hat{\theta} - r\omega^2\hat{r} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)}_{\text{przyspieszenie radialne}}\hat{r} + \underbrace{\left(2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt}\right)}_{\text{przyspieszenie transwersalne}}\hat{\theta}$$

Podstawiając to do równania ruchu mamy:

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\hat{r} + \left(2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt}\right)\hat{\theta} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

czyli

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = -\dfrac{GM}{r^2} \\[2ex] m\left(2\dfrac{dr}{dt}\omega + r\dfrac{d\omega}{dt}\right) = 0 \end{cases}$$

Mnożąc drugie równanie przez r możemy zebrać je do postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\omega\right) = m\left(2r\frac{dr}{dt}\omega + r^2\frac{d\omega}{dt}\right) =$$

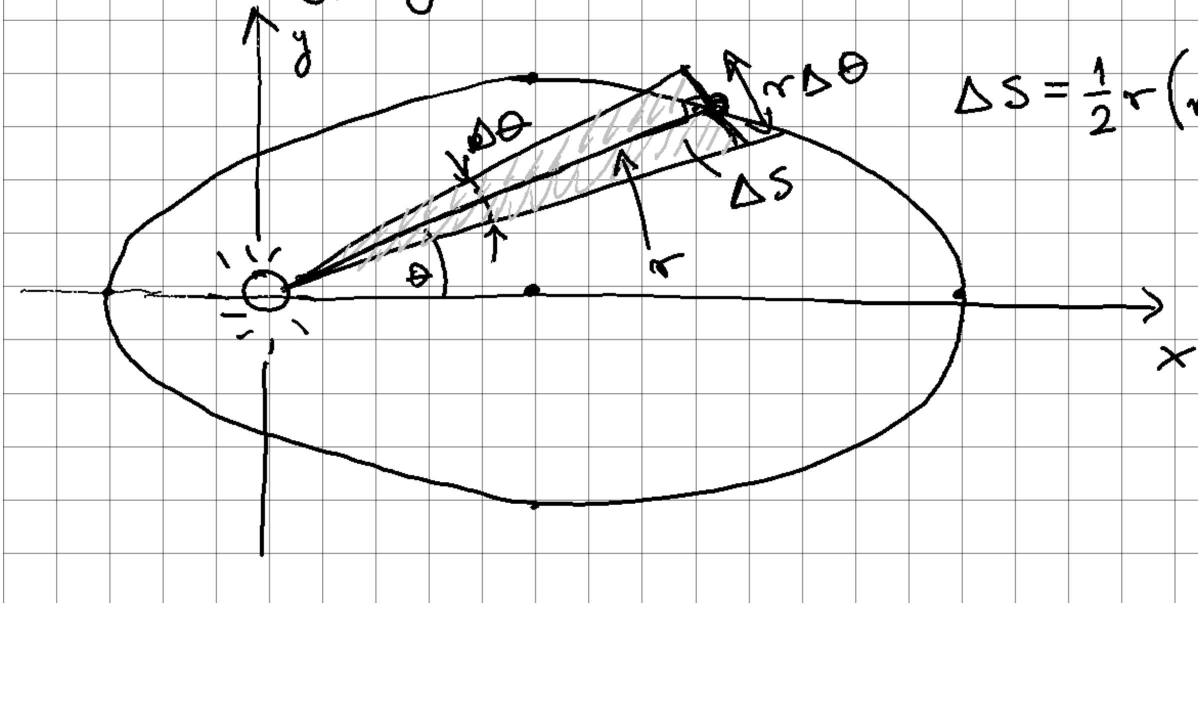
$$= mr\left(2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt}\right) = 0$$

Natomiast $mr^2\omega = L$ jest momentem pędu dla ciała punktowego, czyli równanie to mówi, że

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{const}$$

zachowanie momentu pędu!

Przyjrzyjmy się teraz prędkości polowej:



$$\Delta S = \frac{1}{2}r\left(r\Delta\theta\right)$$

gdy $\Delta\theta \to d\theta$ otrzymujemy, że

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{L}{2m} = \text{const}\,!$$

czyli pokazaliśmy $\overline{\underline{II}}$ prawo Keplera!
Widzimy, że mówi ono o zachowaniu momentu pędu w trakcie ruchu orbitalnego.
Rozważmy teraz równanie

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

wykorzystując, że $\omega = \frac{L}{mr^2}$ mamy:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -G\frac{M}{r^2}$$

ponadto

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\omega = \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}$$

chcemy znaleźć tor planety $r(\theta)$, a nie trajektorię $r(t)$!

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}\right)\frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\;\frac{L}{mr^2}\right)\right]\frac{L}{mr^2} =$$

$$= -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

wygodny sposób zapisania tej pochodnej (polecam sprawdzić, że dostaje się to samo).

$$-\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{L^2}{m^2r^2} + \frac{GM}{r^2} = 0,$$

czyli

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = G\frac{Mm^2}{L^2}$$

jest to równanie różniczkowe na $\frac{1}{r}$. Jest to przykład niejednorodnego równania różniczkowego, gdyby nie $G\frac{Mm^2}{L^2}$ wiedzieli byśmy jak je rozwiązać, bo to równanie "oscylatora harmonicznego", czyli gdy $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=0$, wtedy

$$\frac{1}{r}=h\cos(\theta+\theta_0)$$, gdzie h, θ_0 – pewne stałe

$$\left\{ \ddot{x}+\omega_0^2 x=0 \quad , \omega_0=1 \right.$$
$$\left. x=A\cos(t+\delta) \right\}$$

Zauważmy, że jak do tego rozwiązania dodam $\frac{GMm^2}{L^2}$ to

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(h\cos(\theta+\theta_0)+\frac{GMm^2}{L^2}\right)+h\cos(\theta+\theta_0)+$$
$$+\frac{GMm^2}{L^2}=-h\cos(\theta+\theta_0)+h\cos(\theta+\theta_0)+$$
$$+\frac{GMm^2}{L^2}=\frac{GMm^2}{L^2}$$, czyli

spełnione jest wyjściowe równanie!

zatem

$$\frac{1}{r}=h\cos(\theta+\theta_0)+\frac{GMm^2}{L^2}$$

równanie to możemy zapisać w postaci:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \theta_0)},$$

co jest równaniem elipsy we współrzędnych biegunowych.
(tak naprawdę jest to ogólne równanie dowolnej krzywej stożkowej)

Tutaj

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} \qquad e = h\frac{L^2}{GMm^2}$$ - mimośród

stałe wyznaczamy z warunków początkowych w szczególności

h da się zapisać za pomocą energii całkowitej układu E (energia kin. planety + energia pot. układu gwiazda - planeta):

$$h = \frac{GMm^2}{L^2}\sqrt{1 + E\frac{2L^2}{G^2M^2m^3}}$$

wtedy:

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad e = \sqrt{1 + E\frac{2L^2}{G^2M^2m^3}}$$

parametr ogniskowy

mimośród (ekscentryczność)

Gdy

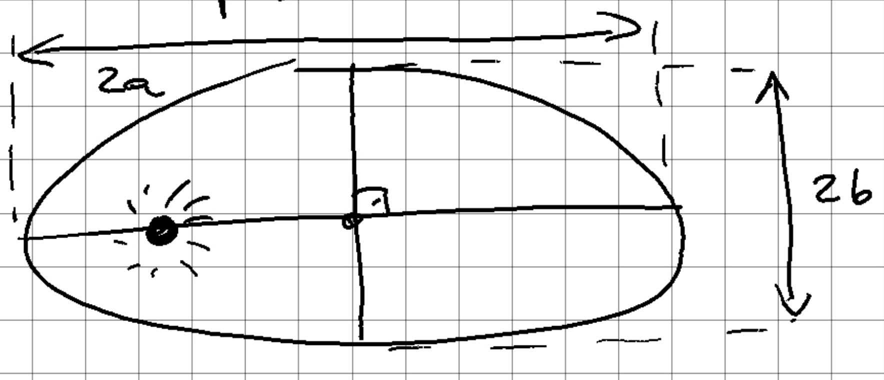
- $E > 0 \Rightarrow e > 1$, czyli tor to hiperbola
- $E = 0 \Rightarrow e = 1$, czyli tor to parabola
- $E < 0 \Rightarrow e < 1$, czyli tor to elipsa

jedyny układ związany

Pół osie elipsy wynoszą, wtedy

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

dla $e = 0$ dostajemy okrąg o promieniu p!



czyli udało nam się naszkicować dowód I prawa Keplera.

Wróćmy do prędkości polowych

Pole elipsy: $S = \pi a b$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (\text{II prawo Keplera})$$

Okres obiegu planety wyznaczamy z równania:

$$T\frac{dS}{dt} = \pi a b$$

$$T\frac{L}{2m} = \pi a\sqrt{ap}$$

$$T^2 = \frac{4m^2}{L^2}\pi^2 a^3 p =$$

$$= \frac{L^2}{GMm^2}\frac{4\pi^2 m^2}{L^2}a^3$$

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{1-e^2}$$

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{1}{1-e^2}$$

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{a}{p}$$

$$b^2 = ap$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const} \quad (\text{III prawo Keplera!})$$

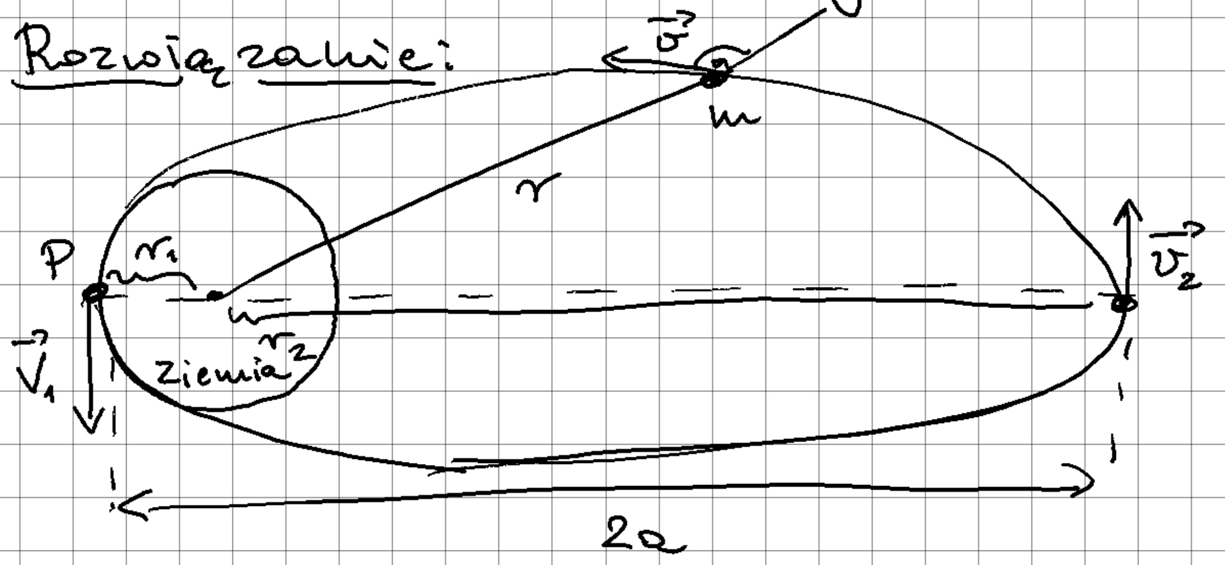
(1) W punkcie P na powierzchni Ziemi, na szerokości geograficznej $\phi = 60°$ znajduje się działo. Lufa działa jest ustawiona poziomo i skierowana na wschód. Pociski wystrzeliwane z tego działa mogą poruszać się po różnych orbitach wokół ziemskich.

1) Jaki jest najkrótszy czas τ, po którym może nastąpić spotkanie wystrzelonego pocisku z pkt. P?

2) Oblicz najmniejszą prędkość wystrzelonego pocisku względem P, dla której nastąpi jego spotkanie z punktem P po czasie τ.

Zaniedbać wpływ atmosfery oraz przyjąć, że środek Ziemi spoczywa w układzie inercjalnym.

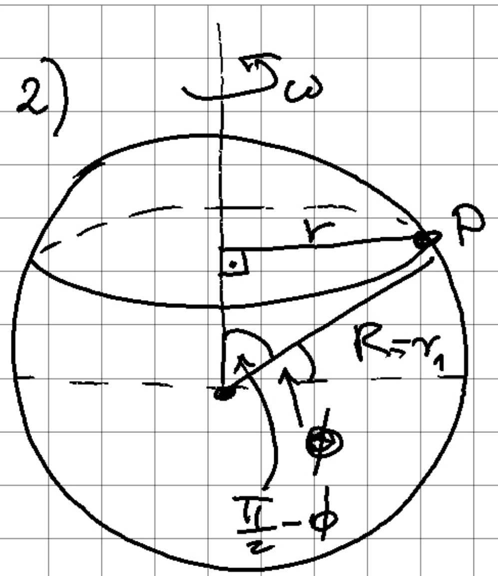
Rozwiązanie:



1) Pocisk krążący po orbicie eliptycznej tuż przy powierzchni Ziemi wykonuje kilkanaście okrążeń w ciągu doby. Im większy rozmiar elipsy - większe a, tym dłuższy jest okres obiegu pocisku (III prawo Keplera). Można tak dobrać prędkość $\vec{v}_1$, aby całkowita wielokrotność obiegu była równa T - okres obrotu Ziemi.

Najkrótszy czas τ jest więc równy T.

2)



$$r = R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) =$$
$$= R \cos \phi$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ − prędkość kątowa ziemi

Prędkość pocisku względem punktu P:

$$v = V - R\omega \cos\phi \quad ,$$

gdzie V − prędkość pocisku w układzie inercjalnym

Dla orbity kołowej o promieniu R otrzymujemy, że

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mV_0^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi R}{V_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Z III prawa Keplera dostajemy:

$$T_1^2 = \frac{a^3}{R^3} T_0^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Wykorzystujemy związek między energią całkowitą pocisku, a półosią wielką elipsy:

$$E = -\frac{GMm}{2a},$$

gdzie $E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{R}$

dostajemy:

$$a = \left(\frac{2}{R} - \frac{V_1^2}{GM}\right)^{-1}$$

wstawiamy to do wzoru na okres otrzymujemy:

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\left(\frac{2}{R} - \frac{V_1^2}{GM}\right)^{-3}$$

warunek spotkania pocisku z punktem P wynosi

$$nT_1 = T$$, gdzie n - naturalna

czyli

$$V_1^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 n^2}{GMT^2}}\right)$$

Warunkiem koniecznym obiegu pocisku po elipsie o półosi $a \geq R$ jest $V_1 \geq V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ zatem spełniona musi być nierówność:

$$\frac{1}{R} \geq \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 n^2}{T^2}} = \left(\frac{nT_0}{T}\right)^{2/3} \frac{1}{R},$$

czyli $n \leq \frac{T}{T_0}$

Dla wartości liczbowych odpowiadających Ziemi dostajemy, że

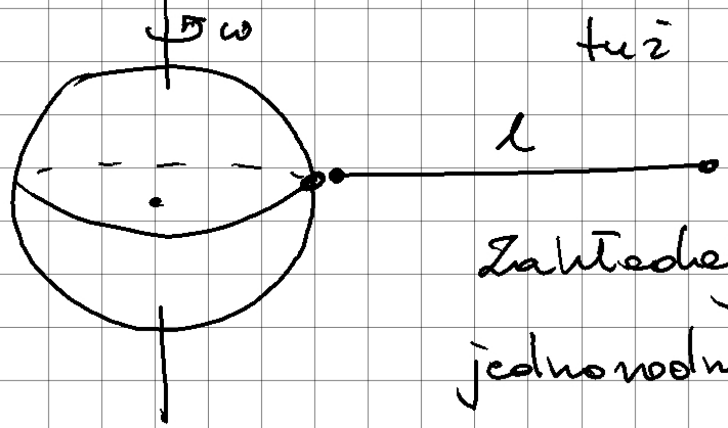
$$\frac{T}{T_0} = 17{,}07 \Rightarrow n_{max} = 17$$

stąd dostajemy, że $V_1 = 7{,}93\ \frac{km}{s}$,

czyli

$$v = V_1 - R\omega\cos\phi = 7{,}7\ \frac{km}{s} \quad \left(\text{I prędkość kosmiczna}\right)$$

(2) Autor science fiction R.A. Heinlein opisał satelitę „sky hook", która składa się z długiej liny na równiku i ustawionej wzdłuż promienia wychodzącego z środka Ziemi i poruszającej się tak, że lina wydaje się być zawieszona w przestrzeni nad określonym punktem na równiku. Koniec liny wisi swobodnie tuż nad powierzchnią Ziemi.



Zakładając, że lina jest jednorodna i nierozciągliwa znajdź jej długość.

Rozwiązanie:

Aby satelita pozostawał na orbicie przyspieszenie odśrodkowe musi być równoważone przez

przyspieszenie grawitacyjne, czyli

$$\int_R^{R+l} r\omega^2 \rho \, dr = \int_R^{R+l} \frac{GM}{r^2} \rho \, dr$$

gęstość liny

l - dł. liny

$$\frac{1}{2}\omega^2 \cancel{\rho} \left((R+l)^2 - R^2\right) = -GM\cancel{\rho}\left(\frac{1}{R+l} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{1}{2}\omega^2\left(\cancel{R^2} + 2Rl + l^2 - \cancel{R^2}\right) = -GM\left(\frac{R - R - l}{(R+l)R}\right)$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 l\left(2R + l\right) = GM\, l\, \frac{1}{(R+l)R}$$

$$\Rightarrow \frac{2GM}{\omega^2} = R(R+l)(2R+l)$$

rozwiązując równanie kwadratowe

ze względu na l otrzymujemy:

$$l = \frac{-3R + \sqrt{9R^2 + 4(2GM/R\omega^2 - 2R^2)}}{2}$$

wstawiając wartości dla Ziemi otrzymujemy, że

$$l = 1{,}5 \cdot 10^8 m,$$

czyli prawie połowa odległości Ziemia – Księżyc!