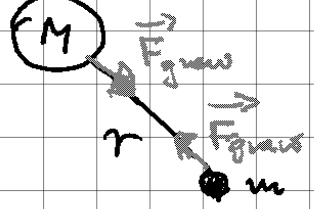
GRAWITACJA - wybrane zagadnienia

cz. 1

1°) Prawo powszechnego ciążenia:

$$\vec{F}_{graw} = -\frac{G\,mM}{r^2}\cdot\hat{r}$$



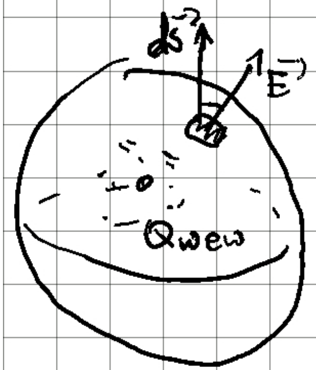
grawitacja jest zawsze przyciągająca.

$$\left(G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg^2 m^2}\right)$$

2°) Prawo Gaussa dla grawitacji

dla elektrostatyki wiemy, że

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qQ}{r^2}\,\hat{r}$$ ← przyciąganie, gdy ładunki są różnoimienne!



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

strumień pola jest proporcjonalny do ładunku zgromadzonego we wnętrzu powierzchni przez którą liczymy strumień pola $\vec{E}$. Jest to konsekwencja tego, że w prawie Coulomba $|\vec{F}| \sim \frac{1}{r^2}$, czyli dla grawitacji możemy sformułować analogicznie prawo Gaussa

$q \to m \qquad \vec{E} \to \vec{\gamma}$

$Q \to M$

dla masy punktowej m

$|\vec{\gamma}| = \frac{Gm}{r^2}$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = -G$

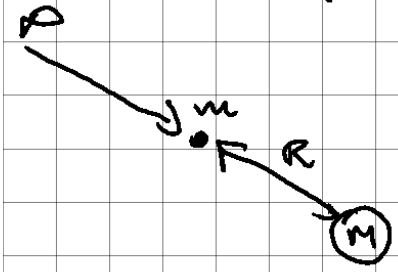
bo w przypadku graw. ładunki jednoimienne się przyciągają w przeciwieństwie do elektrostatyki!

zatem prawo Gaussa w tym przypadku przybiera postać:

$$\boxed{\oint \vec{\gamma} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{wew.}}\,,$$

czyli strumień natężenia pola grawitacyjnego $\vec{\gamma}$ (F_{graw} działająca na masę m wynosi $\vec{F}_{graw} = m\vec{\gamma}$) przez zamkniętą powierzchnię S jest proporcjonalny do masy zamkniętej wewnątrz tej powierzchni.

3°) Grawitacyjna energia potencjalna jest związana z pracą jaką musimy wykonać, aby przenieść ciało o masie m z położenia odniesienia o zadanej wartości energii potencjalnej (zwykle przyjmuje się, że dla $r \to \infty$ $E_{pot} = 0$) do położenia R, czyli np.



$$E_{pot} = -\int_{\infty}^{R} \vec{F}_{grav} \cdot d\vec{r} =$$

$$= -\int_{\infty}^{R} \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) dr = -\frac{GMm}{r}$$

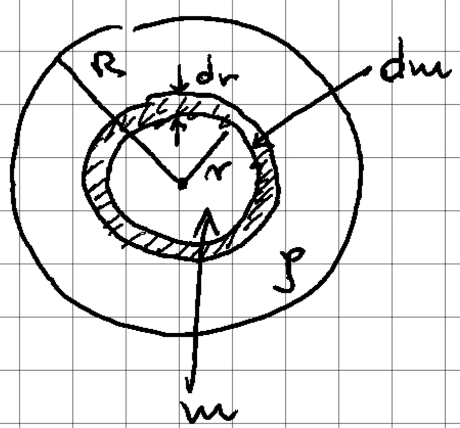
Zadania

(1) Znaleźć energię grawitacyjną planety o masie M i promieniu R. Założyć, że gęstość planety jest stała i wynosi ρ.

Rozwiązanie:

Energia grawitacyjna planety będzie sumą energii potencjalnej wszystkich elementów masy tej planety.

W celu obliczenia tej energii wygodnie jest rozważyć energię związaną z oddziaływaniem kuli o promieniu r oraz otaczającej jej powłoki sferycznej o grubości dr.



masa powłoki sferycznej $= dm =$

$$= \underbrace{4\pi r^2}_{\text{pow. sfery o promieniu } r} \underbrace{dr}_{\text{grubość sfery}} \rho$$

Powłoka sferyczna oddziałuje zgodnie z prawem Gaussa tylko z wnętrzem kuli o promieniu r, czyli masa kuli o promieniu r = $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Wkład do energii potencjalnej pochodzący od oddziaływanie między m i dm wynosi:

$$dE = -G\,\frac{m\,dm}{r} = -G\,\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^2 \rho\right)\left(4\pi r^2 dr\,\rho\right)}{r} =$$

$$= -\frac{16}{3}\pi^2 \rho^2 G\, r^4\, dr$$

Teraz musimy wysumować wszystkie wkłady do E_{pot}:

$$E_{graw} = \int_0^R dE = -\int_0^R \frac{16}{3}\pi^2 G \rho^2 r^4\, dr =$$

$$= -\frac{16}{3}\pi^2 \rho^2 G \int_0^R r^4\, dr = -\frac{16}{3}\pi^2 G \rho^2 \frac{R^5}{5} =$$

$$= -\frac{3}{5}\,\frac{GM^2}{R}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi \rho R^3$$

Dla Ziemi $E_{\oplus} = 2{,}239 \times 10^{32}$ J

Roczna produkcja energii na świecie: $E = 2{,}311 \times 10^{12}$ J co odpowieda 2,311 TW rocznie, więc aby wyprodukować równowartość energii zgromadzonej w polu grawitacyjnym Ziemi potrzeba

$$\frac{E_{\oplus}}{P_{el/y}} = 9{,}7 \cdot 10^{19}\,\mathrm{s} \cong 220 \text{ wiek Wszechświata}$$

$$\approx 4{,}7\ \tau_{^{190}Pt}$$

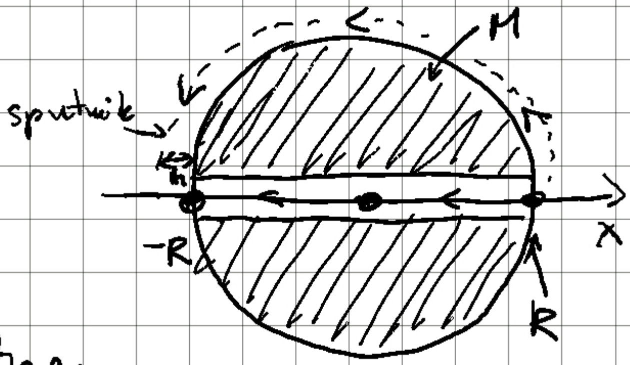
moc elektryczna produkowana rocznie

czas połowicznego rozpadu izotopu platyna-190

(2) Opisać ruch ciała w tunelu przechodzącym przez środek Ziemi i porównać go z ruchem sputnika krążącego na małej wysokości nad powierzchnią Ziemi ($h \ll R$) po orbicie zbliżonej do orbity kołowej. Znaleźć czas lotu ciała od współrzędnej $x = R$ do $x = -R$ (patrz rysunek).

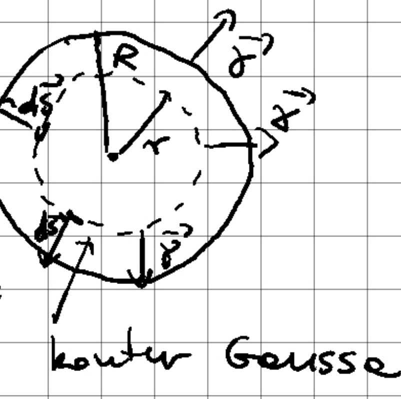
Załóżmy, że Ziemia jest jednorodną kulą o masie M i promieniu R. Przyjąć warunki początkowe równe $v_0=0$ i $x_0=R$.

Rozwiązanie:



Stosujemy prawo Gaussa, aby znaleźć $\vec{\gamma}$ we wnętrzu Ziemi:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



$$\oint \vec{\gamma}\cdot d\vec{S} \underset{\vec{\gamma}\parallel d\vec{S}}{=} \oint \gamma\, dS \underset{\substack{\gamma = const\\ \text{dla danego } r}}{=} \gamma \oint dS =$$

$$= \gamma\, 4\pi r^2 = -4\pi G\, M_{wew.} = -4\pi G \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \gamma = -\frac{1}{3} G \rho r 4\pi$$

W naszym przypadku r leży wzdłuż x:

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{3} G \rho \vec{x}\, 4\pi$$

Czyli siła działająca na masę m

wynosi
$$\vec{F}_{wyp} = -\frac{4\pi}{3} G \underbrace{\left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)}_{\rho} m\vec{x} =$$

$$= -\frac{GMm}{R^3}\vec{x}$$

czyli siła grawitacji jest siłą harmoniczną:

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{R^3}x$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{GM}{R^3}x = 0 \quad \leftarrow \text{r. oscylatora harmonicznego}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

więc $\quad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$

ruch drgający

Warunki początkowe:

$x(0) = R = A\cos\delta$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$

$$v(0) = 0 = -A\omega_0 \sin\delta \Rightarrow \delta = 0,$$

czyli także $A = R$, więc

$$x(t) = R\cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,t\right)$$

Zakładając, że na ciało w tunelu nie działają żadne inne siły okres tego ruchu wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Czas lotu z $x=R$ do $x=-R$ wynosi

$$t_c = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Ruch sputnika po orbicie kołowej o promieniu R możemy opisać równaniem:

$$F_{dośr} = \frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \text{const}$$

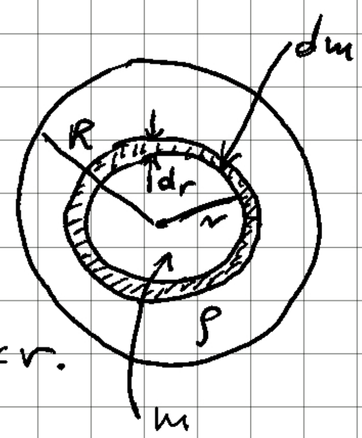
Czas lotu od $x=R$ do $x=-R$ wynosi

$$t_s = \frac{\pi R}{v} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = t_c$$

Czas ten jest równy czasowi lotu ciała przez tunel.
Jeżeli w chwili początkowej zarówno ciało, jak i sputnik będą znajdować się w punkcie o współrzędnej $x=R$, to ruch ciała w tunelu będzie rzutem ruchu sputnika na oś x.

(3) Znaleźć wartość ciśnienia grawitacyjnego we wnętrzu Ziemi zakładając, że Ziemia jest jednorodną kulą o gęstości ρ i promieniu R.

<u>Rozwiązanie:</u>

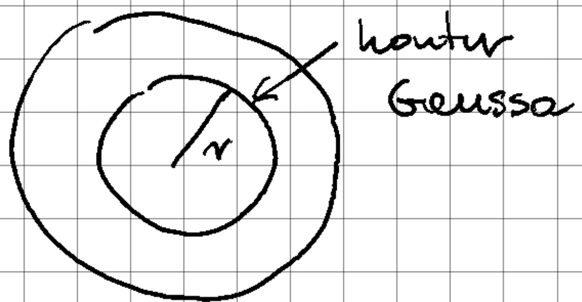


Rozważmy warstwę kulistą o promieniu $r<R$ i stosunkowo małej grubości $dr \ll r$.

Masa tej warstwy dm wynosi

$$dm = 4\pi r^2 \rho \, dr$$

Wartość natężenia pola grawitacyjnego w r znajdujemy z prawa Gaussa:



$$\oint \vec{\gamma} \cdot d\vec{S} = \gamma \, 4\pi r^2 = -4\pi G \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(r) = -\frac{GM}{R^3}\vec{r}$$

Czyli ciężar powłoki dm wynosi:

$$dQ = |\gamma(r)| \, dm(r) = \left(\frac{GM}{R^3} r\right)\left(4\pi r^2 \rho \, dr\right)$$

Ciężar ten rozkłada się na powierzchnię $S = 4\pi r^2$, a zatem ciśnienie wywierane przez warstwę na sferę wewnętrzną wynosi:

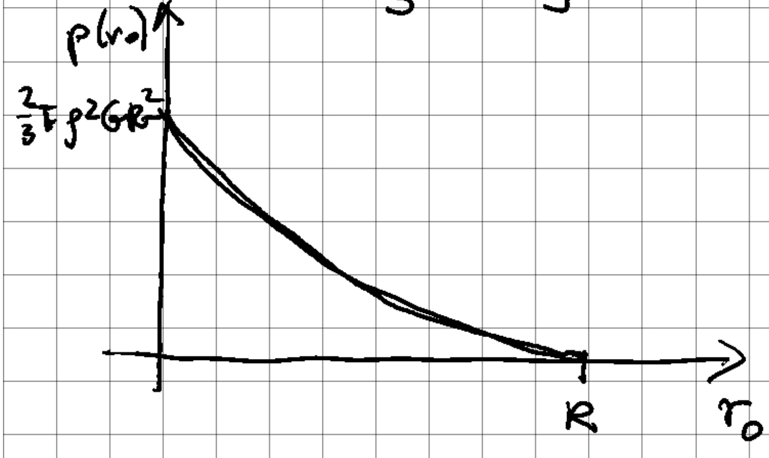
$$dp = \frac{dQ}{4\pi r^2} = \rho \frac{GM}{R^3} r \, dr$$

Aby obliczyć ciśnienie w odległości r_0 od środka Ziemi, sumujemy ciśnienia związane z kolejnymi warstwami o promieniach $r_0 \le r \le R$:

$$p(r_0) = \int dp = \rho \frac{GM}{R^3} \int_{r_0}^{R} r\,dr = \rho \frac{GM}{2R^3}\left(R^2 - r_0^2\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \rho^2 G \left(R^2 - r_0^2\right)$$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

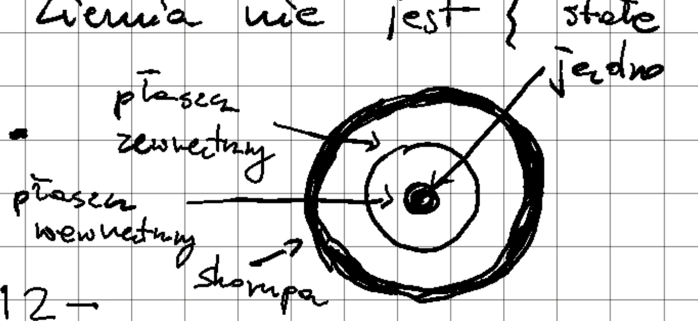


Ciśnienie graw. w środku Ziemi

$$p(0) = \frac{2}{3}\pi\rho^2 G R^2 =$$

$$= 1{,}73 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} = 1{,}7 \cdot 10^{6}\ \text{atm}$$

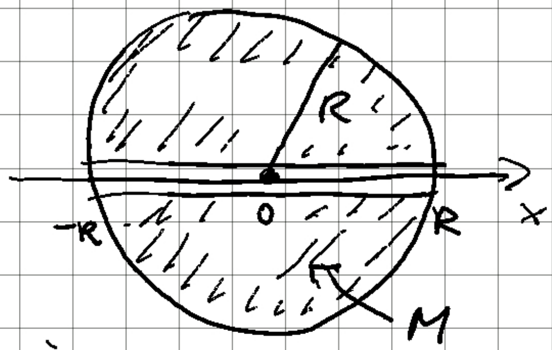
W rzeczywistości Ziemia nie jest jednorodną kulą.



Ćwiczenia do własnego wykonania:

(A) Znaleźć wartość pracy W, jaką należy wykonać, aby ciało o masie m przenieść ze środka jednorodnej kuli o masie M i promieniu R do nieskończoności. Pominąć rozmiary ciała o masie m.

(B) Do tunelu (tak jak w zad. 2) przechodzącego przez środek planety o masie M i promieniu R wrzucono ciało z prędkością początkową v_0 w punkcie R. Znaleźć czas lotu ciała do środka Ziemi.



(C) Znaleźć wartość ciśnienia grawitacyjnego w odległości r_0 od środka Ziemi zakładając, że gęstość masy jest liniową funkcją odległości od środka Ziemi. Promień Ziemi wynosi R, gęstość masy na powierzchni wynosi ρ_s, a w środku Ziemi $\rho_j > \rho_s$.

$R = 6370\ km$, $\rho_s = 2{,}2\ \frac{g}{cm^3}$, $\rho_j = 13{,}1\ \frac{g}{cm^3}$

Znając wartość ciśnienia w środku Ziemi i porównaj wynik z zadaniem 3. Jest to bardziej realistyczny model naszej planety.

Wskazówka: Masa kuli której gęstość zmienia się z promieniem r wynosi:

$$M = \int \rho \, dV = \int_0^R \rho(r)\, 4\pi r^2 dr$$