

ELEKTROMAGNETYZM cz. 3

Zaawansowane zagadnienia

⑦ Indukcja elektromagnetyczna

1°) Reguła Lenza

prąd indukcyjny o natężeniu I_{ind} płynie w takim kierunku, że wytwarzane przez niego pole magnetyczne \vec{B}_{ind} zawsze przeciwnie do kierunku zmiany strumienia

magnetycznego $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$

2°) Prawo indukcji EM Faradaya

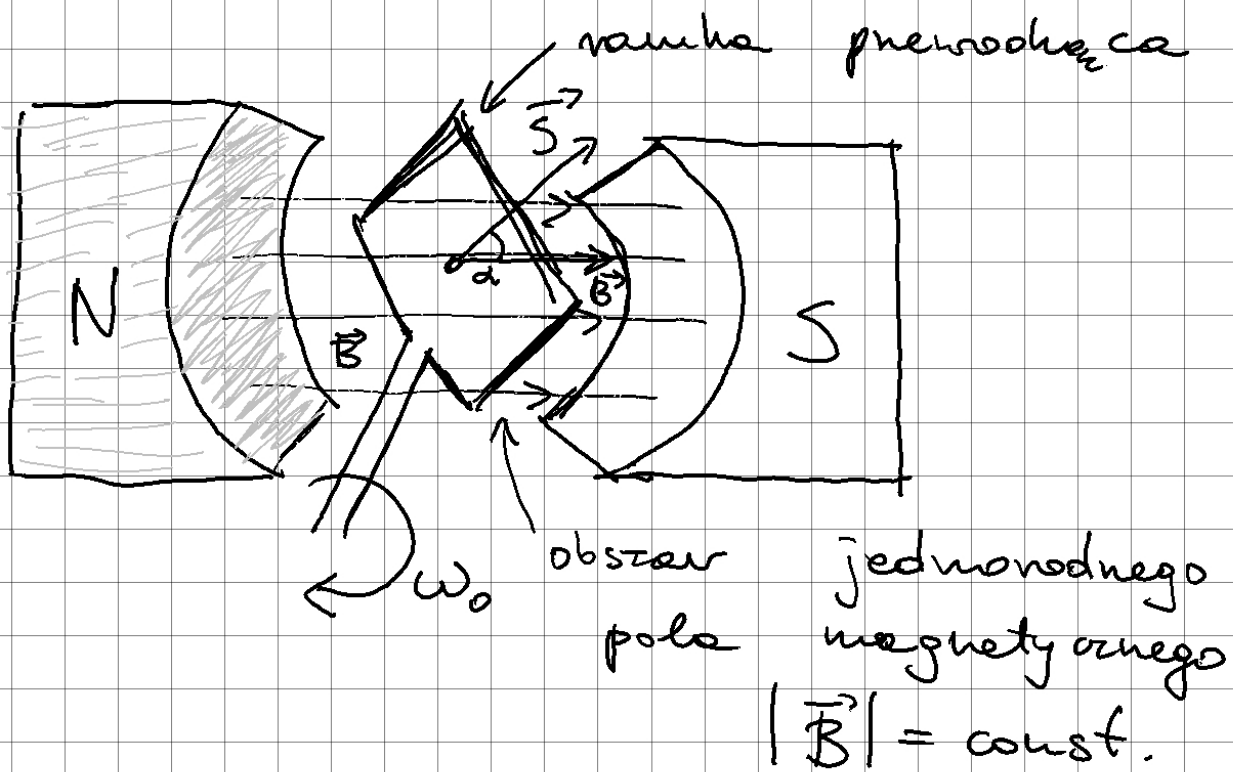
$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

\mathcal{E}_{ind} - siła elektromotoryczna indukcji

Prawo Faradдея jest ostatnim z równań Maxwella.

3°) Prętkiady

a) Prądnicą



Ramka obraca się z częstością

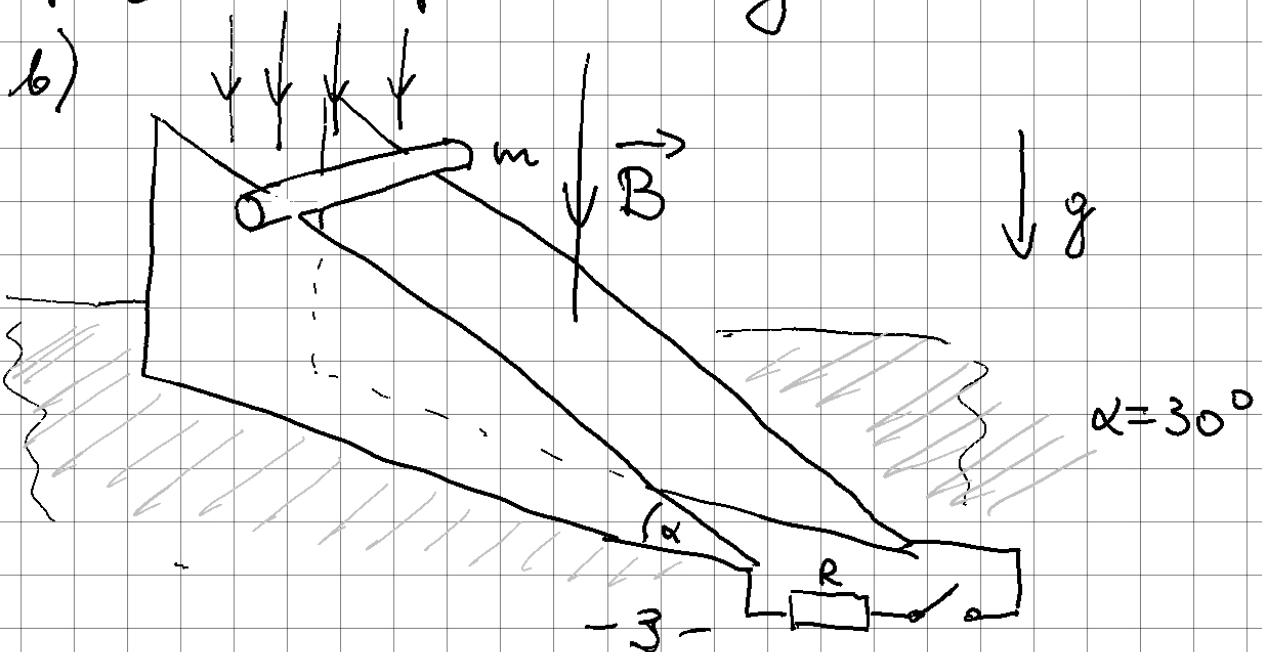
kołową ω_0 , wtedy

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \vec{B} \cdot \vec{S}(t) = BS \cos \alpha(t) = \\ &= BS \cos(\omega_0 t + \delta)\end{aligned}$$

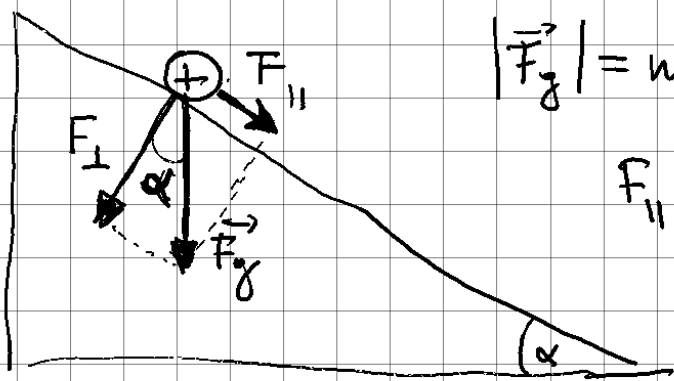
Na mocy prawa Faradaya:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ind}} &= - \frac{d\Phi_B}{dt} = -BS \frac{d}{dt}(\cos(\omega_0 t + \delta)) = \\ &= BS\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta) = \\ &= \mathcal{E}_m \sin(\omega_0 t + \delta) \end{aligned}$$

W uzwojeniu pojawia się oscylująca siła elektromotoryczna, której wartość maksymalna wynosi $\mathcal{E}_m = BS\omega_0$. Powstający w ten sposób prąd nazywany prądem prądu przemiennym.

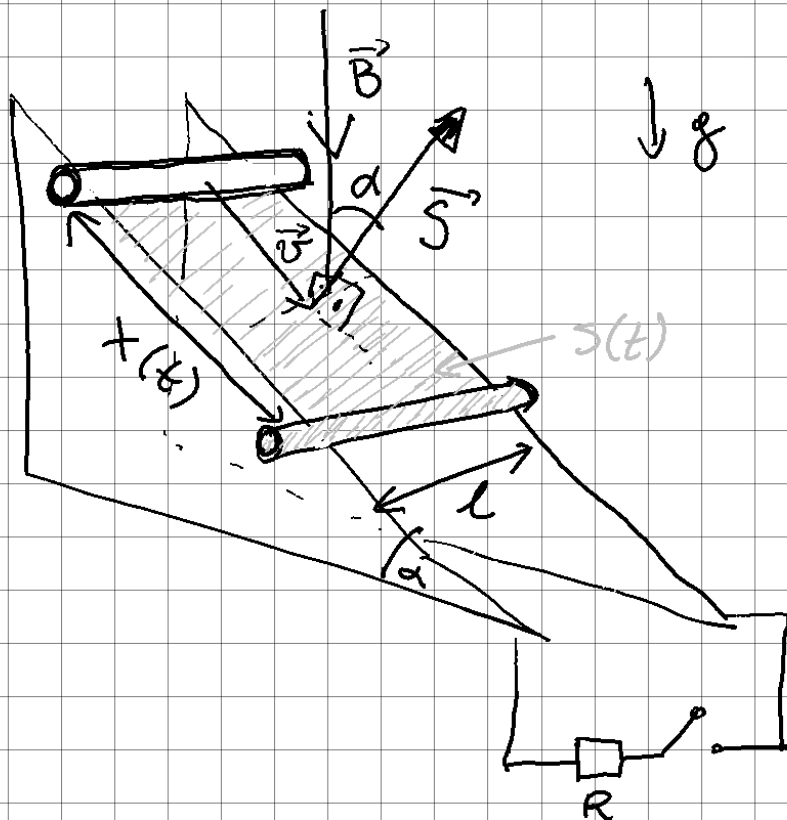


Pręt o długości l i masie m położono na dwóch równoległych szynach nachylnych pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Szyny znajdują się w polu magnetycznym o indukcji B ; linie sił pola są prostopadłe do poziomu. Oblicz maksymalną prędkość v_m , jaką może uzyskać pręt, w przypadku gdy szyny są zwarte na jednym końcu oporem R .



$$|\vec{F}_g| = mg$$

$$F_{\parallel} = mg \sin \alpha$$



strumień pola \vec{B} :

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}(t)$$

$$S(t) = lx(t)$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{S}(t)) =$$

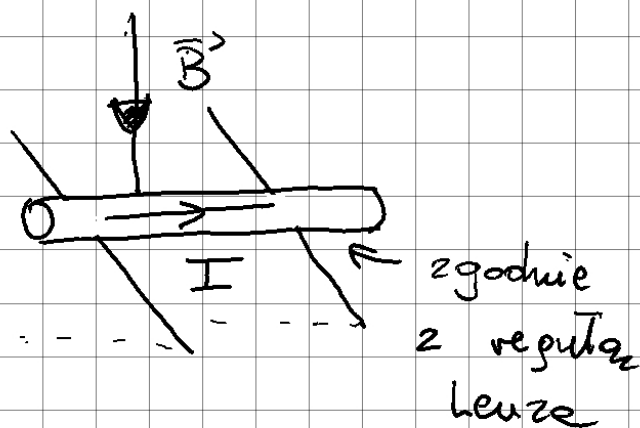
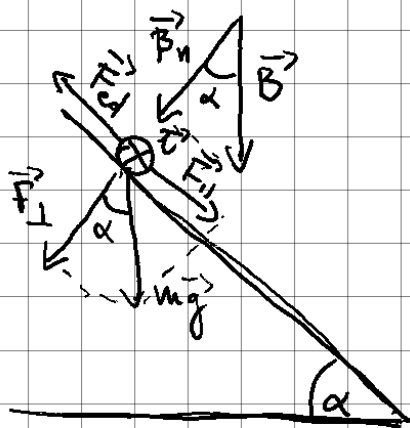
$$= \frac{d}{dt} \left[\underbrace{(-\vec{B}) \cdot \vec{S}(t)}_{BS(t) \cos \alpha} \right] =$$

$$= \frac{d}{dt} [BS(t) \cos \alpha] =$$

$$= l \frac{dx}{dt} B \cos \alpha = lvB \cos \alpha$$

Z reguły Lenza prąd będzie płynął tak, aby zapobiegać zmianom strumienia, czyli zwiększaniu prędkości pręta.

Zatem siła elektrodynamiczna musi działać przeciwnie do $F_{||}$.



$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} = I l B_n = I l B \cos \alpha$$

Prąd płynący w obwodzie wynosi $I = \mathcal{E}_{ind} / R$.

Ruch pręta odbywa się z malejącym przyspieszeniem

$$F_{||} - F_{el} = ma$$

Po zrównoważeniu się sił pręt porusza się ze stałą prędkością

$$F_{||} = F_{ed} \Rightarrow mg \sin \alpha = I l B \cos \alpha$$

oraz

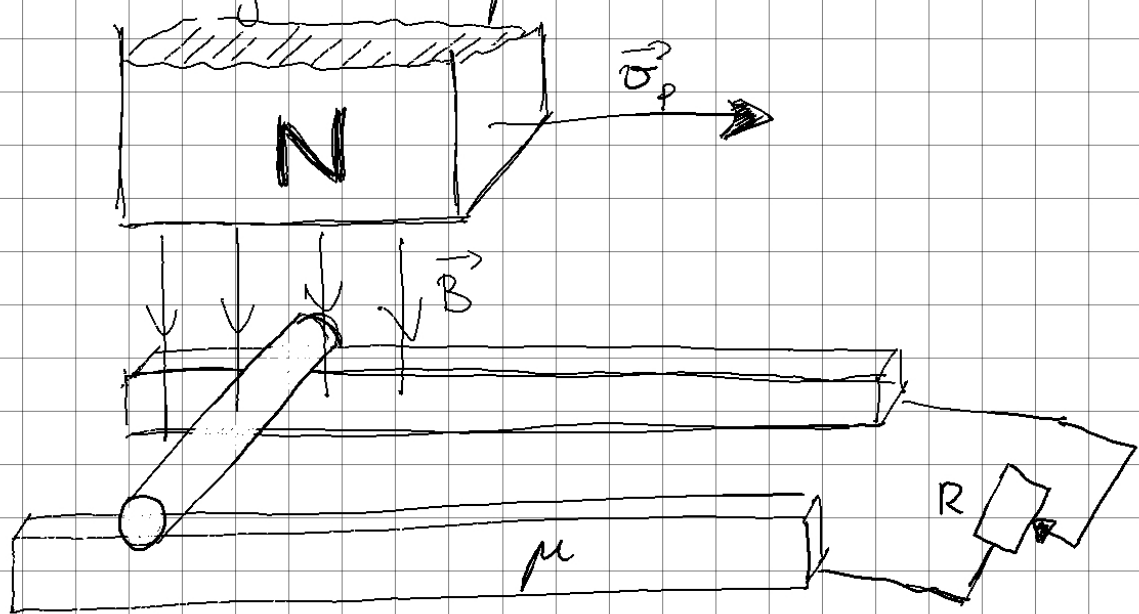
$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{l v_m B \cos \alpha}{R}$$

$$mg \sin \alpha = \frac{l v_m B \cos \alpha}{R} l B \cos \alpha$$

$$v_m = \frac{R mg \operatorname{tg} \alpha}{l^2 B^2 \cos \alpha}$$

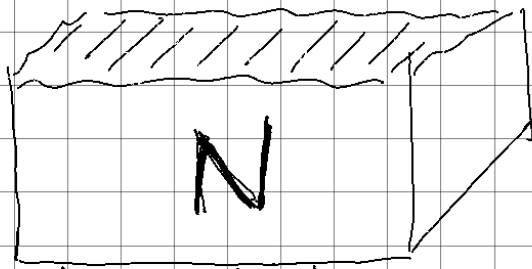
c) Na bardzo długich równoległych poziomych szynach, znajdujących się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B , prostopadłym do płaszczyzny, w której leżą szyny, położono

pręt o masie m , długości l
 i oporze r . Szyny są na
 jednym końcu zwarte oporem
 R . Jak będzie zachowywał się
 pręt, jeżeli pole przemieszcza
 się wzdłuż szyn z prędkością v_p ?
 Jaka będzie największa prędkość
 poruszania pręta, jeżeli współczynnik
 tarcia wynosi μ ?



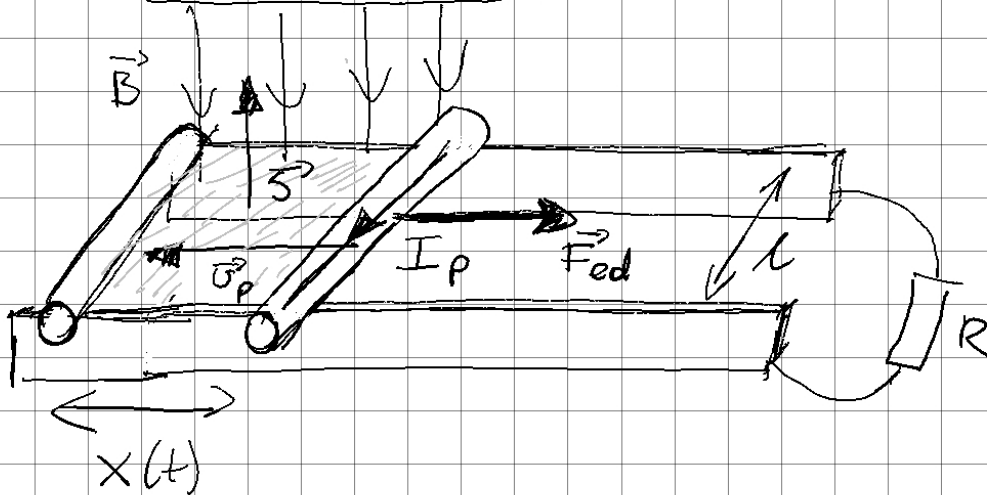
Ruch pola \vec{B} względem pręta
 zamieniany na ruch pręta względem

magnesu.



$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}(t)$$

$$S(t) = l x(t)$$



$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = B v_p l$$

Pod wpływem siły elektromotorycznej

\mathcal{E}_{ind} w obwodzie płynie

prąd:

$$I_p = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R+r} = \frac{l v_p B}{R+r}$$

Siła elektrodynamiczna działająca

na pręt może być większa

niż maksymalna siła tarcia

$$F_{ed} = I_p l B > mg\mu$$

Po raz jeszcze siła elektrodynamiczna

ma wartość:

$$F_{ed} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R+r} l B = \frac{l^2 B^2 v_p}{R+r}$$

Gdy pręt pod wpływem F_p zaczął poruszać się w kierunku pola \vec{B} prędkość pręta wzgl. pola zaczęła maleć, czyli takie prąd i siła elektromotoryczna zaczęła maleć.

Po raz jeszcze siła elektrodynamiczna

jest oczywiście większa od $T = mg\mu$,

tak, że pręt przyspiesza i jego prędkość wzgl. szyn rośnie, ale

maleje wzgl. pola \vec{B} - pręt

dogania pole. Po wyrównaniu

siły F_{ed} i T pręt osiąga stałą

prędkość wzgl. sru v_s , czyli
prędkość pręta wzgl. pola wynosi

$$v_k = v_p - v_s$$

$$F_{ed} = T$$

$$\frac{l^2 B^2 v_k}{R+r} = mg\mu$$

$$v_k = \frac{mg\mu(R+r)}{l^2 B^2}$$

$$v_s = v_p - \frac{mg\mu(R+r)}{l^2 B^2}$$

Im mniejszy opór tym większe
jest prędkość pręta. Ponieważ

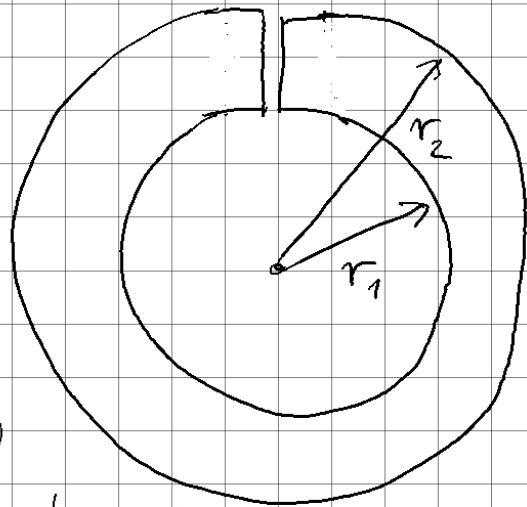
$r=0$ nie zachodzi nigdy, więc

pręt nigdy nie osiągnie v_p ,

przy czym $v_p > \frac{(R+r)mg\mu}{l^2 B^2}$

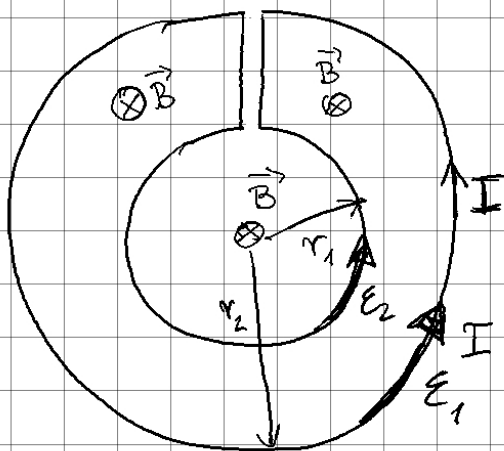
d)

Obwód przedstawiony
obok znajduje się
w jednorodnym
polu magnetycznym,



w płaszczyźnie prostopadłej
do linii sił pola. Indukcja
magnetyczna zmienia się według

funkcji $B = kt$. Obliczyć natężenie
prądu płynącego w obwodzie,
jeżeli jego opór wynosi R .



$$\epsilon_1 = - \frac{d\Phi_B}{dt} = -kS_1$$

$$\epsilon_2 = - \frac{d\Phi_B}{dt} = -kS_2$$

Powstające siły
elektromotoryczne

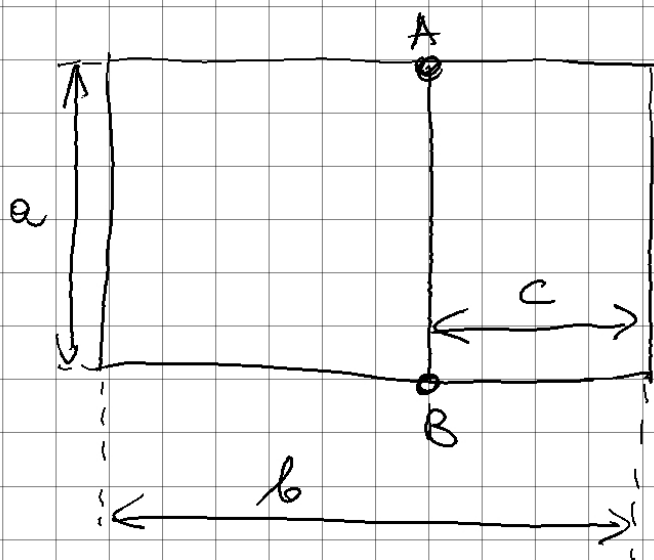
dziękuję precyzyjnie dla tego
 prąd będzie płynął pod wpływem
 różnicy tych sił (tak, aby "wypadkowe"
 siła elektromotoryczna była dodatnia):

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = k(S_2 - S_1) = k\pi(r_2^2 - r_1^2),$$

czyli

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R} = \frac{k\pi}{R}(r_2^2 - r_1^2)$$

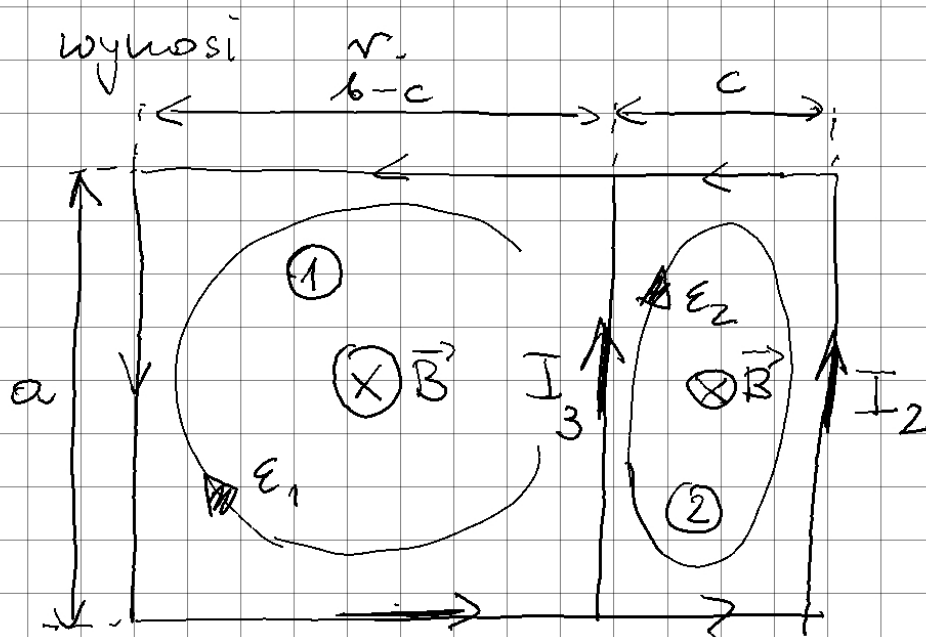
e) Ramka prostokątna o bokach
 a i b jest podzielona na dwie
 części przewodnikiem prymocownym
 w punktach A i B. Obliczyć



wotężenie
 prądu, który
 płynie w przewodniku
 AB, gdy ramka
 znajduje się

w jednorodnym polu magnetycznym, które się zmienia w czasie według funkcji $B = kt$. Linie sił pola są prostopadłe do płaszczyzny namiki.

Obliczyć spadek napięcia na przewodniku AB. Przyjąć, że $c < \frac{b}{2}$ oraz że opór jednostki długości dowolnie



$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d\Phi_B^{(1)}}{dt} = ka(b-c)$$

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_B^{(2)}}{dt} = kac$$

Na mocy praw Kirchhoffa
mamy:

$$\begin{cases} \textcircled{1} I_1 r(a+2b-2c) + I_3 ra = ka(b-c) \\ \textcircled{2} I_2 r(a+2c) - I_3 ra = kac \end{cases}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 \quad \leftarrow \text{zachowanie}$$

Ładunku

Dodając $\textcircled{1}$ do $\textcircled{2}$ otrzymamy:

$$I_1 r(a+2b-2c) + I_2 r(a+2c) = kab$$

$$(I_3 + I_2) r(a+2b-2c) + I_2 r(a+2c) = kab$$

$$I_3 r(a+2b-2c) + I_2 r(2a+2b) = kab$$

$$I_2 = \frac{kab}{2r(a+b)} - I_3 \frac{(a+2b-2c)}{2(a+b)}$$

Wstawiamy do $\textcircled{2}$ i linijmy dalej

$$r(a+2c) \left[\frac{kab}{2r(a+b)} - I_3 \frac{(a+2b-2c)}{2(a+b)} \right] - I_3 ra = kac$$

$$k_{ab} \frac{(a+2c)}{2(a+b)} - I_3 \frac{(a+2c)(a+2b-2c)}{2(a+b)} r - I_3 r a =$$

$$= k_{ac}$$

$$I_3 \left[\frac{(a+2c)(a+2b-2c) + 2a(a+b)}{2(a+b)} \right] r =$$

$$= k_a \left[\frac{(a+2c) + 2c(a+b)}{2(a+b)} \right]$$

$$I_3 = \frac{k}{r} \frac{a [(a+2c) + 2c(a+b)]}{(a+2c)(a+2b-2c) + 2a(a+b)}$$

Wtedy spadek napięcia na AB wynosi

$$U = I_3 R_{AB} = \frac{k a^2 [(a+2c) + 2c(a+b)]}{(a+2c)(a+2b-2c) + 2a(a+b)}$$

8) Prawa Maxwella - podsumowanie

1) Prawo indukcji elektro magnetycznej
Faradaya

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad |$$

↓
cała
po zamkniętym
obwodzie elektrycznym

gdzie $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$

Zmiana strumienia pola

magnetycznego (zmienne w czasie \vec{B}
lub zmieniające się powierzchnia
przez którą wnika pole \vec{B})

powoduje wyindukowanie pola
elektrycznego powodującego powstanie
różnicy potencjałów w obwodzie
→ siły elektro magnetycznej, która

dla zamkniętego obwodu o oporności R powoduje przepływ prądu o natężeniu $I = \mathcal{E}_{ind} / R$ w taki sposób, aby zapobiec zmianom strumienia pola magnetycznego (reguła Lenza).

2) Prawo Ampère'a rozszerzone o prąd przesunięcia Maxwella

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{weo.} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}_{\text{prąd przesunięcia (nie omawiane na obzvie)}}$$

Przepływający prąd oraz zmiany strumienia pola elektrycznego w czasie wytwarzają pole magnetyczne.

3) Prawo Gaussa dla elektryczności

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{weł.}}}{\epsilon_0}$$

ładunki elektryczne są źródłami pola elektrycznego.

4) Prawo Gaussa dla magnetyzmu

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Pole magnetyczne jest bezźródłowe.