ELEKTROMAGNETYZM cz. 2

zaawansowane zagadnienia

(4) Prawo Gaussa

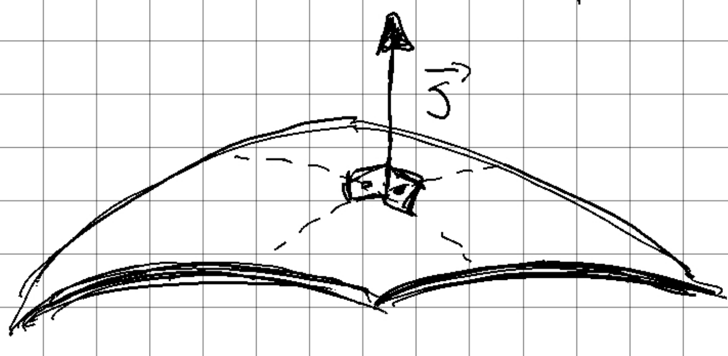
1°) Strumień pola elektrycznego przez powierzchnię S:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S},$$

gdzie $\vec{E}$ – wektor natężenia pola elektrycznego

$\vec{S}$ – wektor pola powierzchni

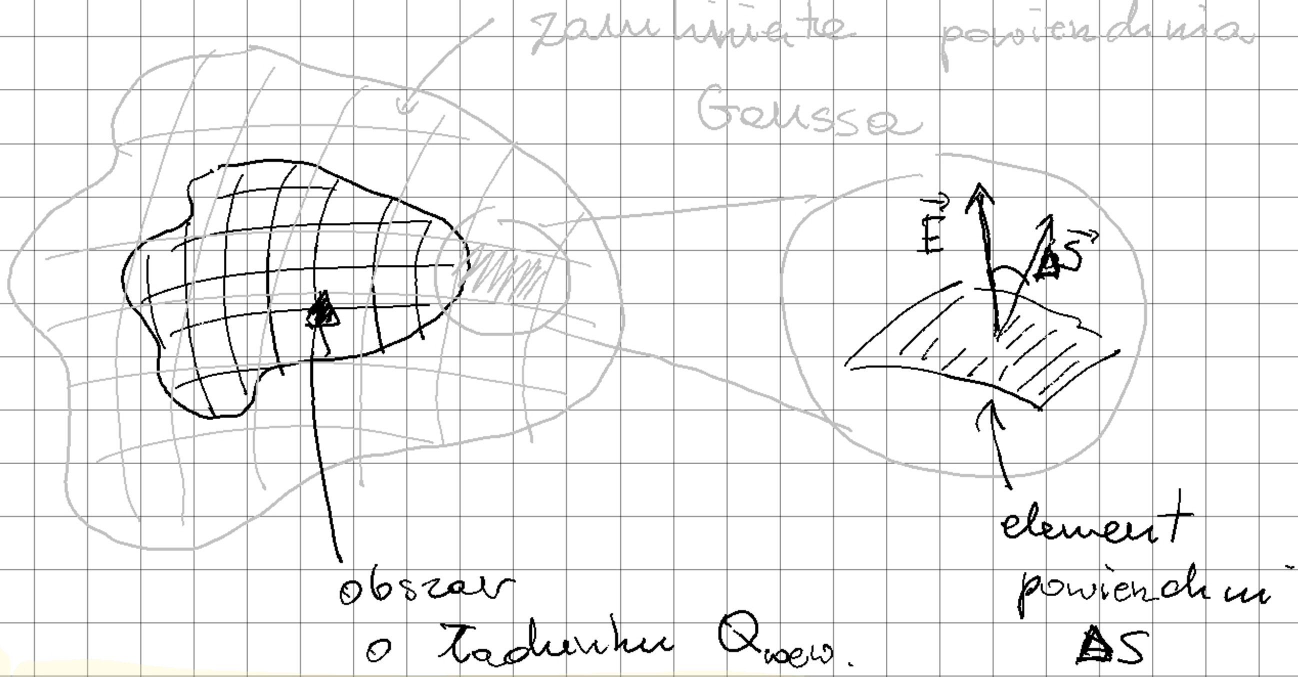
$|\vec{S}| = S =$ pole powierzchni



$\vec{S}$ jest wektorem prostopadłym do powierzchni skierowanym na zewnątrz.

Gdy $\vec{E} \perp \vec{S}$, wtedy strumień Φ_E wynosi 0. Gdy $\vec{E} \parallel \vec{S}$, $\Phi_E = ES$

2°) Sformułowanie prawa Gaussa



$$\boxed{\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}}$$

suma po zamkniętej powierzchni

Strumień pola $\vec{E}$ przez zamkniętą powierzchnię jest proporcjonalny do ładunku zgromadzonego w jej wnętrzu.

Gdy $\Delta\vec{S} \to d\vec{S}$ – infinitezymalne elementy powierzchni wtedy $$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}}$$

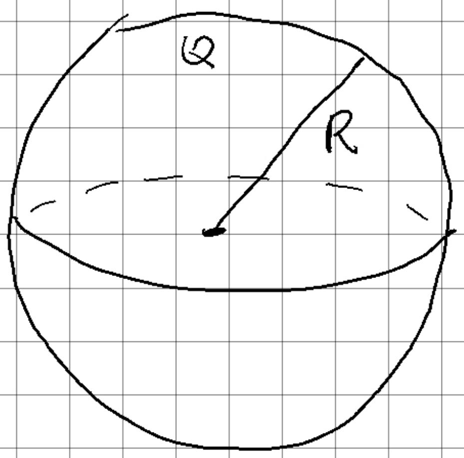
całka po zamkniętej powierzchni S

Jest to uogólnienie prawa Coulomba, które jest pierwszym z czterech równań Maxwella będących podstawą elektromagnetyzmu.

3°) Przykłady:

a) Jednorodnie naładowana kula o ładunku całkowitym Q

Gdy powierzchnia Gaussa wybierzemy zgodnie z symetrią układu, wtedy nie musimy wykonywać całek! (Tak naprawdę tylko w wysoce symetrycznych przypadkach prawo Gaussa można zastosować ściśle)

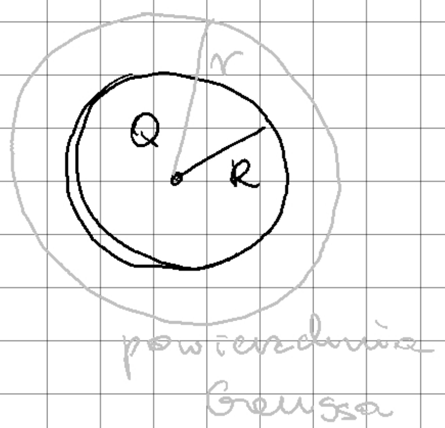


Gęstość objętościowa ładunku:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \text{const}$$

Wybieramy sferycznie symetryczną powierzchnię Gaussa, wtedy $\vec{E} \parallel \vec{S}$, czyli $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, dS$, a ponadto dla danego R $|\vec{E}| = \text{const}$.

i)



$$\oint_{S(r)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_{S(r)} dS =$$

$$= E \underbrace{4\pi r^2}_{\substack{\text{powierzchnia} \\ \text{sfery o} \\ \text{promieniu } r}}$$

$Q_{wew.} = Q$, czyli

$$E\, 4\pi r^2 = \varepsilon_0^{-1} Q \Rightarrow \underline{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

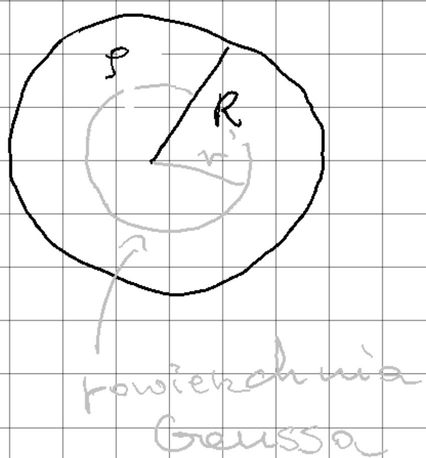
dla $r > R$

Dostajemy, więc pole $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad (r > R)$$

jak dla ładunku punktowego.

ii) $r < R$



$$\oint_{S(r)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E \oint_{S(r)} dS = E\, 4\pi r^2$$

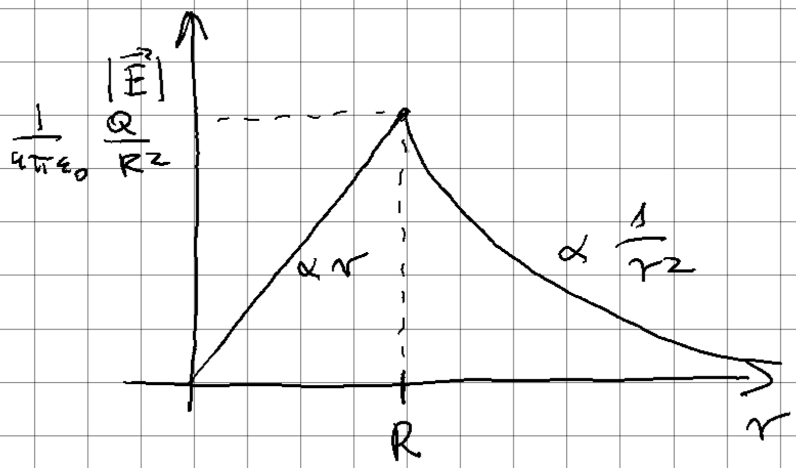
$$Q_{wew.} = \int\limits_{\substack{\text{objętość} \\ \text{zamknięta} \\ \text{pow. Gaussa}}} \rho\, dV \overset{\rho = const}{=} \rho \int dV = \rho\, \frac{4}{3}\pi r^3$$

czyli

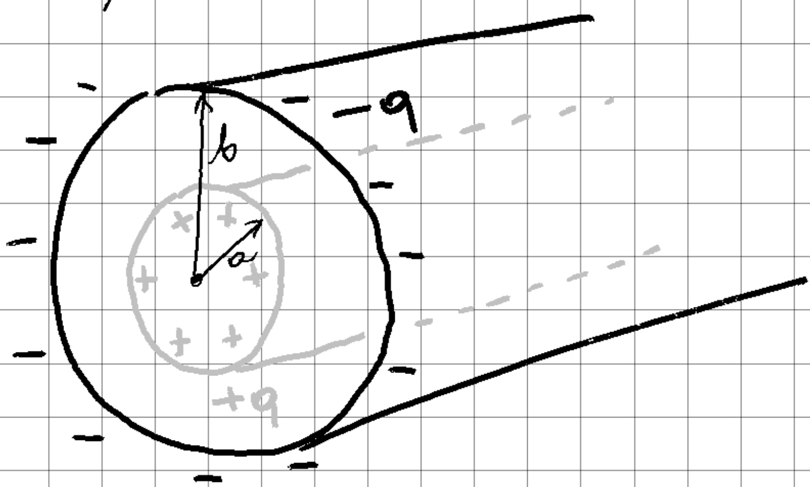
$$E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\, \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\, r \qquad (r < R)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

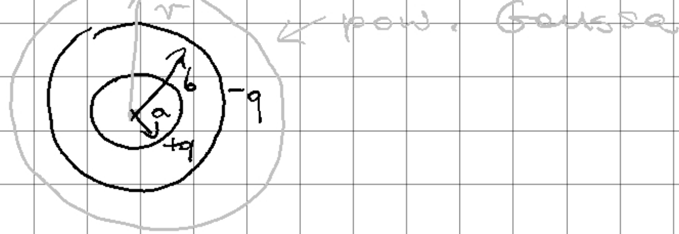


b) Kondensator walcowy



Tutaj powierzchnię Gaussa wybieramy jako walec o długości L i promieniu r:

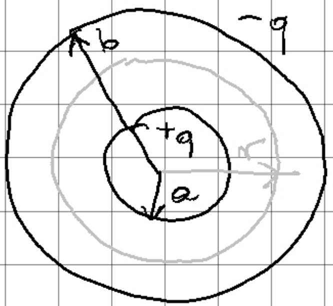
i) $r > b$



$Q_{wew.} = 0$

$\Rightarrow \vec{E} = 0 \quad (r > b)$

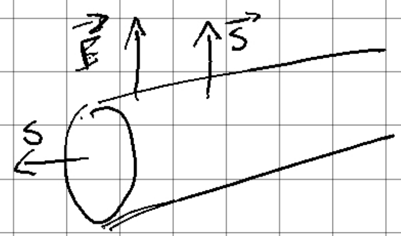
ii) $a < r < b$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \overset{\vec{E} \parallel \vec{S}}{=} \oint_S E\,dS \overset{E=\text{const}}{=} E \oint_S dS =$$

$$= E\,\underbrace{2\pi r L}_{\text{pole powierzchni bocznej powierzchni Gaussa}}$$

Denka nie dają wkładu, bo $\vec{E} \perp \vec{S}$, więc $\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$

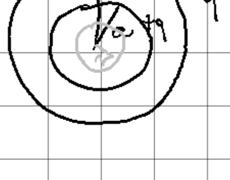


$Q_{wew.} = q$, czyli

$$E\, 2\pi r L = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 r L}$$

$(r \in [a,b])$

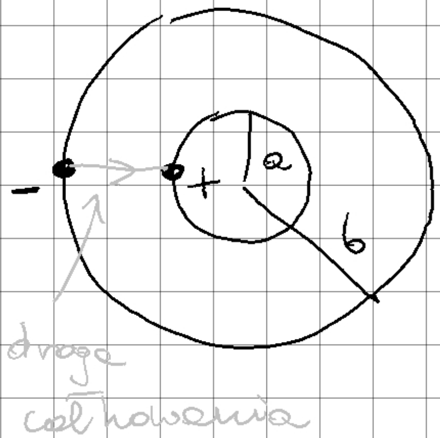
iii) $r < a$, $Q_{wew.} = 0$



$\Rightarrow \vec{E} = 0$. $(r < a)$

Szukamy napięcia w tym przypadku: $\quad (\varphi_+ > \varphi_-)$

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$



$$= \int_b^a \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\, dr =$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_b^a \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

z definicji pojemności kondensatora

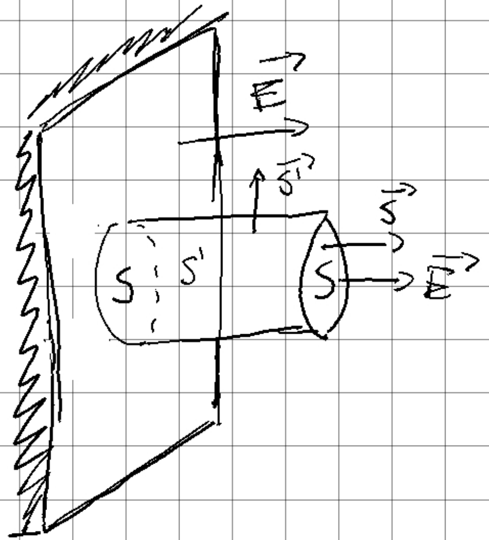
$$C = \frac{q}{U} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$$

c) Waga elektryczna

r – promień płytek

d_1 $(\ll r)$ – grubość dielektryka

d_2 $(\ll r)$ – odległość między spodem szalki, a dielektrykiem



Z prawa Gaussa:

$$E\,S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

w powietrzu

$$E_d = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_w S}$$

w dielektryku

Liczymy napięcie między metalową płytką, a szalką:

$$U = \int_{-}^{+} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^{d_1} E_d\, dx + \int_{d_1}^{d_2+d_1} E_0\, dx =$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_w \varepsilon_0 S} d_1 + \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d_2$$

$$U = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_w} + d_2\right)$$

Nad denkiem szalki pole elektryczne jest równe 0, a pod nią E_0, czyli okładka znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym $\frac{E_0}{2}$ wytwarzanym przez nią samą:

$$F = \frac{Q E_0}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2\left(\frac{d_1}{\varepsilon_w} + d_2\right)^2},$$

czyli w stanie równowagi:

$$\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2\left(\frac{d_1}{\varepsilon_w} + d_2\right)^2} = mg$$

$$\Rightarrow \quad U = \left(\frac{d_1}{\varepsilon_w} + d_2\right)\sqrt{\frac{2mg}{\pi r^2 \varepsilon_0}}$$

Regulując U możemy mierzyć masę obiektu.

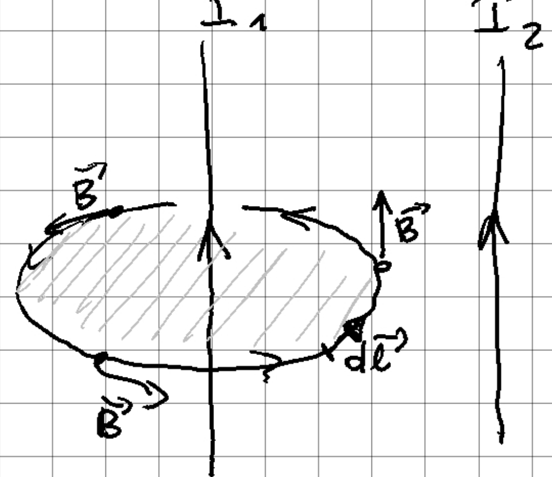
⑤ Prawo Ampère'a

Prawo Ampére'a jest w pewnym sensie analogiem prawa Gaussa dla magnetostatyki. (pełni podobną funkcję)

$$\boxed{\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{wew.}}$$

całkowanie po zamkniętej krzywej

Wielkość $K_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ nazywa się krążeniem pola $\vec{B}$.



$I_{wew} = I_1$

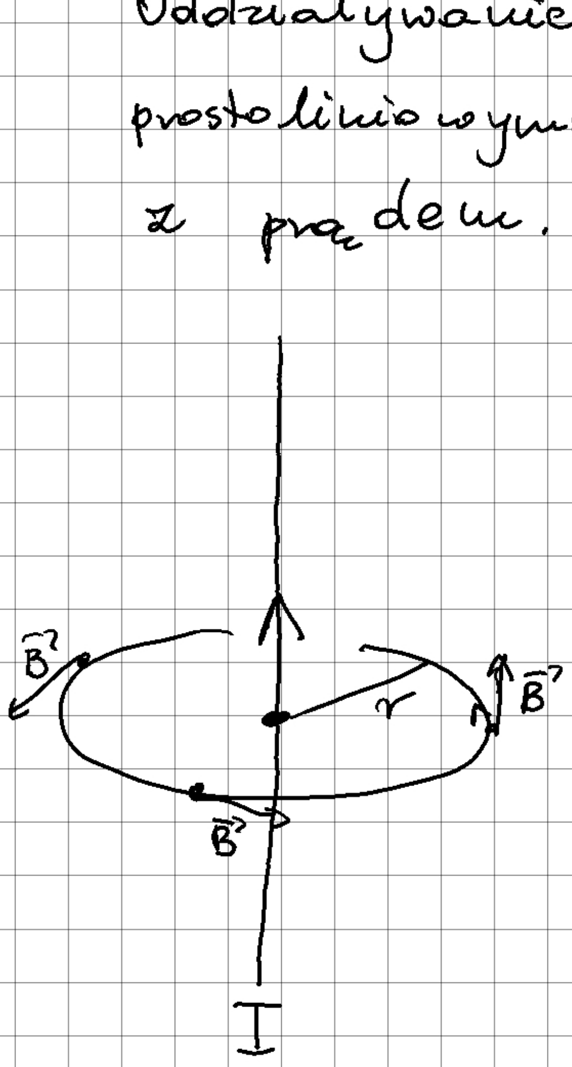
Krążenie pola $\vec{B}$ jest proporcjonalne do natężenia prądu zamkniętego

wewnątrz pętli Γ dla której liczymy krążenie pola.
Prawo Ampère'a jest drugim z podstawowych równań elektromagnetyzmu – równań Maxwella (trzeba je tylko uzupełnić o tzw. prąd przesunięcia – nie będziemy tego dyskutować tutaj).
Dla pola elektrycznego $\vec{E}$ możemy także policzyć krążenie

$$\boxed{K_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

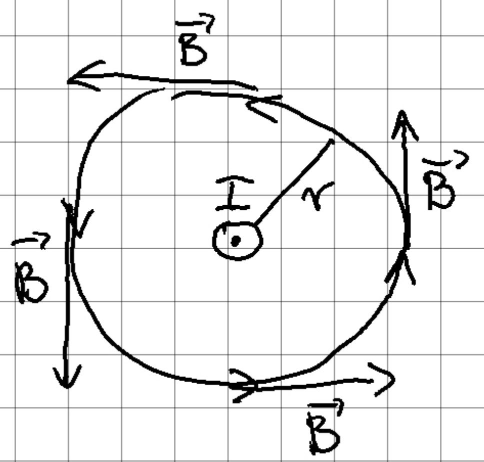
Jest to trzecie równanie Maxwella.
Pole $\vec{B}$ jest polem wirowym, ale bezźródłowym. Natomiast pole $\vec{E}$ jest pole źródłowym, ale bezwirowym.

Oddziaływanie pomiędzy dwoma prostoliniowymi przewodnikami z prądem.



Pole $\vec{B}$ układa się zgodnie z regułą prawej dłoni.

Wybieramy kontur Ampère'a zgodnie z symetrią układu, czyli jako okrąg, którego środek leży na przewodzie.



W tym przypadku $\vec{B} \parallel d\vec{l}$, czyli $\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,dl$, ponadto $|\vec{B}| = B = \mathrm{const}$, czyli

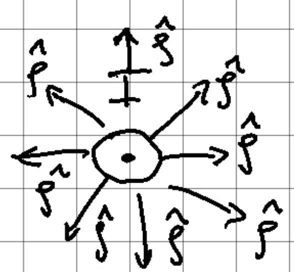
$$\oint\limits_{\bigcirc} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint\limits_{\bigcirc} B\,dl = B \underbrace{\oint\limits_{\bigcirc} dl}_{\text{obwód okręgu}} = 2\pi r\, B$$

całka po okręgu

czyli z prawa Ampère'a mamy:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\rho}$$

wersor radialny w płaszczyźnie XY i $\perp$ do osi z.

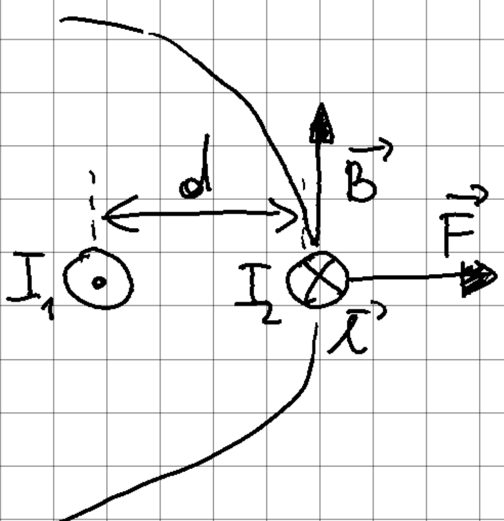


$$|\hat{\rho}| = 1$$

Siła Lorentza:

$$\vec{F}_L = q\,\vec{v}\times\vec{B} = q\,\frac{\Delta\vec{l}}{\Delta t}\times\vec{B} = \frac{q}{\Delta t}\Delta\vec{l}\times\vec{B} =$$
$$= I\,\Delta\vec{l}\times\vec{B}$$

siła działająca na przewodnik z prądem.



$\vec{l}$ - skierowane wzdłuż kierunku przepływu prądu

$|\vec{F}| = I_2 \, l \, B$ ← pole magnetyczne w punkcie I_2 wytworzone przez I_1

↑ l – dł. przewodnika

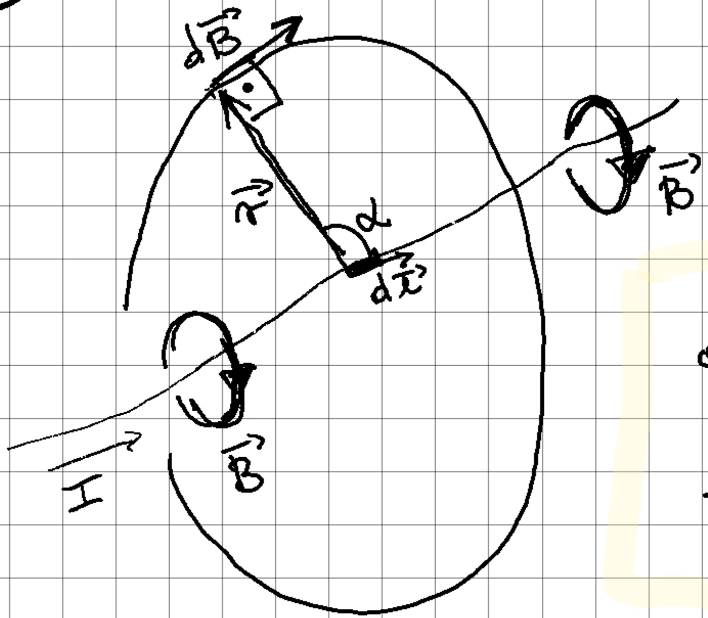
$$|\vec{F}| = I_2 \, l \, \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \, l$$

$$\frac{|\vec{F}|}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$ – siła działająca na jednostkę przewodnika

I_1 $\odot$ I_2 $\odot$ – przyciąganie

I_1 $\odot$ I_2 $\otimes$ – odpychanie

6 Prawo Biota-Savarta

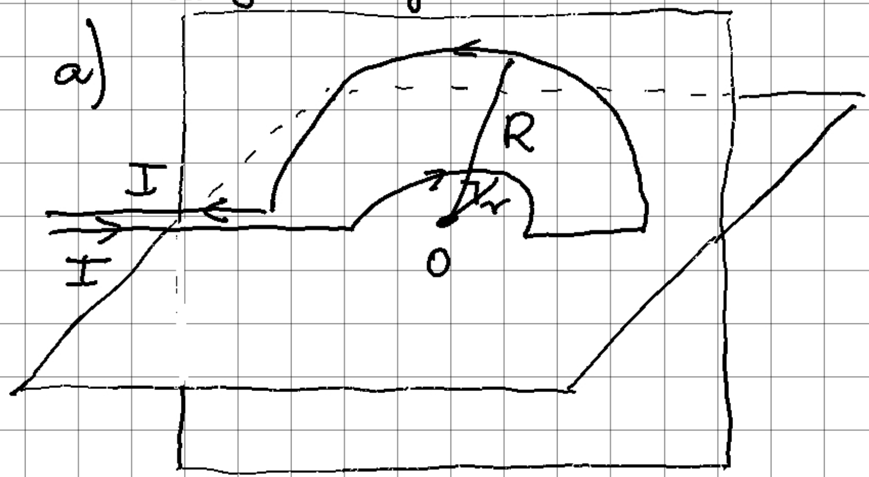


$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\alpha}{r^2},}$$

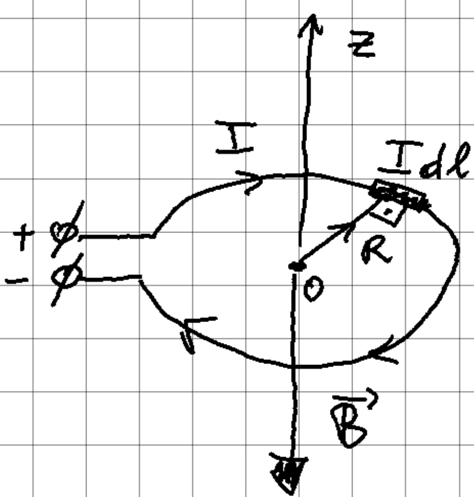
gdzie $|\vec{r}| = r$

Przykłady

a)



Rozważmy najpierw przewodnik w kształcie okręgu o promieniu R:



$\sin\alpha = \sin 90° = 1$

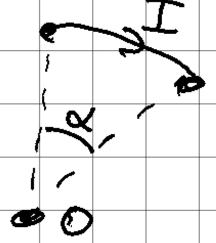
$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2}\hat{z}$$

$R = \text{const}$

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = -\oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2}\hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\hat{z}\underbrace{\oint dl}_{\text{obwód okręgu}} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}2\pi R\,\hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{2R}\hat{z}$$

Z powodu symetrii jeżeli mamy do czynienia z fragmentem okrągłej ramki o łuku α wtedy:



$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2R}\,\frac{\alpha}{2\pi}$$

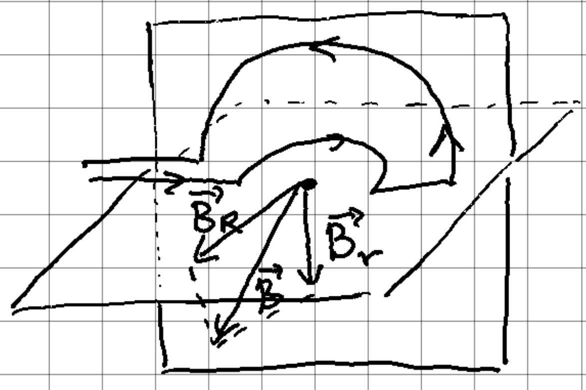
$[\alpha] = \text{rad.}$

Czyli w naszym problemie mała ramka produkuje pole magnetyczne

$$|\vec{B}_r| = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0 I}{2r}$$

a duża produkuje

$$|\vec{B}_R| = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0 I}{2R}$$

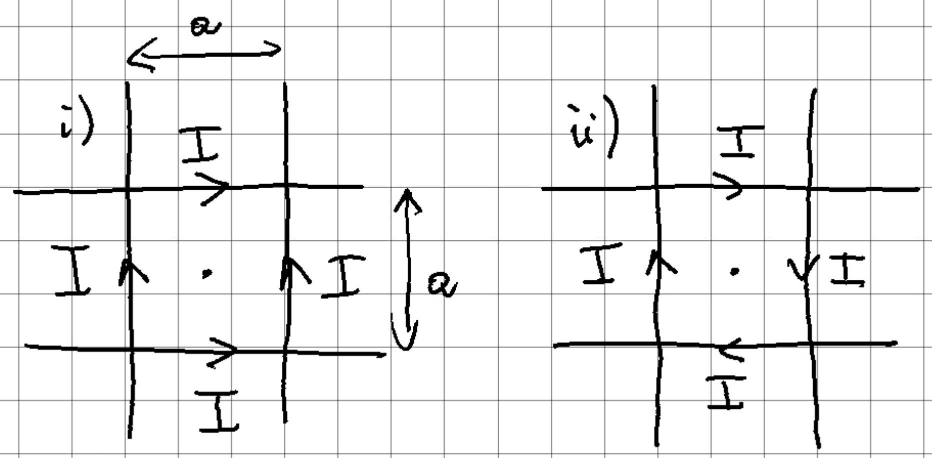


Więc wypadkowe pole $\vec{B}$ ma wartość:

$$|\vec{B}|^2 = |\vec{B}_r|^2 + |\vec{B}_R|^2$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu I}{4}\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}}$$

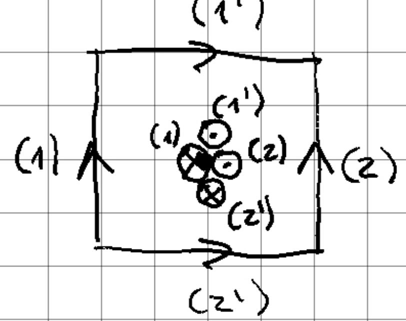
b)



Znaleźć pole magnetyczne w środku kwadratu:

i) wiemy z poprzednich rozważań dotyczących prawa Ampére'a, że dla przewodnika liniowego wartość pola $\vec{B}$ wynosi

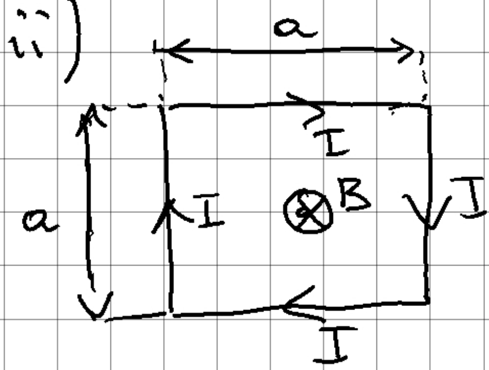
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



z symetrii mamy, że

$B = 0$ w tym przypadku

ii)

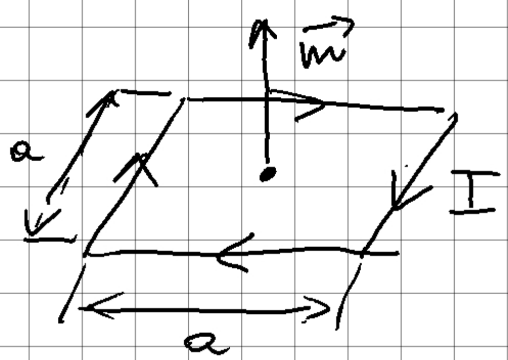


wszystkie wkłady dodają się do siebie, czyli

$$B = \frac{4\mu_0 I}{2\pi\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{4\mu_0 I}{\pi a}$$

Krótka dygresja o momentach dipolowych:

$\vec{m} = I\vec{S}$ – magnetyczny moment dipolowy



$$|\vec{m}| = I a^2$$

Na ramkę z prądem w zewnętrznym polu magnetycznym $\vec{B}$ działa moment siły:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

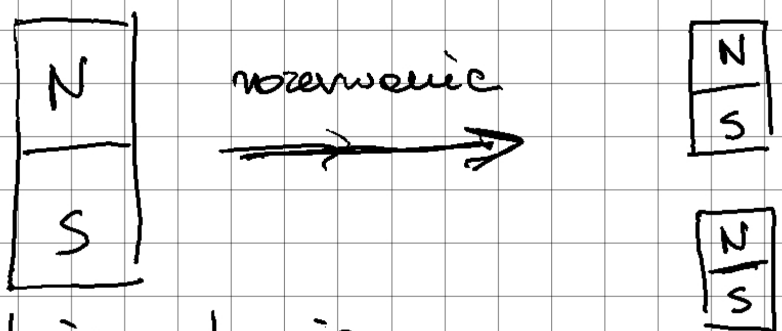
Analogicznie sprawa się ma dla dipola elektrycznego w zewnętrznym polu $\vec{E}$:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

elektryczny moment dipolowy.

Ciekawostka:

Nie istnieją ładunki magnetyczne (monopole magnetyczne), dlatego nie możliwe jest oddzielenie biegunów w magnesie, tj.



Powoduje to, że prawo Gaussa dla magnetyzmu ma postać

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

Bezźródłowości pola $\vec{B}$!